SVD és főtengely-transzformáció

Emlékeztető. Ha $A \in \mathrm{I\!R}^{N\times N}$ invertálható mátrix, akkor

$$\begin{aligned} &A = F\Lambda E^{\mathrm{T}}, \quad \textit{ahol} \\ &F = \big[f_1, \dots, f_N\big] \in \mathrm{Ort}(N, \mathrm{I\!R}), \\ &\Lambda = \mathrm{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_N\big), \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0, \\ &E = \big[e_1, \dots, e_N\big] \in \mathrm{Ort}(N, \mathrm{I\!R}). \end{aligned}$$

Konstrukció:

$$\begin{aligned} &e_1 : \quad \|e_1\|^2 = \langle e_1|e_2\rangle = 1, \quad \|Ae_1\| \;\; MAX, \\ &\lambda_1 := \|Ae_1\|, \quad f_1 = Ae_1/\lambda_1. \end{aligned}$$

Ha $(e_1, \lambda_1, f_1), \dots, (e_k, \lambda_k, f_k)$ adott,

$$\begin{aligned} &e_{k+1} : \quad e_{k+1} \perp e_1, \dots, e_k, \quad \|e_{k+1}\| = 1, \quad \|Ae_{k+1}\| \;\; MAX, \\ &\lambda_{k+1} := \|Ae_{k+1}\|, \quad f_{k+1} = Ae_{k+1}/\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

Mindegyik lépésnél

$$Ae_{k+1} \perp Af \quad \text{valahányszor } f \perp e_1, \dots e_k.$$

Lemma. *Ha $A = A^{\mathrm{T}}$ és $\langle Ax|x\rangle > 0$ $(0 \neq x \in \mathrm{I\!R}^N)$, akkor $\lambda_k > 0$ és $Ae_k = \lambda_k e_k$.*

Bizonyítás. Elég csak $k = 1$ esete. Ekkor

$$Ae_1 = \lambda e_1 + f \quad \exists\, f \perp e_1,\ \lambda \in \mathrm{I\!R}.$$

Itt $\lambda > 0$, mivel feltevés szerint

$$0 < \langle Ae_1|e_1\rangle = \langle \lambda e_1 + f|e_1\rangle = \lambda\langle e_1|e_1\rangle = \lambda.$$

Tudjuk: $Ae_1 \perp Af$, azaz

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ae_1|Af\rangle = \langle \lambda e_1 + f|Af\rangle = \langle A^{\mathrm{T}}(\lambda e_1 + f)|f\rangle = \langle A(\lambda e_1 + f)|f\rangle = \lambda\langle Ae_1 + Af|f\rangle = \\ &= \langle \lambda^2 e_1 + \lambda f + Af|f\rangle = \lambda\|f\|^2 + \langle Af|f\rangle. \end{aligned}$$

Mivel $\lambda > 0$ és $\langle Af|f\rangle \geq 0$, ez csak úgy lehet, ha $\|f\|^2 = 0$, azaz ha $f = 0$ és így $Ae_1 = \lambda e_1$.

Következmény. *Ha $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathrm{I\!R}^{N\times N}$, akkor*

$$B = E\,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)E^{\mathrm{T}} \quad \exists\, E \in \mathrm{Ort}(N, \mathrm{I\!R}),\ \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \in \mathrm{I\!R}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\mu := \|B\| = \max_{\|x\|=1} \|Bx\|, \quad A := B + MI.$$

Mivel mindig $|\langle Bx|x\rangle| \leq \|B\| \cdot \|x\| \leq \mu\langle x|x\rangle = \mu\|x\|^2$, az

$$A := B + (\mu + 1)I$$

mátrixra alkalmazhatjuk a Lemmát. Valóban: $A = A^{\mathrm{T}}$ és $\langle Ax|x\rangle = \langle Bx|x\rangle + (\mu+1)\|x\|^2 \geq -\mu\|x\|^2 + (\mu + 1)\|x\|^2 > 0$ ha $x \neq 0$. Innen

$$B = A - \mu I = E\Lambda E^{\mathrm{T}} - \mu I = E\,(\Lambda - \mu I)E^{\mathrm{T}} = E\,\mathrm{diag}(\lambda_1 - \mu, \dots, \lambda_N - \mu)\,E^{\mathrm{T}}.$$