Kb. a fgv-geometriához

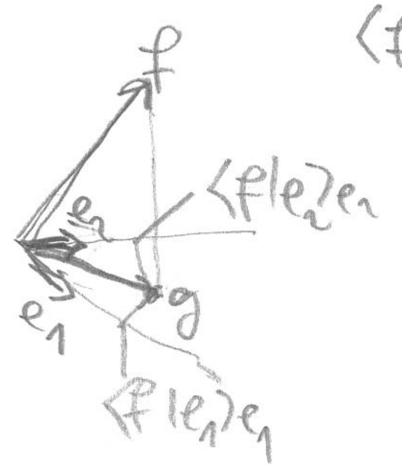
1) $f \in \mathcal{F} = C(\overline{\Omega})$ $\quad \Omega$ korl. nyílt $\subset \mathbb{R}^N$

$e_1, \dots, e_n \in \mathcal{F}$ $\quad \langle \cdot | \cdot \rangle$ ORTN, $\langle e_i | e_i \rangle = 1$

$\Rightarrow$ $g := \sum_{i=1}^{n} \langle f | e_i \rangle e_i$ $\quad$ f-nek az $\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_n = \mathcal{G}$-ben vett egyetlen legközelebbi pontja,

$f - g \perp \mathcal{G}$, $\quad \|f\|^2 = \|g\|^2 + \|f-g\|^2$

$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = [f \text{ HOSSZA}]^2$



Speciális módon

$$\boxed{\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \langle f | e_i \rangle^2},$$

HA $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ORTN RSZ.

[BESSEL-EGYENLŐTLENSÉG]

1a) Ha $g_1, \dots, g_N$ ORT RSZ $\langle g_i | g_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$, $\langle g_i | g_i \rangle > 0$,

akkor $g := \sum_{i=1}^{N} \langle f | g_i \rangle / \langle g_i | g_i \rangle$ AZ LEGKÖZELEBBI FGV f-HEZ $\mathcal{G} = \mathbb{R}g_1 + \dots + \mathbb{R}g_N$-BŐL

Biz: $e_i := \frac{g_i}{\|g_i\|} = \frac{g_i}{\langle g_i | g_i \rangle^{1/2}}$ ORTN RSZ + 1)

2) A részletösszegek konvergenciája (nem teljesen biztos!)

Tétel HA $f\in\mathcal{F}$, $\langle e_1, e_2, \dots\rangle$ ORTN RSZ $\subset\mathcal{F}$ és

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f|e_i\rangle^2$$

!!!

AKKOR a $g_n=\sum_{i=1}^{n}\langle f|e_i\rangle e_i$ részletösszegekre

$g_{n_k}(x)\to f(x)$ $(k\to\infty)$ EGY 0-HALMAZ PONTJAIT KIVÉVE,

valahányszor $\|f-g_{n_k}\|<1/10^k$ $(k=1,2,\dots)$

Def $S\subset\Omega$ 0-HALMAZ, ha $\forall\varepsilon>0$

$\exists K_1, K_2, \dots\subset\Omega$ KOCKASOROZAT úgy, hogy:

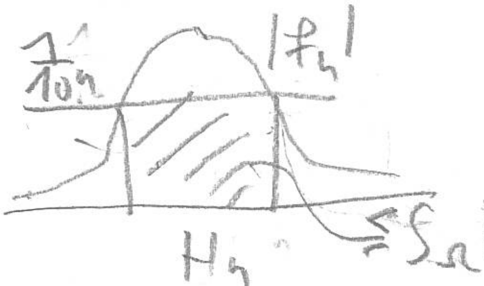
$\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i\supset S$, $\sum_{i=1}^{\infty}vol_N(K_i)<\varepsilon$

Biz A következő elvet [Riesz-Weil lemma]

$f_n:=(f-g_n)^2$-RE ALKALMAZVA:

HA $f_1, f_2, \dots\in C(\mathbb{R})$ és $\int_\Omega|f_n|<\frac{1}{100^n}$ $(n=1,2,\dots)$,

AKKOR (1) $H_n:=\{x\in\Omega : |f_n(x)|\geq\frac{1}{10^n}\}$ TÉRFOGATA



$$vol_N(H_n)\leq\frac{1/100^n}{1/10^n}=\frac{1}{10^n}$$

(2) $Vol_N(H_n \cup H_{n+1} \cup \dots) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^n} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$

tehát $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} (H_n \cup H_{n+1} \cup \dots)$ 0-HALMAZ

(3) $H = \{x \in \Omega :$ x ∞-sok H_n-nek tagja$\}$

H 0-HALMAZ

(4) $x \in \Omega$ esetén tetsz. $\varepsilon > 0$ mellett

CSAK VÉGES SOK n-RE LEHET $|f_n(x)| \geq \varepsilon$

Megjegyzés ELHHEZ OLYAN Vol_N térfogat-fogalom kell,
amelyhez
a) $\forall$ K kockára $Vol_N(K) = [$GEOM TÉRF$]$
b) Ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunktak és van $Vol_N(A_n)$
akkor $Vol_N(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Vol_N(A_n)$
c) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \setminus$ (0-HALMAZ) valamilyen
$K_1, K_2, \dots$ kockákkal

3) Mikor tudjuk, hogy ha $\Delta e_n = \lambda_n e_n$ $(n = 1, 2, \dots)$
SAJÁTFÜGGV-EKBŐL ÁLLÓ ORTN RSZ-REL

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f | e_n \rangle e_n(x)$ EGY 0-HALMAZ x-eit kivéve,
VALAMILYEN $f \in C(\overline{\Omega})$?

9) $\Omega = [\text{VÉGES INTV}] = [-1,1]$

$\{\frac{1}{2}, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 4\pi t, \sin 4\pi t, \ldots\}$ ORTN RSZ

9') LEGSZEBBEN KOMPLEX - FGV-EKKEL :

$\Omega = [0,1]$-en $\{e^{2\pi i k t} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ORTN RSZ

$$\langle f | g \rangle = \int_{t=0}^{1} f(x) \underbrace{\overline{g(x)}}_{\text{KONJUGÁLT}} \, dx$$

HISZEN $\cos 2\pi k t = \frac{1}{2} e^{2\pi i k t} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i k t}$

$\sin 2\pi k t = \frac{1}{2i} e^{2\pi i k} - \frac{1}{2i} e^{-2\pi i k t}$

<u>Fejér Lipót tétele</u> Legyen $f \in C([0,1])$, $e_k := [e^{2\pi i k t} \leftarrow t]$

$g_n := \sum_{k=-n}^{n} \langle f | e_k \rangle e_k$, $f_n := \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n} g_p$ (EZ VOLT A NAGY HÁZI FELADAT)

EKKOR $\boxed{\max_{t \in [0,1]} |f(t) - f_n(t)| \to 0}$ $(n \to \infty)$,

diákat $\|f - \underbrace{g_n}_{\text{LEGJOBB KÖZELÍTŐ } g_n\text{-el}}\|^2 \leq \|f - \underbrace{f_n}_{\in T_{g_n} = \langle \mathbb{C}e_{-n} + \cdots + \mathbb{C}e_n \rangle}\|^2 \to 0$

AHONNAN : $\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f | e_k \rangle|^2$ és így

$g_n(x) \to f(x)$ egy 0-MÉRTÉKŰ KIVÉTELLEL

R

OLYAN $n_1, n_2, \ldots$ ÉRTÉKET, HOGY $\|f\|^2 - \sum_{k=1} |\langle f | e_k \rangle|^2 \leq 10^{-2}$

BONYOLULTABB FGV-EK FELBONTÁSA

$L^1(\mathbb{R}^N)$, integrálható fgvek

RIESZ-WEYL LEMMA $\Rightarrow$ Ha $f_1, f_2, \dots \in C_0(\mathbb{R}^N)$ és

KORL. HALMAZON KÍVÜL 0

$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$, akkor

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ABSZ KONV EGY 0-HALMAZON KÍVÜL,

SŐT $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx \right)$ IS KONV SZÁMSOROZAT

EZÉRT ELLENTMONDÁSMENTES A KÖV

Def $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)INTEGRÁLHATÓ, HA
$\exists f_1, f_2, \dots \in C_0(\mathbb{R}^N)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x$ 0-HALMAZON KÍVÜL

(EKKOR $\boxed{\int f := \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n}$ JELÖLÉS $L^1(\mathbb{R}^N) = \{$INT. $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ FGV-EK$\}$

[HA $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots$ egy másik ilyen sorozat f-hez,
AKKOR IS $\sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{f}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$]

Tétel (Lebesgue KONV TÉTEL) (1) $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \iff |f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$

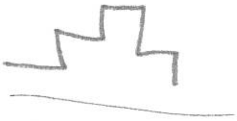
(2*) HA $f_1, f_2, \dots \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\exists g \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ $|f_n| \le g$ $(n = 1, 2, \dots)$

AKKOR $f_n(x) \to f(x)$ EGY 0-HALMAZON KÍVÜL ESETÉN

$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ és $\int f_n \to \int f$

(3) $1_G \in L^1(\mathbb{R}^N)$, ha G KORL. NYITOTT VAGY ZÁRT $\subset \mathbb{R}^N$

Példák RENGETEG L^1-FGV, TÖBB MINT RIEMANN INTH

1) LÉPCSŐS FGV  $f=\sum_j \alpha_j 1_{I_j}$ $I_j = \underbrace{\text{intv} \times \cdots \times \text{intv}}_{N}$

Valójában $L^1(\mathbb{R}^N)$ $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 1_{I_j}$ fgv-ekből áll, $\boxed{\sum_j |\alpha_j| \cdot \mathrm{vol}_N(I_j) < \infty}$

2) 1_S HA S ohlamat, 1_G ha G korl nyílt, 1_F ha F korl zárt

3) Az is, ha F egy k vált. mérhető $F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ fgv t.h.

$F(x_1,\dots,x_k)\le M\cdot(|x_1|+\dots+|x_k|)+c$,

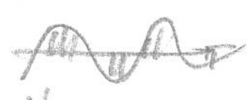
akkor $F(f_1,\dots,f_k)\in L^1(\mathbb{R}^N) \Leftarrow f_1,\dots,f_k \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Pl: $\max\{f_1,f_2\}$; f_1,f_2 korl. esetén $f_1\cdot f_2$ $(f_1,f_2\in L^1)$

4) $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ nyílt / zárt $L^1(\Omega):=\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ f\cup\{0\}\in L^1(\mathbb{R}^N)\}$

$\Omega=\{x: f(x)>0\}$ $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 

5) AMIKOR NEM L^1-beli egy „jó" FGV

a) $\int_{[-n,n]^N}|f|\to\infty$ esetén Pl: $\sin t$ 

$\frac{1}{t}$ 

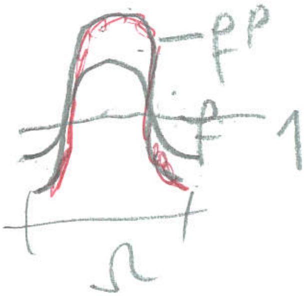
b) VAN OLYAN $Z\subset[0,1]$, hogy $1_Z\notin L^1(\mathbb{R}^N)$

Pl: Zermelo fgv: MAX OLYAN HALMAZ, HOGY BÁRMELY KÉT PONTJÁNAK KÜLÖNBSÉGE IRRAC

$L^2(\Omega)$

Def $L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : |f|^p \cup \{0\} \in L^1(\Omega)\}$ $\quad \underline{p \geq 1}$

Tétel Ω korl. $\Rightarrow L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$



biz $|f^p| \geq \begin{cases} 0 & \text{ha } |f| < 1 \\ |f| & \text{ha } |f| \geq 1 \end{cases}$

$|f| \leq |f|^p + 1$, $\quad f \in L^p(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega |f| \leq \int_\Omega (|f|^p + 1) =$

$= \mathrm{Vol}_N(\Omega) + \int_\Omega |f|^p < \infty$

Tétel $f, g \in L^2(\Omega) \Rightarrow f \overset{\pm}{\cdot} g \in L^1(\Omega)$

biz $f, g \in L^2(\Omega) \Rightarrow |f|^2, |g|^2 \in L^1(\Omega)$

$|f| + |g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}$

$\int_\Omega (|f| + |g|)^2 \leq 4 \int_\Omega \max\{|f|^2, |g|^2\} \leq 4 \int_\Omega (|f|^2 + |g|^2) < \infty$

$|f \pm g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \underline{f \pm g \in L^2(\Omega)}$ ↴ lin. tér

$|f| \cdot |g| = \frac{(|f| + |g|)^2 - (|f| - |g|)^2}{4} \in L^1(\Omega)$

Helyebb Tétel $L^p(\Omega) = \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h 1_{I_h} : \sum_{h=1}^{\infty} \overbrace{|\alpha_h| \mathrm{Vol}_N(I_h)^{1/p}}^{\|\alpha_h 1_{I_h}\|_p} < \infty \right\}$

Def ($L^2(\Omega)$ geometriája) f, g skalárszorzat ill. f hossza

$\langle f | g \rangle := \int_\Omega f g$, $\quad \|f\| := \langle f | f \rangle^{1/2}$

Értelmezési gesok $\Rightarrow \langle f|g\rangle = \|f\|\cdot\|g\| \cos\varphi \quad \exists \varphi \in \mathbb{R}$
$|\cdot| < 1$

$|\langle f|g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$ Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

$e_1, e_2, \ldots$ ORTN RSZ $L^2(\Omega)$-ben $\Rightarrow$

$$f - \sum_{k=1}^{m} \langle f|e_k\rangle e_k \perp e_1, \ldots, e_m$$

$$\|f\|^2 \ge \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2 \quad \text{Bessel-egyenlőtlenség}$$

HA $e_1, e_2, \ldots$ MAX ORTN RSZ, AKKOR

$$\forall f \in L^2(\Omega) \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2,$$

DE NEM BIZTOS, HOGY $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e_k(x) = f(x)$

EGY 0-HALMAZON kívül

<u>Tétel</u> (CARLESON, 1966) $\forall f \in L^2[0,1]$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos 2\pi k t + b_k \sin 2\pi k t] + a_0,$$

t-ben EGY 0-HALMAZON kívül,

ahol $a_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} f$, $a_k = \int_0^1 f \cdot c_k$, $b_k = \int_0^1 f \cdot s_k$

$c_k : t \mapsto \cos 2\pi k t$, $s_k : t \mapsto \sin 2\pi k t$

<u>Másik</u> KOMPLEX FORMA:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{2\pi i n t}$$ t-BEN EGY 0-HALMAZON kívül

$$c_n := \int_0^1 f(\tau) e^{-2\pi i n \tau}\, d\tau$$