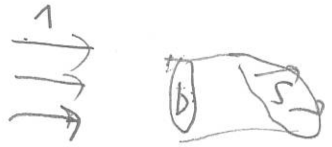
Példa (koordrendszerek összehasonlítása)

ÁTFOLYÁS $\frac{1}{8}$-GÖMBÖN — egységnyi folyás Z IRÁNYBAN FEL 1

a) Intuíció (GAUSS)



$\Phi[V\ S\text{-en}] = \Phi[V\ D\text{-n}] = ter(D)$

$D = [S \text{ vetülete } xy\text{-síkra}]$ $\quad ter(D) = \frac{\pi}{4}$

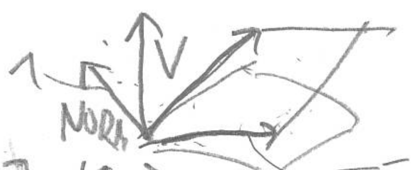
[NINCS PONTOS MATEMATIKAI MODELL, DE JÓ]

b) Klasszikus fizikai közelítés (mgt. "trükkök" nélkül)

$S = \left(z = \sqrt{1-(x^2+y^2)},\ x,y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\right)$ $\quad D = \left(x^2+y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0\right)$

$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left(\leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$

$\Phi = \int_D \langle V, NORM(S)\rangle\, ter(\text{DIFF. PARALLELOGRAMMA}) = \circledast$



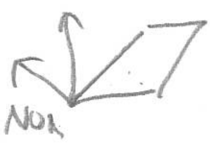
$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} S(x,y)$

$= \int_{(x,y)\in D} \left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y}\right], \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \sqrt{\left\langle \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right\rangle^2}\, d\,ter(x,y) =$

$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} * \, dy\, dx$

MŰKÖDIK MINDEN ESETBEN, DE CSAK NUMERIKUSAN

c) Klasszikus fizikai jobban:



$\left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y}\right], V \right\rangle \cdot \sqrt{\ } = \left|\det\left[\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, V\right]\right|$

$\Phi = \int_D \det\left[\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, V\right] d\,ter(x,y)$

d) DIFFERENCIÁL-FORMA BESZÁLT ALAKJÁT

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \sqrt{1-(\xi^2+\eta^2)} \end{bmatrix}$$

$$\phi = \int_{\tilde{Q}} \left[V_1 \, dy \wedge dz + V_2 \, dz \wedge dx + V_3 \, dx \wedge dy \right] \underset{V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{=}$$

$$= \int_{\tilde{Q}} dx \wedge dy \underset{\substack{x = \xi \\ y = \eta}}{=} \int d\xi \, d\eta = \text{ter}(D) = \underline{\underline{\pi/4}}$$

e) DIFF FORMA C^1 KOCKÁN

$$Q : \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad 0 \le \vartheta, \varphi \le \pi/2$$

$$\phi = \int_Q dx \wedge dy = \int_{\vartheta=0}^{\pi/4} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} [\dots \text{ MP}]$$

MOST NEM KELL, DE $\sqrt{\ }$ NÉLKÜL

Példa $\left(z = \frac{h_1+h_2}{2} + \frac{h_1-h_2}{2} \cdot \frac{xy}{R^2}, \; x^2+y^2 \le 1 \right)$ területe d) szerint

$$\tilde{Q} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ c + \tilde{H} xy \end{bmatrix}, \quad x^2+y^2 \le 1$$

$$\text{TER} = \int_{x^2+y^2 \le 1} \text{Jac}(\tilde{Q}) \, dx\, dy \qquad \tilde{Q}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{H}y & \tilde{H}x \end{bmatrix} \quad \tilde{Q}'^T \tilde{Q}' = \begin{bmatrix} 1+\tilde{H}^2 y^2 & \tilde{H}^2 xy \\ \tilde{H}^2 xy & 1+\tilde{H}^2 x^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jac}\,\tilde{Q} = \left[\det \tilde{Q}'^T \tilde{Q}' \right]^{1/2} = \sqrt{(1+\tilde{H}^2 y^2)(1+\tilde{H}^2 x^2) - \tilde{H}^4 x^2 y^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \tilde{H}^2 (x^2+y^2)}$$

Ezután $x = r\cos\varphi \;\; y = r\sin\varphi$ helyettesítés

KOORDINÁTAREPREZENTÁCIÓ

Gauss „x, y, z nem szent koordináták a térségben
hogyan értjük fel a gömbfelületi geometriát
3. dim nélkül"

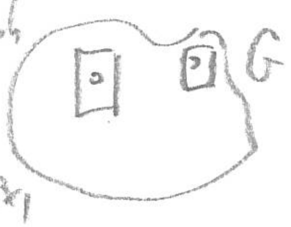
<u>Def</u> S absztrakt halmaz

$x_1, \dots, x_N : S \to \mathbb{R}$ fgv-ek

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ koordinátázás S-en ha $p \neq q \Rightarrow S(p) \neq S(q)$

X nyitott koord, ha $X : S \leftrightarrow G$ <u>nyitott</u> $\subset \mathbb{R}^N$

lényege: differenciálható koord.-kal lehetővé tesz



$f : S \to \mathbb{R}$ fgv

Ha $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ koord S-en,

$f = FGV(x_1, \dots, x_N)$ („fizikus: $f = f(x_1, \dots, x_N)$")

Jelentősége: f számokkal való ábrázolása

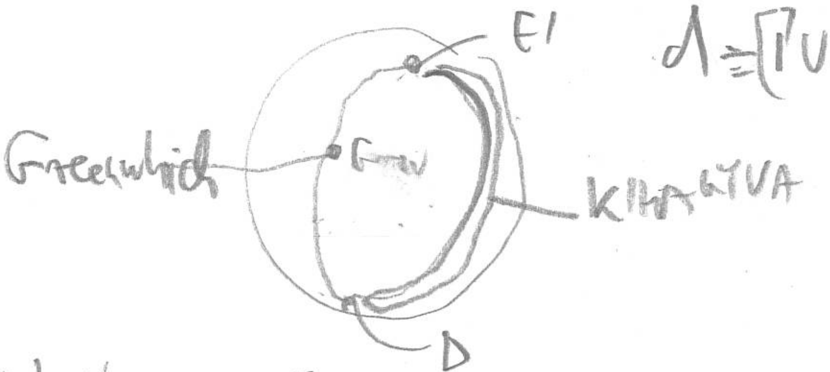
Koordinátázás ~ számokba kódoljuk a világot,
és számítógéppel manipuláljuk

<u>Klasszikus példa</u>: euklideszi sík S, d távolság fgv

Axiómák 1) $\exists\, x, y : S \to \mathbb{R}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : S \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

2) $d(p,q) = \sqrt{(x(p)-x(q))^2 + (y(p)-y(q))^2}$

<u>Példa 2:</u> [FÖLDGÖMB] \ {[[illegible]-határ vonal]} = S



$d \doteq$ [ÍV-TÁVOLSÁG]

Axiómák: 1) $\exists\, \vartheta, \varphi : S \to \mathbb{R}$ <u>GPS-koord.</u>

$$P \doteq \begin{bmatrix}\vartheta\\ \varphi\end{bmatrix} : S \leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$$

2) $d(p,q) =$ [p, q közti FŐKÖRÍV HOSSZA]

Bonyolult képlet

A geometriát a <u>d</u> TÁVOLSÁGFGV-nyel és a koordinátákkal írjuk le. Pl. ebben a SÍKBAN [EGYENES SZAKASZ] = [2 pont közti legrövidebb görbe pontjai]

<u>Függvény parciális diff koordináták szerint</u>

$X : S \leftrightarrow G$ nyitott koord. $\quad X = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}$

$f : S \to \mathbb{R}$ fgv

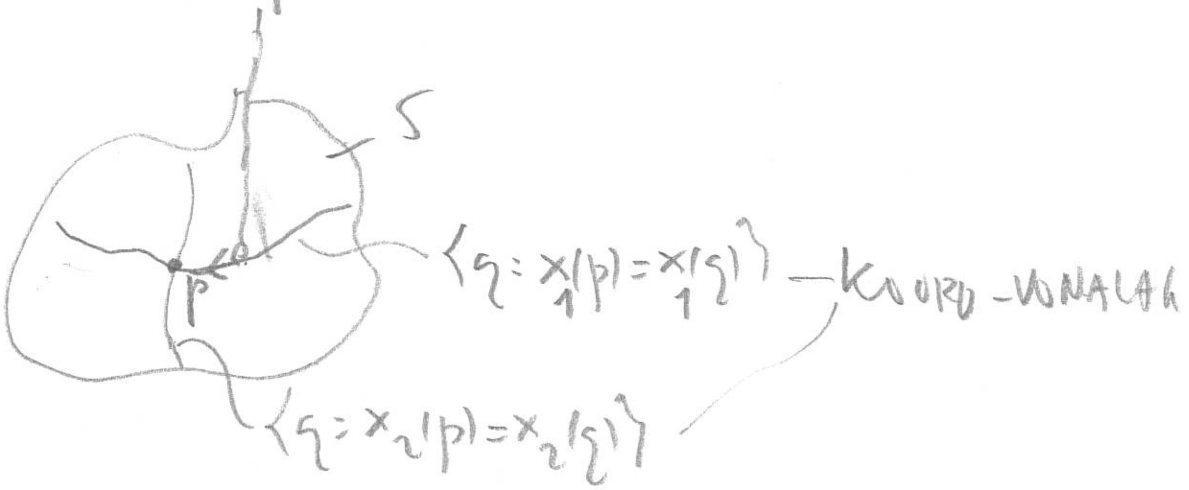
<u>def</u> $\dfrac{\partial f}{\partial X} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N}\right]$, ahol

$$\begin{array}{r} \\ i \to \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : S \to \mathbb{R}$ fgv

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : p \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(X^{-1}(X(p) + t e_i)) - f(p)}{t}$$

$X^{-1}(X(p)+te_i)$ JELENTÉSE



$$X^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix} = \left[\text{AZ A PONT, AMELYNEK KOORDINÁTÁI } \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}\right]$$

<u>Jelölés</u> $\;{}^{X}f = [f \text{ reprezentálója az } X \text{ koordinátákban}] =$

$$= f\circ X^{-1} : \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix} \mapsto f\left(\text{az } \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix} \text{ X-koord pont}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left({}^{X}f \text{ deriváltja az } x_i \text{ változó szerint}\right)$$
VAGY i-EDIK VÁLTOZÓ SZERINT

<u>Példa</u>: $\frac{\partial}{\partial x_2} x_1^5 x_2^6 x_3^7 = 6 x_1^5 x_2^5 x_3^7$

<u>Tétel</u> $\boxed{\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial Y}}$, ha $X, Y: S \to \mathbb{R}^N$ koord

$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)$ ∃ (L-DEF $\forall i,j$ $\forall p\in S$ pontban

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial Y}\\ \vdots\\ \frac{\partial x_N}{\partial Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N}\end{bmatrix}$$

FONTOS $\frac{\partial f}{\partial x}$ ÖNMAGÁBAN NEM ÉRTELMES
(függ a többi koordinátától)

Példa: $S = \mathbb{R}^2$ $\quad f: \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \mapsto \xi^2+\eta^2$

1) $X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ $\quad x: \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \mapsto \xi$ $\quad y: \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \mapsto \eta$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\quad p = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$-nél $\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0}$

2) $Y = \begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}$ $\quad u = x+y$ $\quad x: \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \mapsto \xi$ $\quad u: \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \mapsto \xi+\eta$

$${}^{Y}f = {}^{X}(x^2+y^2) \underset{y=u-x}{=} {}^{Y}\left(x^2+(u-x)^2\right) = 2x^2+u^2-2ux$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2u$ $\quad \underline{\frac{\partial f}{\partial x}(p)} = 4\cdot 0 - 2\cdot 1 = \underline{-2}$ NEM UAZ, MINT 1)

Példa: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ polárkoord rsz-ben

$X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix}r\\ \varphi\end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\end{matrix}$

$$\frac{\partial X}{\partial P} = \begin{bmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{bmatrix}$$