ZITSI 14

HULLÁMOK N-DIM-BAN, FOURIER MÓDSZEREK

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ NYITOTT HALMAZ $\neq \emptyset$

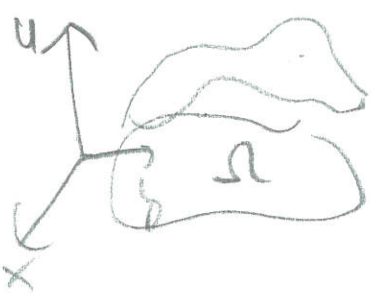
Ω ALAKÚ HOMOGÉN TEST

$H \subset \Omega \Rightarrow m_H = \underline{\rho \cdot Vol_N(H)}$

↑ TÖMEG H-ban

REZGÉS $\underline{u(x,t)}$ KITÉRÉSSEL az $x \in \Omega$ helyen t időben

Pl $N=2$ MEMBRÁN



T feszítő erő

$u(t,H)$

RÖGZ. IDŐPILLANAT

Az első 1D módszer ($F=ma$ -ből) körülményes

Fiz háttér

VARIÁCIÓS ELV

Tf. egy MECHANIKAI RSZ mozgási energiája

$K = K(\dot q)$ a q PARAMÉTEREKKEL LEÍRT HELYZETEK

$K(\dot q) \approx \sum \{ \frac{1}{2} \text{tömegpont} \cdot (\text{sebesség})^2 \}$

$\frac{dq}{dt}$

A MOZGÁST EGY U POTENCIÁLIS ENERGIÁBÓL KAPJUK.

$$U = U(q)$$

<u>Variációs elv</u> Tekintsük az összes lehetséges mozgásait a rendszernek! Egy ilyen leírás $t \mapsto q(t)$

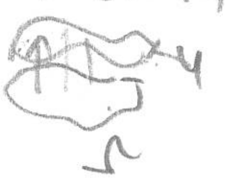
[a t IDŐBEN a q PARAMÉTEREKKEL LEÍRT ÁLLAPOT $q(t)$]

AZ IGAZI MOZGÁSNAK (ez q^*)

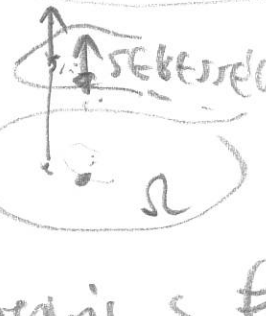
$$\int_{t=t_0}^{t_1} \big(K(\dot q(t)) - U(q(t))\big)\,dt \to \mathrm{MIN}_q$$

<u>Megj.</u> „A mi világunk minden elképzelhető világ közül a legjobb" LEIBNIZ ($\leftrightarrow$ Voltaire: Candide)

A MI ESETÜNKBEN

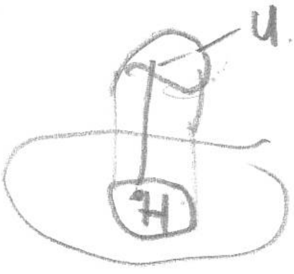


$$\boxed{K = \int_{x\in\Omega} \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx}$$



SEBESSÉG $= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \perp \Omega$-ra („függőleges")

A pot. energia a feszültségből jön



$T \cdot$ (Ω megnyújtottsága ÁLTAL) $=$

$$= T \cdot \int_{(x_1,\dots,x_N)\in\Omega} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2}\, dx_1 \dots dx_N$$

LINEARIZÁLÁS:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2\right]$$

$$\int_{t=t_0}^{t_1}[K(u)-U(u)]\,dt \approx$$

$$\approx \int_{t=t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\Big[\varrho\cdot\underbrace{\int_{x\in\Omega}}_{(x_1,\dots,x_N)\ N\text{-szeres}\ \int}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - T\cdot\int_{x\in\Omega}\Big[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2\Big]\underbrace{dx}_{dx_1\dots dx_N}\Big]dt$$

MEG KELL KERESNI AZT AZ $\Omega\times[t_0,t_1]\ni(x,t)\mapsto u(x,t)$ FGV-T, AMELYRE EZ A LEGKISEBB AZ ADOTT KIINDULÁSI FELTÉTELEK MELLETT

Tf. u a legjobb

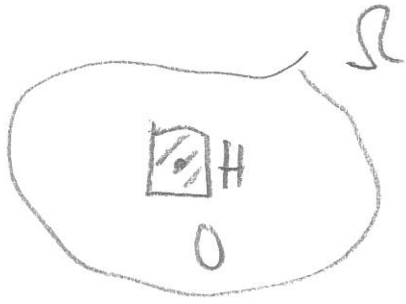
legyen $v=v(x,t)$ tetsz.

Az $u+\delta\cdot v$ $(\delta\in\mathbb{R})$ fgv-ek között $\delta=0$-RA MIN

$$0=\frac{d}{d\delta}\Big|_{\delta=0}\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega}\left[\varrho\cdot\left(\frac{\partial(u+\delta\cdot v)}{\partial t}\right)^2-T\cdot\left(1+\left(\frac{\partial(u+\delta\cdot v)}{\partial x_1}\right)^2+\dots\right)\right]dx\,dt$$

$$0=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega}\left[\varrho\cdot 2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}-T\cdot 2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial v}{\partial x_N}\right)\right]dx\,dt$$

Tekintsünk olyan v FGV-eket, hogy



$v(x,t)=0$ valahányszor $x\in\Omega\setminus H$, $t\in\mathbb{R}\setminus[t_0,t_1]$

$\exists\, H=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_N,b_N]$ kocka, $H\subset\Omega$

Észrevétel: 1) $$0=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega}\left[s\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}-T\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]dx\,dt=$$

$$=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x_1=a_1}^{b_1}\dots\int_{x_N=a_N}^{b_N}\left[\ \right]_{\substack{(x,t)=(x_1,\dots,x_N,t)\\ \in H\times[\,]}}dx_N\dots dx_1\,dt$$

2) Parc. $\int$ $\Rightarrow$ FIX $x=(x_1,\dots,x_N)\in\Omega$ mellett

$$\int_{t=t_0}^{t_1}\underset{\text{DIFF}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\underset{\int}{\frac{\partial v}{\partial t}}\Bigg|_{(x,t)\in H\times[\,]}dt=\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{(x,t_1)}\underbrace{v(x,t_1)}_{0}-\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{(t_0,x)}\underbrace{v(x,t_0)}_{0}-$$

$$-\int_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}v\Bigg|_{(x,t)}dt$$

3) Parc. $\int$ $\Rightarrow$ FIX i, $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N,t$ mellett

$$\int_{x_i=a_i}^{b_i}\underset{\text{DIFF}}{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\underset{\int}{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\Bigg|_{\substack{(x,t)\\ (x_1,\dots,x_N,t)}}dx_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\underbrace{v(x_1,\dots,b_i,\dots,x_N)}_{0}-0-\int_{x_i=a_i}^{b_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}v\Bigg|_{(x,t)}dx_i$$

1)+2)+3) $\Rightarrow$

$$0=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega}\left[\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}-T\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]dx\,dt=$$

$$=\int_{t=t_1}^{t_1}\int_{x\in H}\left[\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot v-T\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}v\right]dx\,dt=$$

$$=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega}\left[\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right]\cdot v\,dx\,dt$$

HA v ELTŰNIK EGY Ω-beli KOCKÁN KÍVÜL

__Tétel__ (Raymond du Bois lemma) HA $\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega} f\cdot v\,dx\,dt=0$

valahányszor v eltűnik egy Ω-beli kockán kívül, $\Rightarrow f\equiv 0$

__biz__ f FOLYT, tf. $f(x_*)\neq 0$ pl. $f(x_*)>0$.

Ekkor $\exists H$ kocka x_* körül $f(H)>0$.

Vegyünk olyan v-t, hogy $v(H,(t_0,t_1))>0$ de

$v(x,t)=0$ $x\notin H$, $t\notin(t_0,t_1)$ esetén

Pl $v(x,t)=[x$ TÁVOLSÁGA ∂H-tól$]\cdot[t$, TÁV $\partial(t_0,t_1)$-től$]$

Ekkor $\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in\Omega} f\cdot v\,dx\,dt=\int_{t=t_0}^{t_1}\int_{x\in H}$ POZ FGV FOLYT $dx\,dt>0$

Konklúzió

$$0=\varrho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta_x u \quad \text{ahol } c^2=\frac{T}{\varrho}}$$ HULLÁM-EGYENLET

Állóhullámok

1D-ben is ÉRDEKES

$u:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ állóhullám-fv :

$\boxed{u(x,t)=f(x)\cdot g(t)}$ $(x\in\Omega, t\in\mathbb{R})$ $\exists f,g$ FOLYT

1D alappélda TISZTA ZENEI HANGOK

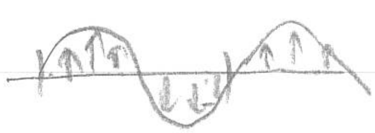
$$u(x,t)=\sin\left(2\pi\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\cdot\sin\left(2\pi\nu(t-t_0)\right)$$

λ HULLÁMHOSSZ, ν FREKVENCIA

$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -(2\pi\nu)^2\cdot u=c^2\cdot\left(-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 u\right)$$

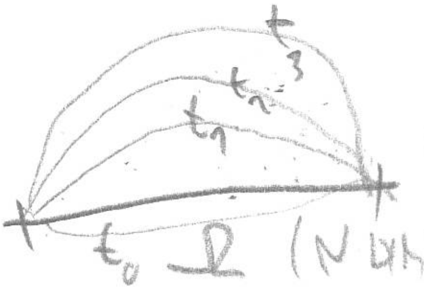
$\sin''=-\sin$



$$\frac{1}{\nu}=\frac{\lambda}{c}$$ 1 IDŐEGYSÉG ALATTI REZGÉSEK

c HANGSEB.

Ált. kép



$u(\cdot,t_k)$, $k=0,\dots,3$

Tér-idő szeparálás a hullámegyenletre

$u(x,t) = f(x)\,g(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x u$ | $g(t) \sim$ hossz; $f(x) \sim 1$ (ALAK)

$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\,g'(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} f(x)\,g'(t) = f(x)\,g''(t)$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \cdot g(t)$ $/\sum_i$

$$\boxed{f(x)\,g''(t) = [\Delta f(x)] \cdot g(t)\,c^2}$$

SZEPARÁL: $\boxed{\frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \cdot c^2}$

(*) CSAK t-TŐL CSAK x-TŐL FÜGG $\Rightarrow$ CONST

Emlékeztető: $g(t) = \sin(ct), \cos(ct)$ sőt e^{ict} teljesíti az
$g''(t) - c^2 g(t) = 0$ DIFF EGY-et,
$g(t) = \sinh(ct), \cosh(ct)$ (sőt e^{ct}) teljesíti
$g''(t) + c^2 g(t) = 0$ DIFF EGY

Elmélet: Egy 2-od rendű [n-edrendű is hasonló] DIFF EGY ADOTT $\underline{g(0), g'(0)}$ ($g^{(n-1)}(0)$) kezdőértékek mellett EGYÉRTELMŰEN MEGOLDHATÓ

$\Rightarrow$ $g(t) = A\cos(ct) + B\sin(ct)$; $C<0$ esetén
$g(t) = A\cosh(ct) + B\sinh(ct)$ $C>0$ esetén
$\hookrightarrow$ NEM KORLÁTOS $\Rightarrow \infty$ POT ENERG

$$f(x)\,g''(t) = [\Delta f(x)]\cdot g(t)\cdot(-\omega^2) \qquad C=-\omega^2<0$$

$$g(t) = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t) = \bar{A}\cdot\sin(\omega(t-t_0))$$

↑ HF $\bar{A}, t_0 = ?$

ω dimenziója $\frac{1}{\text{idő}}$, jelentése g PERIOD $T=\frac{2\pi}{c}$ – RE

Def $\nu := \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ = {HÁNY PERIOD 1 IDŐ ALATT} = FREKVENCIA

$$\boxed{g(t) = \bar{A}\cdot\sin(\underbrace{2\pi\nu}_{\omega}(t-t_0))}$$

ω KÖRFREKVENCIA

(**) $$\boxed{\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -\left[\frac{2\pi}{Tc}\right]^2}$$ $\lambda := Tc$ hullámhossz

Szeparált alapmegoldások

(**) – KAN $f(x) = f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)$.

$$f_1''(x_1)f_2(x_2)\cdots f_N(x_N)+\dots+f_1(x_1)\cdots f_{N-1}(x_{N-1})f_N''(x_N) =$$

$$= f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_{N-1}(x_{N-1})f_N(x_N)\cdot\omega^2$$ / : ZUPB UO

$$\boxed{\frac{f_1''(x_1)}{f_1(x_1)}+\dots+\frac{f_N''(x_N)}{f_N(x_N)} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

Lemma HA $F_1(x_1)+\dots+F_N(x_N)\equiv \text{const}$, AKKOR

$$F_1(x_1)\equiv \text{const}_1, \dots, F_N(x_N)\equiv \text{const}_N$$

Biz. $x_1, \dots, x_N$ FELCSERÉLHETŐ $\Rightarrow$ Elég: $F_1(x_1')=F_1(x_1'')$ biz.

$$F_1(x_1')-F_1(x_1'')=[F_1(x_1')+F_2(x_2)+\dots+F_N(x_N)]-[F_1(x_1'')+F_2(x_2)+\dots+F_N(x_N)]=$$
$$=\text{const}-\text{const}=0$$

Köv.:

$$\underline{f_i''(x_i)=c_i f_i(x_i)} \qquad (i=1,\dots,N)$$

$$f_i(x_i)=\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}(x_i-x_{i0})\right) \qquad \lambda_i \text{ PERIÓDUSHOSSZ}$$

<u>HULLÁMHOSSZ</u>

[mint g-nél] $\qquad c_i=\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)^2$

$$-\omega^2=\frac{g''}{g}=\left(\frac{f_1''}{f}+\dots+\frac{f_N''}{f}\right)c^2 \qquad /:(-c^2)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{2\pi}{Tc}\right)^2=\frac{\omega^2}{c^2}=\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{2\pi}{\lambda_N}\right)^2$$

T periódusidő, λ hullámhossz $=cT$

$$(***)\quad \boxed{\frac{1}{c^2T^2}=\frac{1}{\lambda_1^2}+\dots+\frac{1}{\lambda_N^2}} \qquad \text{PERIÓDUSIDŐ–}$$

IRÁNYHULLÁMHOSSZAK KAPCSOLAT

Tétel $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u$ SZEPARÁLT ÁLLÓHULLÁMAI $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ felett AZ

$$u(x,t)=\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{T_0}c}(t-t_0)\right)\cdot\prod_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}(x-x_i)\right) \quad \text{FGVEK}$$

AMOL $(***)$ TELJESÜL