Előszó

Ez a jegyzet elsősorban a Szegedi Tudományegyetem molekuláris bionika szakos hallgatóinak tartott *Kalkulus I.* és a biomérnök hallgatóknak tartott *Matematika 1.* című kurzus gyakorlatához készült, ugyanakkor jól használható az informatikus hallgatók *Kalkulus I.* gyakorlatához is.

A hallgatók a tárgy elsajátításához szükséges előismeretek meglétét ellenőrizhetik a

http://www.math.u-szeged.hu/~fulopv/eloism.pdf

feladatainak megoldásával. A helyes eredményeket a

youtube.com/playlist?list=PLm_pNdtN9Bap82U1dvkOT1uUX ovYNnsUl

linken láthatják.

A példatár a gyakorlati órák anyagát követve 13 fejezetet tartalmaz. A fejezetek mindegyike 3 részből áll.

A *Házi feladatok* részben a gyakorlat anyagát ismételjük át, mélyítjük el, a feladatok megoldását részletesen ismertetjük.

A *Kvízek* rész lehetővé teszi a felkészültség ellenőrzését. A megoldás megadásával az elvárt részletességet hangsúlyozzuk.

A *További gyakorló feladatok* részben az eddigiekkel azonos nehézségű feladatok szerepelnek, de itt már csak a végeredményt adjuk meg.

A példatár nem tartalmaz a gyakorlat anyagán túlmutató, gondolkodtatóbb és összetettebb példákat, ezért az érdeklődőknek további tanulásra ajánljuk az alábbi feladatgyűjteményeket, tankönyvet, illetve videós segédanyagot:

1. Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, Szeged, Polygon, 2017.
2. Németh József, Németh Zoltán: Analízis I. feladatgyűjtemény, Szeged, Polygon, 2008.
3. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: Thomas–féle Kalkulus, Budapest, Typotex, 2006.
4. http://www.math.u-szeged.hu/~szbtmsz/vm1k1/vm1k1.html

Ezúton is köszönöm kollégáim Bogya Norbert, Tekeli Tamás, Szilas László és Dr. Szabó Tamás segítségét.

Szeged, 2019. január

Fülöp Vanda

Tartalomjegyzék

1. óra

Értelmezési tartomány, polinomosztás, elemi törtekre bontás

Házi feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk számegyenesen a következő függvények értelmezési tartományát.

(a) $\dfrac{2^x}{x^2+x}$

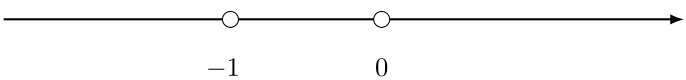
Megoldás. Az értelmezési tartomány megadásakor (kikötés vizsgálat) három dologra kell figyelnünk: törtre, négyzetgyökre és logaritmusra.

Egy tört nevezője nem lehet nulla, így ebben az esetben

$$\begin{aligned} x^2 + x &\neq 0 \\ x(x+1) &\neq 0\,, \end{aligned}$$

ahonnan

$$x \neq 0 \quad \text{és} \quad x \neq -1\,.$$



(b) $\sqrt{2x+1}$

Megoldás. Négyzetgyökét csak nemnegatív kifejezésnek vehetjük, tehát

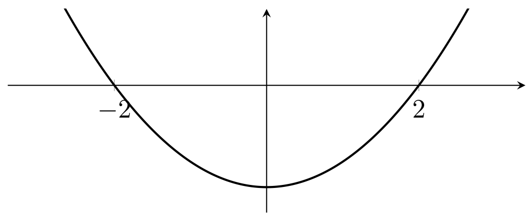
$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(c) $\log_2(x^2-4)$

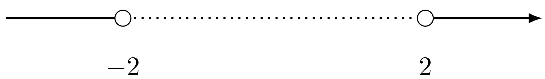
Megoldás. Logaritmusát csak pozitív kifejezésnek vehetjük, ezért

$$x^2-4>0\,.$$

Az $f(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$ parabolát ábrázolva



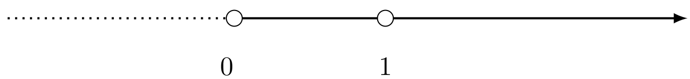
leolvasható az egyenlőtlenség megoldása: $x>2$ vagy $x<-2$.



(d) $\dfrac{\sin x}{x\log_{1/3} x}$

Megoldás. Figyelnünk kell a törtre és a logaritmusra is, azaz

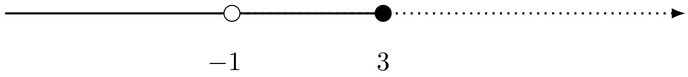
$$\begin{aligned} x\log_{1/3} x \neq 0 \qquad &\text{és} \qquad x>0\\ x\neq 0\,,\quad \log_{1/3} x\neq 0 \qquad &\text{és} \qquad x>0\\ x\neq 0\,,\quad x\neq 1 \qquad &\text{és} \qquad x>0\,. \end{aligned}$$



(e) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^3+1}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} 3-x\geq 0 \qquad &\text{és} \qquad x^3+1\neq 0\\ 3\geq x \qquad &\text{és} \qquad x^3\neq -1\\ 3\geq x \qquad &\text{és} \qquad x\neq -1\,. \end{aligned}$$



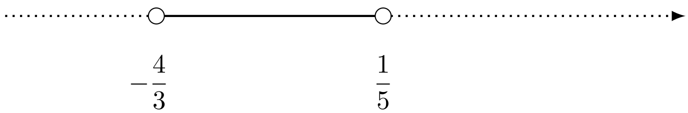
(f) $\dfrac{\log_3(3x+4)}{\sqrt{1-5x}}$

Megoldás.

$$\begin{array}{rcrcl} 3x+4>0 & \text{és} & \sqrt{1-5x}\neq 0 & \text{és} & 1-5x\geq 0 \\ x>-4/3 & \text{és} & 1-5x\neq 0 & \text{és} & 1/5\geq x \\ x>-4/3 & \text{és} & 1/5\neq x & \text{és} & 1/5\geq x\,. \end{array}$$

Összefoglalva:

$$-4/3<x<1/5\,.$$



2. Feladat. A maradékos osztás ismétlése után végezzünk polinomosztást.

(a) $5732:37$

Megoldás. A maradékos osztás alapján

$$\begin{array}{l} 57'3'2' : 37 = 154 \\ 203 \\ 182 \\ 34 \end{array}$$

ahonnan

$$\frac{5732}{37}=154+\frac{34}{37}\,.$$

(b) $(x^2+5x+2):(x+2)$

Megoldás. A polinomosztás hasonlóan történik:

$$\begin{array}{l} (x^2+5x+2):(x+2)=x+3 \\ -(x^2+2x) \\ \phantom{-(x^2+{}}3x+2 \\ -(3x+6) \\ -4 \end{array}$$

alapján

$$\frac{x^2+5x+2}{x+2} = x+3-\frac{4}{x+2}\,.$$

(c) $(x^3-x+1):(x-1)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
&(x^3-x+1):(x-1) = x^2+x\\
-&(x^3-x^2)\\
&\qquad x^2-x+1\\
&\quad -(x^2-x)\\
&\qquad\qquad +1
\end{aligned}$$

alapján

$$\frac{x^3-x+1}{x-1} = x^2+x+\frac{1}{x-1}\,.$$

(d) $(3x^3-x^2-x-1):(x-1)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
&(3x^3-x^2-x-1):(x-1) = 3x^2+2x+1\\
-&(3x^3-3x^2)\\
&\qquad 2x^2-x-1\\
&\quad -(2x^2-2x)\\
&\qquad\qquad x-1\\
&\qquad\quad -(x-1)\\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

alapján

$$\frac{3x^3-x^2-x-1}{x-1} = 3x^2+2x+1\,.$$

(e) $(x^5-3x^3+x^2+4x+1):(x^2-2x+3)$

Megoldás.

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^5-3x^3+x^2+4x+1):(x^2-2x+3)=x^3+2x^2-2x-9\\
-(x^5-2x^4+3x^3)\\
\qquad\quad 2x^4-6x^3+x^2+4x+1\\
\qquad -(2x^4-4x^3+6x^2)\\
\qquad\qquad\quad -2x^3-5x^2+4x+1\\
\qquad\qquad -(-2x^3+4x^2-6x)\\
\qquad\qquad\qquad\quad -9x^2+10x+1\\
\qquad\qquad\qquad -(-9x^2+18x-27)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -8x+28
\end{array}
$$

alapján

$$\frac{x^5-3x^3+x^2+4x+1}{x^2-2x+3}=x^3+2x^2-2x-9+\frac{-8x+28}{x^2-2x+3}\,.$$

3. Feladat. Bontsuk elemi törtekre az alábbi törtfüggvényeket.

(a) $\dfrac{5}{(x-1)(x+3)}$

Megoldás. A tört nevezője két különböző elsőfokú tényező szorzata, így a felbontás:

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\,.$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}\,.$$

Tehát

$$5=A(x+3)+B(x-1)\,.$$

Az A és B paraméterek meghatározása történhet a nevező, $(x-1)(x+3)$ gyökei, $x=1$ és $x=-3$ helyettesítésével:

Az $x=1$ helyettesítésével kapjuk, hogy

$$5=A\cdot 4\,,\quad \text{ahonnan}\quad A=\frac{5}{4}\,.$$

Az $x=-3$ helyettesítéssel írhatjuk, hogy

$$5=B\cdot(-4)\,,\quad \text{ahonnan}\quad B=-\frac{5}{4}\,.$$

Így
$$\frac{5}{(x-1)(x+3)} = \frac{5/4}{x-1} + \frac{-5/4}{x+3} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+3}\,.$$

(b) $\dfrac{3+x}{(2x+5)(x+4)}$

Megoldás.
$$\frac{3+x}{(2x+5)(x+4)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(2x+5)}{(2x+5)(x+4)}\,.$$

Tehát
$$3+x = A(x+4)+B(2x+5)\,.$$

Az $x=-5/2$ helyettesítésével kapjuk, hogy
$$\frac{1}{2} = A\cdot\frac{3}{2}\,,\quad \text{ahonnan}\quad A=\frac{1}{3}\,.$$

Az $x=-4$ helyettesítésével
$$-1 = B\cdot(-3)\,,\quad \text{ahonnan}\quad B=\frac{1}{3}$$

adódik. Így
$$\frac{3+x}{(2x+5)(x+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2x+5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+4}\,.$$

(c) $\dfrac{2x-1}{x-x^2}$

Megoldás. Ekkor
$$\frac{2x-1}{x-x^2} = \frac{2x-1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)}\,.$$

alapján
$$2x-1 = A(1-x)+Bx\,.$$

Az $x=0$ helyettesítésével
$$-1 = A\,,$$

az $x=1$ helyettesítéssel
$$1 = B\,.$$

Így
$$\frac{2x-1}{x-x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\,.$$

(d) $\dfrac{2}{x(x+2)(x-3)}$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x(x+2)(x-3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} \\ &= \frac{A(x+2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-3)} .\end{aligned}$$

Tehát

$$2 = A(x+2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+2) .$$

Ha $x = 0$, akkor $2 = A \cdot (-6)$, ahonnan $A = -\dfrac{1}{3}$,

ha $x = -2$, akkor $2 = B \cdot 10$, azaz $B = \dfrac{1}{5}$,

ha $x = 3$, akkor $2 = C \cdot 15$, $C = \dfrac{2}{15}$.

Azaz

$$\frac{2}{x(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{x-3} .$$

(e) $\dfrac{2-x}{x^2-2x+1}$

Megoldás. Ebben az esetben a tört nevezője az $x-1$ elsőfokú tényező négyzete, így a helyes felbontás:

$$\frac{2-x}{x^2-2x+1} = \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} .$$

Tehát

$$2 - x = A(x-1) + B \ .$$

Az A, B paraméterek meghatározása történhet az egyenlő együtthatók módszerével is. Ezt általában akkor használjuk, ha az ismeretlenek száma nagyobb mint ahány zérushelye van a nevezőnek, mint például ebben az esetben. Először felbontjuk a zárójelet majd csoportosítjuk az egynemű kifejezéseket:

$$\begin{aligned} 2 - x &= A(x-1) + B \\ -1 \cdot x + 2 &= Ax - A + B .\end{aligned}$$

Az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\begin{cases} -1 = A \\ 2 = -A + B , \end{cases}$$

amiből $A = -1$ és $B = 1$. Így

$$\frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\,.$$

(f) $\dfrac{1}{x^3+3x^2}$

Megoldás.

$$\frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} = \frac{Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2}{x^2(x+3)}\,.$$

Tehát

$$1 = Ax(x+3) + B(x+3) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (3A+B)x + 3B\,.$$

Az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 3A + B \\ 1 = 3B \end{cases}$$

amiből $B = 1/3$, $A = -1/9$ és $C = 1/9$. Így

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = -\frac{1/9}{x} + \frac{1/3}{x^2} + \frac{1/9}{x+3}$$

(g) $\dfrac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)}$

Megoldás. A tört nevezője egy elsőfokú és egy olyan másodfokú tényező, amelynek nincs valós gyöke, így a helyes felbontás:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2)}\,,$$

azaz

$$3x+1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + 2A + C\,.$$

Az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 3 = B + C \\ 1 = 2A + C\,, \end{cases}$$

amiből $A = -2/3$, $B = 2/3$ és $C = 7/3$. Így

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{-2/3}{x+1} + \frac{(2/3)x+(7/3)}{x^2+2}\,.$$

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk számegyenesen a $\dfrac{\sqrt{2-x}}{2x-x^3}$ függvény értelmezési tartományát.

2. Feladat. Bontsuk elemi törtekre az $\dfrac{x-1}{(x-7)(x-5)}$ racionális törtfüggvényt.

B csoport

1. Feladat. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk számegyenesen az $\dfrac{1}{\log_2(3x+1)}$ függvény értelmezési tartományát.

2. Feladat. Bontsuk elemi törtekre az $\dfrac{-3}{(x+2)(x^2+1)}$ racionális törtfüggvényt.

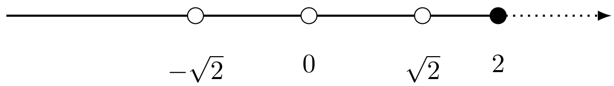
C csoport

Feladat. Polinomosztás után hozzuk a tanult alakra a $\dfrac{3x^3+4x^2+5x-2}{x^2+4x+4}$ kifejezést, majd a kapott törtfüggvényt bontsuk elemi törtekre.

A csoport megoldása

1.

$$\begin{aligned}
2-x \geq 0 \quad &\text{és} \quad 2x - x^3 \neq 0 \\
2 \geq x \quad &\text{és} \quad x(2-x^2) \neq 0 \\
2 \geq x \quad &\text{és} \quad x \neq 0\,, \quad x^2 \neq 2 \\
2 \geq x \quad &\text{és} \quad x \neq 0\,, \quad x \neq \pm\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$



2.

$$\frac{x-1}{(x-7)(x-5)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-7)}{(x-7)(x-5)}\,,$$

tehát

$$x-1 = A(x-5) + B(x-7)\,.$$

$$\begin{aligned}
x = 7 \quad &\text{esetén} \qquad 6 = A \cdot 2\,, \quad \text{azaz} \quad A = 3\,, \\
x = 5 \quad &\text{esetén} \qquad 4 = B \cdot (-2)\,, \quad \text{azaz} \quad B = -2\,.
\end{aligned}$$

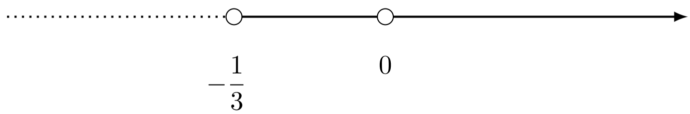
Így

$$\frac{x-1}{(x-7)(x-5)} = \frac{3}{x-7} - \frac{2}{x-5}\,.$$

B csoport megoldása

1.

$$
\begin{aligned}
\log_2(3x+1) &\neq 0 \qquad \text{és} \qquad 3x+1>0 \\
(3x+1) &\neq 1 \qquad \text{és} \qquad 3x+1>0 \\
x &\neq 0 \qquad \text{és} \qquad x>-1/3\,.
\end{aligned}
$$



2.

$$
\begin{aligned}
\frac{-3}{(x+2)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}\,,
\end{aligned}
$$

azaz

$$-3=(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C\,.$$

Az együtthatók összehasonlításával $0=A+B$, $0=2B+C$, $-3=A+2C$ adódik. Az első egyenletből $A=-B$, a másodikból $C=-2B$, ezeket visszaírva a harmadik egyenletbe:

$$-3=-B+2\cdot(-2B)=-5B \quad \text{azaz} \quad B=3/5$$

amiből $A=-3/5$ és $C=-6/5$. Tehát

$$\frac{-3}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{-3/5}{x+2}+\frac{(3/5)x-6/5}{x^2+1}\,.$$

C csoport megoldása

$$
\begin{array}{l}
(3x^3+4x^2+5x-2):(x^2+4x+4)=3x-8 \\
-(3x^3+12x^2+12x) \\
\quad -8x^2-7x-2 \\
\quad -(-8x^2-32x-32) \\
\qquad 25x+30
\end{array}
$$

Osztás után kapjuk, hogy

$$\frac{3x^3+4x^2+5x-2}{x^2+4x+4}=3x-8+\frac{25x+30}{x^2+4x+4}=3x-8+\frac{25x+30}{(x+2)^2}\,.$$

$$\frac{25x+30}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}\,,$$

azaz

$$25x+30=A(x+2)+B$$

$$
\begin{array}{rll}
x=-2 & \text{esetén} & 25\cdot(-2)+30=B \\
 & & -20=B \\
x=0 & \text{esetén} & 30=2A+B=2A-20 \\
 & & 50=2A \\
 & & 25=A
\end{array}
$$

Így

$$\frac{3x^3+4x^2+5x-2}{x^2+4x+4}=3x-8+\frac{25}{x+2}-\frac{20}{(x+2)^2}\,.$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk számegyenesen a következő függvények értelmezési tartományát.

(a) $\log_5(3-4x)$

(b) $\sqrt{1-x^2}$

(c) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

(d) $\dfrac{\cos x}{x^3-9x}$

(e) $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x^2+4}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-5}}$

(g) $\dfrac{x}{\sin x}$

(h) $\dfrac{1}{\lg 3x}$

(i) $\dfrac{1}{x \lg 3x}$

2. Feladat. Végezzünk polinomosztást.

(a) $(x^2-x-7):(x+4)$

(b) $(x^3+5x+2):(x+2)$

(c) $(x^3-x^2-x+4):(x-1)$

(d) $(x^3-x^2+3):(x^2-x-2)$

(e) $(3x^4-4x^3-5):(x^2+3)$

(f) $(x-4):(x+5)$

(g) $(3x-1):(2x+3)$

3. Feladat. Bontsuk elemi törtekre az alábbi törtfüggvényeket.

(a) $\dfrac{3}{(x-5)(x+4)}$

(b) $\dfrac{4x+5}{(x-1)(x-2)}$

(c) $\dfrac{x+1}{(3-x)(x+2)}$

(d) $\dfrac{1}{x^2-3x}$

(e) $\dfrac{5-x}{4-x^2}$

(f) $\dfrac{2x-3}{x^2+2x-8}$

(g) $\dfrac{5+3x}{6-x-x^2}$

(h) $\dfrac{5x+1}{(x-1)(4-x)(x+2)}$

(i) $\dfrac{1-5x}{x^2+6x+9}$

(j) $\dfrac{3-2x}{x^3+4x^2+4x}$

(k) $\dfrac{-x}{(x-2)^2(x-1)}$

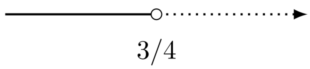
(l) $\dfrac{1}{x^3+5x}$

(m) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+2x}$

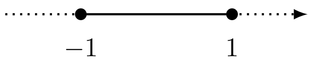
Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

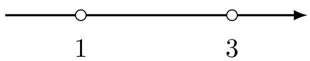
(a) $x < 3/4$



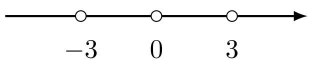
(b) $-1 \leq x \leq 1$



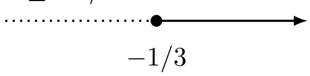
(c) $x \neq 1$ és $x \neq 3$



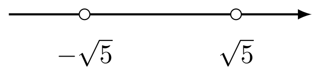
(d) $x \neq \pm 3$ és $x \neq 0$



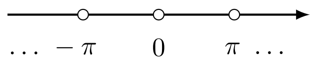
(e) $x \geq -1/3$



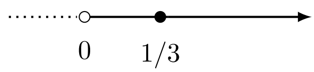
(f) $x \neq \pm\sqrt{5}$



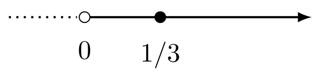
(g) $x \neq k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$



(h) $x > 0$ és $x \neq 1/3$



(i) $x > 0$ és $x \neq 1/3$



2. Feladat megoldása.

(a) $x - 5 + \dfrac{13}{x+4}$

(b) $x^2 - 2x + 9 - \dfrac{16}{x+2}$

(c) $x^2 - 1 + \dfrac{3}{x-1}$

(d) $x + \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 2}$

(e) $3x^2 - 4x - 9 + \dfrac{12x+22}{x^2+3}$

(f) $1 - \dfrac{9}{x+5}$

(g) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{11/2}{2x+3}$

3. Feladat megoldása.

(a) $\dfrac{1/3}{x-5} - \dfrac{1/3}{x+4}$

(b) $\dfrac{13}{x-2} - \dfrac{9}{x-1}$

(c) $\dfrac{4/5}{3-x} - \dfrac{1/5}{x+2}$

(d) $\dfrac{1/3}{x-3} - \dfrac{1/3}{x}$

(e) $\dfrac{3/4}{2-x} + \dfrac{7/4}{x+2}$

(f) $\dfrac{11/6}{x+4} + \dfrac{1/6}{x-2}$

(g) $\dfrac{11/5}{2-x} - \dfrac{4/5}{x+3}$

(h) $\dfrac{2/3}{x-1} + \dfrac{7/6}{4-x} + \dfrac{1/2}{x+2}$

(i) $\dfrac{16}{(x+3)^2} - \dfrac{5}{x+3}$

(j) $\dfrac{3/4}{x} - \dfrac{3/4}{x+2} - \dfrac{7/2}{(x+2)^2}$

(k) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

(l) $\dfrac{1/5}{x} - \dfrac{(1/5)x}{x^2+5}$

(m) $\dfrac{1/2}{x} - \dfrac{(1/2)x+1}{x^2+2x+2}$

2. óra
Sorozatok határértéke definíció szerint

Házi feladatok

1. Feladat. Definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$

Megoldás. Amennyiben a sorozat határértéke véges, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, azt kell megmutatnunk, hogy $|a_n - a|$ tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy, azaz

$$|a_n - a| < \varepsilon\,, \qquad \text{ha} \quad n > N\,.$$

Tehát egy abszolútértéket és paramétert tartalmazó egyenlőtlenséget kell megoldanunk, melynek végén azt kell kapnunk, hogy n nagyobb mint egy olyan kifejezés, amelyben szerepel az ε paraméter.

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{2(3n+2)-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \left|\frac{6n+4-6n+3}{4n-2}\right| \\ &= \left|\frac{7}{4n-2}\right| = \frac{7}{4n-2} < \varepsilon\end{aligned}$$

azaz

$$\frac{7}{\varepsilon} < 4n-2\,,$$

ahonnan

$$\frac{7/\varepsilon+2}{4} < n\,.$$

Ezért $N = \left[\dfrac{7/\varepsilon+2}{4}\right]$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n}{4n^2-5} = \dfrac{3}{4}$

Megoldás. A határérték véges, ezért most is az $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > N$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk amelynek során tulajdonképpen a N–et határozzuk meg:

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n^2-2n}{4n^2-5} - \frac{3}{4}\right| &= \left|\frac{4(3n^2-2n)-3(4n^2-5)}{4(4n^2-5)}\right| = \left|\frac{12n^2-8n-12n^2+15}{16n^2-20}\right| \\ &= \left|\frac{-8n+15}{16n^2-20}\right| = \frac{8n-15}{16n^2-20}\,, \quad \text{ha} \;\; n > 1\,.\end{aligned}$$

Innen becsléssel folytatjuk a megoldást. Ennek során a kifejezések nagyságrendjét megtartjuk, illetve egy lépésben csak egy becslést végzünk. A számolást könnyíti az is, hogy $n \in \mathbb{N}$.

A számlálóban: $8n - 15 < 8n$ minden n esetén.

A nevezőben: $16n^2 - 20 > 15n^2$ ha $n^2 > 20$, vagyis ha $n > 4$. Így

$$\frac{8n-15}{16n^2-20} < \frac{8n}{16n^2-20} < \frac{8n}{15n^2} = \frac{8}{15n}\,, \quad \text{ha} \quad n > 4\,.$$

Azaz becslést használva egy egyszerű egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\frac{8}{15n} < \varepsilon\,.$$

Így

$$\frac{8}{15\varepsilon} < n\,.$$

Ezért $N = \max\left\{4, \left[\frac{8}{15\varepsilon}\right]\right\}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5n^2}{2n^2+1} = -\dfrac{5}{2}$

Megoldás.

$$\left|\frac{3n-5n^2}{2n^2+1} + \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2(3n-5n^2)+5(2n^2+1)}{2(2n^2+1)}\right| = \left|\frac{6n-10n^2+10n^2+5}{4n^2+2}\right|$$
$$= \left|\frac{6n+5}{4n^2+2}\right| = \frac{6n+5}{4n^2+2}\,,$$

Becsléssel kapjuk, hogy $6n + 5 < 7n$, ha $n > 5$, továbbá $4n^2 + 2 > 4n^2$ minden n esetén, ezért

$$\frac{6n+5}{4n^2+2} < \frac{7n}{4n^2+2} < \frac{7n}{4n^2} = \frac{7}{4n}\,, \quad \text{ha} \quad n > 5\,.$$

Így

$$\frac{7}{4n} < \varepsilon \iff \frac{7}{4\varepsilon} < n\,,$$

Azaz $N = \max\left\{5, \left[\frac{7}{4\varepsilon}\right]\right\}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n+1}{n^2-5} = 3$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n^2+n+1}{n^2-5} - 3\right| &= \left|\frac{3n^2+n+1-3n^2+15}{n^2-5}\right| \\ &= \left|\frac{n+16}{n^2-5}\right| = \frac{n+16}{n^2-5}\,, \quad \text{ha} \quad n > 2\,.\end{aligned}$$

A számlálóban $n+16 < 2n$, ha $n > 16$.

A nevező becsülhető például $n^2-5 > n^2/2$–vel, ha

$$\begin{aligned} n^2 - 5 &> \frac{1}{2}n^2 \\ 2n^2 - 10 &> n^2 \\ n^2 &> 10 \\ n &> 3\,. \end{aligned}$$

Ezért

$$\frac{n+16}{n^2-5} < \frac{2n}{n^2-5} < \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n}\,, \quad \text{ha} \quad n > 16\,.$$

Így

$$\frac{4}{n} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < n\,,$$

Azaz $N = \max\left\{16, \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$.

2. Feladat. Definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{5n+2} = \infty$

Megoldás. Amennyiben a sorozat határértéke végtelen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor az $a_n > K$ egyenlőtlenséget kell n–re megoldani.

Mivel a számláló és a nevező is pozitív minden n esetén, így például a következő becslést írhatjuk. A számlálóban $n^2+3n > n^2$ minden n esetén, a nevezőben $5n+2 < 6n$, ha $n > 2$, ezért

$$\frac{n^2+3n}{5n+2} > \frac{n^2}{5n+2} > \frac{n^2}{6n} = \frac{n}{6} > K \iff n > 6K\,.$$

Azaz $N = \max\{2, [6K]\}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 4n^2 - 1}{n^2 + 5} = \infty$

Megoldás. A sorozat határértéke végtelen, tehát most is az $a_n > K$ egyenlőtlenséget kell n–re megoldani.

A számlálóban

$$n^3 - 4n^2 - 1 = n^2(n-4) - 1 > 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 4\,.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} n^3 - 4n^2 - 1 &> \frac{1}{2}n^3 \\ 2n^3 - 8n - 2 &> n^3 \\ n^3 - 8n^2 - 2 &> 0 \\ n^2(n-8) - 2 &> 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 8\,. \end{aligned}$$

A nevezőben $n^2 + 5 < 2n^2$ ha $n^2 > 5$. Tehát amennyiben $n > 8$, akkor

$$\frac{n^3 - 4n^2 - 1}{n^2 + 5} > \frac{n^3/2}{n^2 + 5} > \frac{n^3/2}{2n^2} = \frac{n}{4} > K \iff n > 4K\,.$$

Azaz $N = \max\{8, [4K]\}$.

3. Feladat. Definíció alapján igazoljuk hogy

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n - n^3 + 7}{n^2 - 2n} = -\infty$

Megoldás. Amennyiben a határérték mínusz végtelen, akkor az $a_n < K$ egyenlőtlenséget kell n–re megoldani.

Negatív kifejezések becslése könnyen elrontható, ezért a sorozat -1–szeresét vesszük:

$$-\frac{3n - n^3 + 7}{n^2 - 2n} = \frac{n^3 - 3n - 7}{n^2 - 2n}\,,$$

és erről, ahogy azt az előző két példában tettük, megmutatjuk, hogy tetszőlegesen nagy lehet, azaz $-a_n > -K$.

A számlálóban $n^3 - 3n - 7 > n^3/2$ ha $n > 3$.

A nevezőben $0 < n^2 - 2n < n^2$ ha $n > 2$. Így, amennyiben $n > 3$, akkor

$$\frac{n^3 - 3n - 7}{n^2 - 2n} > \frac{n^3/2}{n^2 - 2n} > \frac{n^3/2}{n^2} = \frac{n}{2} > -K \iff n > -2K\,.$$

Ezért, ha $n > N = \max\{3, [-2K]\}$, akkor

$$\frac{3n - n^3 + 7}{n^2 - 2n} < K\,.$$

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n}{5n^2-n-1} = \dfrac{3}{5}$.

2. Feladat. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-5n+1}{2n-1} = \infty$.

B csoport

1. Feladat. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{4n^2+5n} = \dfrac{1}{4}$.

2. Feladat. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+1}{4-5n^2} = -\infty$.

A csoport megoldása

1.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{3n^2+2n}{5n^2-n-1}-\frac{3}{5}\right| = \left|\frac{5(3n^2+2n)-3(5n^2-n-1)}{5(5n^2-n-1)}\right| \\
&= \left|\frac{15n^2+10n-15n^2+3n+3}{25n^2-5n-5}\right| = \left|\frac{13n+3}{25n^2-5n-5}\right| \\
&= \frac{13n+3}{25n^2-5n-5} < \frac{14n}{25n^2-5n-5} < \frac{14n}{24n^2} = \frac{7}{12n}\,, \quad \text{ha} \quad n>3\,,
\end{aligned}$$

ugyanis a számlálóban $13n+3<14n$, ha $n>3$.
A nevezőben

$$\begin{aligned}
25n^2-5n-5 &> 24n^2 \\
n^2-5n-5 &> 0 \\
n(n-5) &> 5\,, \quad \text{ha} \quad n>5\,.
\end{aligned}$$

Így

$$\frac{7}{12n}<\varepsilon \iff \frac{7}{12\varepsilon}<n\,.$$

Azaz $N=\max\left\{5,\left[\frac{7}{12\varepsilon}\right]\right\}$.
2. A számláló $n^2-5n+1=n(n-5)+1$ alapján $n>4$ esetén, a nevező pedig minden n esetén pozitív.
A számláló becslése lehet

$$\begin{aligned}
n^2-5n+1 &> \frac{1}{2}n^2 \\
2n^2-10n+2 &> n^2 \\
n^2-10n+2 &> 0 \\
n(n-10)+2 &> 0\,, \quad \text{ha} \quad n>9\,.
\end{aligned}$$

A nevezőben $2n-1<2n$ minden n esetén. Ezért ha $n>9$, akkor

$$\frac{n^2-5n+1}{2n-1} > \frac{n^2/2}{2n-1} > \frac{n^2/2}{2n} = \frac{n}{4} > K \iff n>4K\,.$$

Azaz $N=\max\{9,[4K]\}$.

B csoport megoldása

1.

$$\left|\frac{n^2-2}{4n^2+5n}-\frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4(n^2-2)-(4n^2+5n)}{4(4n^2+5n)}\right| = \left|\frac{-8-5n}{16n^2+20n}\right| = \frac{5n+8}{16n^2+20n}$$
$$< \frac{6n}{16n^2+20n} < \frac{6n}{16n^2} = \frac{3}{8n}\,, \quad \text{ha} \quad n > 8\,,$$

ugyanis a számlálóban $5n+8 < 6n$, ha $n > 8$, a nevezőben $16n^2+20n > 16n^2$, minden n esetén. Így

$$\frac{3}{8n} < \varepsilon \iff \frac{3}{8\varepsilon} < n\,.$$

Azaz $N = \max\left\{8, \left[\frac{3}{8\varepsilon}\right]\right\}$.

2. A sorozat -1 szeresét vizsgáljuk.

$$-\frac{n^3-2n^2+1}{4-5n^2} = \frac{n^3-2n^2+1}{5n^2-4}\,.$$

A számláló $n^3-2n^2+1 = n^2(n-2)+1$ alapján $n > 1$ esetén, a nevező pedig minden n esetén pozitív. Így például a következő becslést írhatjuk:
A számlálóban

$$\begin{aligned} n^3-2n^2+1 &> \frac{1}{2}n^3 \\ 2n^3-4n^2+2 &> n^3 \\ n^2(n-4)+2 &> 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 3\,. \end{aligned}$$

A nevezőben $5n^2-4 < 5n^2$ minden n esetén. Ezért $n > 3$ esetén

$$\frac{n^3-2n^2+1}{5n^2-4} > \frac{n^3/2}{5n^2-4} > \frac{n^3/2}{5n^2} = \frac{n}{10} > -K \iff n > -10K\,.$$

Azaz $N = \max\{3, [-10K]\}$.

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{5n^2+4} = \dfrac{1}{5}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{3n^2+4n-2} = \dfrac{2}{3}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+3n+2}{5n^2-6n} = \dfrac{4}{5}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3n^2}{1-4n^2} = -\dfrac{3}{4}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8-3n}{2n^2+1} = 0$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+10n}{n^2+3n+5} = 2$

2. Feladat. Definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+10}{5n-7} = \infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n-n^2}{3-2n} = \infty$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-1}{2n^2+5} = \infty$

3. Feladat. Definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n-1}{4-3n} = -\infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n^2+5}{6-n^2} = -\infty$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $15n-4>0$ minden n–re, $15n-4<15n$ minden n–re.
$25n^2+20>0$ minden n–re, $25n^2+20>25n^2$ minden n–re.
Így $N = \left[\dfrac{3}{5\varepsilon}\right]$.

(b) $17n-7>0$ minden n–re, $17n-7<17n$ minden n–re.
$9n^2+12n-6>0$ minden n–re, $9n^2+12n-6>9n^2$ minden n–re.
Így $N = \left[\dfrac{17}{9\varepsilon}\right]$.

(c) $39n+10>0$ minden n–re, $39n+10<40n$ ha $n>10$.
$25n^2-30n>0$ ha $n>1$, $25n^2-30n>24n^2$ ha $n>30$.
Így $N=\max\left\{30,\left[\dfrac{5}{3\varepsilon}\right]\right\}$.

(d) $4n+3>0$ minden n–re, $4n+3<5n$ ha $n>3$.
$16n^2-4>0$ minden n–re, $16n^2-4>15n^2$ ha $n>2$.
Így $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$.

(e) $3n-8>0$ ha $n>2$, $3n-8<3n$ minden n–re.
$2n^2+1>0$ minden n–re, $2n^2+1>2n^2$ minden n–re.
Így $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{3}{2\varepsilon}\right]\right\}$.

(f) $4n-10>0$ ha $n>2$, $4n-10<4n$ minden n–re.
$n^2+3n+5>0$ minden n–re, $n^2+3n+5>n^2$ minden n–re.
Így $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$.

2. Feladat megoldása.

(a) $2n^2-3n+10>0$ minden n–re, $2n^2-3n+10>n^2$ minden n–re.
$5n-7>0$ ha $n>1$, $5n-7<5n$ minden n–re.
Így $N=\max\{1,[5K]\}$.

(b) $n^2-n-5>0$ ha $n>2$, $n^2-n-5>n^2/2$ ha $n>4,$.
$2n-3>0$ ha $n>1$, $2n-3<2n$ minden n–re.
Így $N=\max\{4,[4K]\}$.

(c) $n^3+n^2-1>0$ minden n–re, $n^3+n^2-1>n^3$ ha $n>1$.
$2n^2+5>0$ minden n–re, $2n^2+5<3n^2$ ha $n>2$.
Így $N=\max\{2,[3K]\}$.

3. Feladat megoldása.

(a) $2n^2+5n-1>0$ minden n–re, $2n^2+5n-1>2n^2$ minden n–re.
$3n-4>0$ ha $n>1$, $3n-4<3n$ minden n–re.
Így $N=\max\left\{1,\left[-\dfrac{3K}{2}\right]\right\}$.

(b) $n^3-n^2+5>0$ minden n–re, $n^3-n^2+5>n^3/2$ minden n–re.
$n^2-6>0$ ha $n>2$, $n^2-6<n^2$ minden n–re.
Így $N=\max\{2,[-2K]\}$.

3. óra

Sorozatok határértéke formálisan I.

Házi feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{n^2-2n}{3n^2-2}$

Megoldás. „$\dfrac{\infty}{\infty}$” alak. A számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezés legnagyobb kitevőjű (domináns) tagját kiemelve, az első szorzótényező egyszerűsítése után kapjuk, hogy

$$\frac{n^2-2n}{3n^2-2} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1-2/n}{3-2/n^2} = \frac{1-2/n}{3-2/n^2} \to \frac{1}{3}\,.$$

(b) $\dfrac{n-2n^3+5n^2}{1+n^3}$

Megoldás. „$\dfrac{\infty}{\infty}$” alak. Emeljük ki a számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezés legnagyobb kitevőjű (domináns) tagját, az első szorzótényező egyszerűsítése után:

$$\frac{n-2n^3+5n^2}{1+n^3} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1/n^2-2+5/n}{1/n^3+1} = \frac{1/n^2-2+5/n}{1/n^3+1} \to \frac{-2}{1} = -2\,.$$

(c) $\dfrac{n-3n^2}{3n^3+n^2+\sqrt{5}}$

Megoldás. A számlálóban és a nevezőben a domináns tagot kiemelve, az első szorzótényező egyszerűsítése után kapjuk, hogy

$$\frac{n-3n^2}{3n^3+n^2+\sqrt{5}} = \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{1/n-3}{3+1/n+\sqrt{5}/n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/n-3}{3+1/n+\sqrt{5}/n^3} \to 0 \cdot \frac{-3}{3} = 0\,.$$

(d) $\dfrac{4n^3-2n}{n^2-n+\pi}$

Megoldás. Az előző feladatokhoz hasolnóan kapjuk, hogy

$$\frac{4n^3-2n}{n^2-n+\pi} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{4-2/n^2}{1-1/n+\pi/n^2} = n \cdot \frac{4-2/n^2}{1-1/n+\pi/n^2} \to \text{„}\infty \cdot \frac{4}{1}\text{”} = \infty\,.$$

(e) $\dfrac{n-n^4-4n^5}{2n^2+3n^3}$

Megoldás.

$$\frac{n-n^4-4n^5}{2n^2+3n^3}=\frac{n^5}{n^3}\cdot\frac{1/n^4-1/n-4}{2/n+3}=n^2\cdot\frac{2/n^4-1/n-4}{2/n+3}\to\text{"}\infty\cdot\frac{-4}{3}\text{"}=-\infty\,.$$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{n^2-2n+3}{\sqrt{n^3-2n+1}}$

Megoldás. "$\dfrac{\infty}{\infty}$" alak. A számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezés domináns tagját kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{n^2-2n+3}{\sqrt{n^3-2n+1}}&=\frac{n^2}{\sqrt{n^3}}\cdot\frac{1-2/n+3/n^2}{\sqrt{1-2/n^2+1/n^3}}\\&=n^{1/2}\cdot\frac{1-2/n+3/n^2}{\sqrt{1-2/n^2+1/n^3}}\to\text{"}\infty\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\text{"}=\infty\,,\end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^3}}=\frac{n^2}{n^{3/2}}=\frac{n^{4/2}}{n^{3/2}}=n^{1/2}\,.$$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2-5n+1}}{\sqrt[4]{2n^5-1}}$

Megoldás. A domináns tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{n^2-5n+1}}{\sqrt[4]{2n^5-1}}&=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-5/n+1/n^2}}{\sqrt[4]{2-1/n^5}}\\&=\frac{1}{n^{7/12}}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-5/n+1/n^2}}{\sqrt[4]{2-1/n^5}}\to0\cdot\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[4]{2}}=0\,,\end{aligned}$$

ugyanis

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^5}}=\frac{n^{2/3}}{n^{5/4}}=\frac{n^{8/12}}{n^{15/12}}=\frac{1}{n^{7/12}}\,.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{3\cdot7^n+2^{3n-1}}{3^{n+1}-5^n}$

Megoldás. $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ alak. A számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezés domináns tagját kiemelve kapjuk, hogy

$$\frac{3\cdot 7^n + 2^{3n-1}}{3^{n+1}-5^n} = \frac{3\cdot 7^n + 8^n/2}{3^n\cdot 3 - 5^n} = \frac{8^n}{5^n}\cdot\frac{3\cdot 7^n/8^n + 1/2}{3^n/5^n\cdot 3 - 1}$$
$$= \left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \frac{3\cdot (7/8)^n + 1/2}{(3/5)^n\cdot 3 - 1} \to "\infty\cdot\frac{1/2}{-1}" = -\infty\,.$$

(b) $\dfrac{2^{2n}+n^4}{n-n^2+4n^3}$

Megoldás.

$$\frac{2^{2n}+n^4}{n-n^2+4n^3} = \frac{4^n+n^4}{n-n^2+4n^3} = \frac{4^n}{n^3}\cdot\frac{1+n^4/4^n}{1/n^2-1/n+4} \to "\infty\cdot\frac{1}{4}" = \infty\,.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n+5}$

Megoldás. $"\infty-\infty"$ alak. A domináns tagot kiemelve kapjuk, hogy

$$\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n+5} = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{2-1/n}-\sqrt{3+5/n}\right)$$
$$\to "\infty\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)" = -\infty\,,$$

hiszen $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$.

(b) $\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+4n-5}$

Megoldás. A domináns tagot kiemelve, figyelve arra, hogy $\sqrt{n^2}=|n|=n$,

$$\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+4n-5} = \sqrt{n^2}\cdot\left(\sqrt{1-3/n^2}-\sqrt{1+4/n-5/n^2}\right)$$

$"\infty\cdot 0"$ alakú határértéket kapunk, azaz ez a módszer most nem működik. Ebben az esetben az eredeti kifejezést az első lépésben "gyöktelenítjük", majd az így kapott $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ típusú feladatot a szokásos módon megoldjuk:

$$\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+4n-5}$$
$$= \left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+4n-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+4n-5}}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+4n-5}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n^2-3n)-(n^2+4n-5)}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+4n-5}} = \frac{-7n+5}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+4n-5}} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{-7+5/n}{\sqrt{1-3/n}+\sqrt{1+4/n-5/n^2}} \\
&= \frac{-7+5/n}{\sqrt{1-3/n}+\sqrt{1+4/n-5/n^2}} \to \frac{-7}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{7}{2}\,.
\end{aligned}
$$

(c) $\sqrt{n^2-2n+3}-n$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n^2-2n+3}-n &= \left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n+3}+n}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} \\
&= \frac{(n^2-2n+3)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{-2+3/n}{\sqrt{1-2/n+3/n^2}+1} \\
&= \frac{-2+3/n}{\sqrt{1-2/n+3/n^2}+1} \to \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1\,.
\end{aligned}
$$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}-n}{\sqrt[5]{n^3-n^4+1}}$

Megoldás. A számláló "$\infty - \infty$" alakú.

$$
\sqrt[3]{n^2-1}-n = n \cdot \left(\sqrt[3]{1/n-1/n^3}-1\right) \to \text{"}\infty \cdot (-1)\text{"} = -\infty
$$

alapján a tört "$\dfrac{\infty}{\infty}$" alakú. Ezért

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{n^2-1}-n}{\sqrt[5]{n^3-n^4+1}} &= \frac{n}{\sqrt[5]{n^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1/n-1/n^3}-1}{\sqrt[5]{1/n-1+1/n^4}} \\
&= n^{1/5} \cdot \frac{\sqrt[3]{1/n-1/n^3}-1}{\sqrt[5]{1/n-1+1/n^4}} \to \text{"}\infty \cdot \frac{-1}{\sqrt[5]{-1}}\text{"} = \infty\,,
\end{aligned}
$$

mert

$$
\frac{n}{\sqrt[5]{n^4}} = \frac{n}{n^{4/5}} = \frac{n^{5/5}}{n^{4/5}} = n^{1/5}\,.
$$

5. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{2}}{2-2\sqrt[n]{2}}$

Megoldás. A határérték „$\dfrac{0}{0}$" típusú. Ilyenkor szorzattá alakítunk, majd egyszerűsítünk. Az $\sqrt[n]{2}=a$ helyettesítés esetén $\sqrt[n]{4}=a^2$, így írhatjuk, hogy

$$\frac{\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{2}}{2-2\sqrt[n]{2}}=\frac{a^2-a}{2-2a}=\frac{a(a-1)}{2(1-a)}=\frac{-a(1-a)}{2(1-a)}=\frac{-a}{2}=\frac{-\sqrt[n]{2}}{2}\to-\frac{1}{2}\,.$$

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{27}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{27}}$

Megoldás. Az $\sqrt[n]{3}=a$ helyettesítés esetén $\sqrt[n]{9}=a^2$ és $\sqrt[n]{27}=a^3$ így írhatjuk, hogy

$$\frac{\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{27}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{27}}=\frac{a^2-a^3}{a-a^3}=\frac{a^2(1-a)}{a(1-a^2)}=\frac{a^2(1-a)}{a(1-a)(1+a)}=\frac{a}{1+a}$$
$$=\frac{\sqrt[n]{3}}{1+\sqrt[n]{3}}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.$$

6. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\sqrt[n]{7^n-4^n}$

Megoldás. „$\sqrt[\infty]{\infty}$" alak. Az n-edik gyökjel alatti kifejezésből kiemelve a domináns tagot, majd az első szorzótényezőt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{7^n-4^n}=\sqrt[n]{7^n(1-4^n/7^n)}=\sqrt[n]{7^n}\cdot\sqrt[n]{1-4^n/7^n}=7\cdot\sqrt[n]{1-(4/7)^n}\,.$$

Mivel

$$1-\left(\frac{4}{7}\right)^n\to1\,,$$

így

$$\frac{1}{2}<1-\left(\frac{4}{7}\right)^n<\frac{3}{2}\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,,$$

és ekkor a hatványfüggvény monotonitása miatt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{1-\left(\frac{4}{7}\right)^n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}}\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,.$$

Mivel $\sqrt[n]{1/2}\to1$ és $\sqrt[n]{3/2}\to1$, ezért a rendőrelv alapján $\sqrt[n]{1-(4/7)^n}\to1$, vagyis az általunk vizsgált sorozat határértéke:

$$\sqrt[n]{7^n-4^n}=7\cdot\sqrt[n]{1-(4/7)^n}\to7\cdot1=7\,.$$

(b) $\sqrt[n]{n^5 + 2^{3n+2} - 3 \cdot 7^n}$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n^5 + 2^{3n+2} - 3 \cdot 7^n} &= \sqrt[n]{n^5 + 4 \cdot 8^n - 3 \cdot 7^n} = \sqrt[n]{8^n(n^5/8^n + 4 - 3 \cdot 7^n/8^n)} \\ &= 8 \cdot \sqrt[n]{n^5/8^n + 4 - 3 \cdot (7/8)^n}\,.\end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{n^5}{8^n} + 4 - 3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \to 4\,,$$

ha n elég nagy, akkor

$$3 < \frac{n^5}{8^n} + 4 - 3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n < 5\,,$$

$$\sqrt[n]{3} < \sqrt[n]{n^5/8^n + 4 - 3 \cdot (7/8)^n} < \sqrt[n]{5}\,.$$

De $\sqrt[n]{3} \to 1$ és $\sqrt[n]{5} \to 1$, így a rendőrelv szerint $\sqrt[n]{n^5/8^n + 4 - 3 \cdot (7/8)^n} \to 1$, vagyis az általunk vizsgált sorozat határértéke:

$$\sqrt[n]{n^5 + 2^{3n+2} - 3 \cdot 7^n} = 8 \cdot \sqrt[n]{n^5/8^n + 4 - 3 \cdot (7/8)^n} \to 8 \cdot 1 = 8\,.$$

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{n^2 - 3n^3 + 1}{\sqrt[4]{2n^3 + 6n}}$ (b) $\dfrac{2^{3n} - 4^n}{5^{n+1} - 3^{2n} + 1}$ (c) $\dfrac{1 - \sqrt[n]{25}}{\sqrt[n]{25} - \sqrt[n]{5}}$

B csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $n - \sqrt{n^2 + 3}$ (b) $\dfrac{n^3 - 2^{2n+1}}{3^{n+1} - n^5}$ (c) $\sqrt[n]{7^n - 5^n + 2}$

C csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{n^2 + 2n - n^3}{5 - 3n - 2n^2}$ (b) $\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 - 2}$ (c) $\sqrt[n]{2^{3n+1} - n^4 - 1}$

A csoport megoldása

(a)

$$\frac{n^2-3n^3+1}{\sqrt[4]{2n^3+6n}} = \frac{n^3}{\sqrt[4]{n^3}} \cdot \frac{1/n-3+1/n^3}{\sqrt[4]{2+6/n^2}} = n^{9/4} \cdot \frac{1/n-3+1/n^3}{\sqrt[4]{2+6/n^2}}$$
$$\to \text{„}\infty \cdot \frac{-3}{\sqrt[4]{2}}\text{”} = -\infty\,,$$

ugyanis

$$\frac{n^3}{\sqrt[4]{n^3}} = \frac{n^{12/4}}{n^{3/4}} = n^{9/4}\,.$$

(b)

$$\frac{2^{3n}-4^n}{5^{n+1}-3^{2n}+1} = \frac{8^n-4^n}{5\cdot 5^n-9^n+1} = \frac{8^n}{9^n} \cdot \frac{1-4^n/8^n}{5\cdot 5^n/9^n-1+1/9^n}$$
$$= \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot \frac{1-(4/8)^n}{5\cdot(5/9)^n-1+(1/9)^n} \to 0\cdot\frac{1}{-1} = 0\,.$$

(c) Az $\sqrt[n]{5}=a$ helyettesítés esetén $\sqrt[n]{25}=a^2$, így

$$\frac{1-\sqrt[n]{25}}{\sqrt[n]{25}-\sqrt[n]{5}} = \frac{1-a^2}{a^2-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{a(a-1)} = \frac{-(a-1)(1+a)}{a(a-1)} = \frac{-(1+a)}{a}$$
$$= -\frac{1+\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{5}} \to -\frac{2}{1} = -2\,.$$

B csoport megoldása

(a)

$$\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+3}}{n+\sqrt{n^2+3}}=\frac{n^2-(n^2+3)}{n+\sqrt{n^2+3}}$$
$$=\frac{-3}{n+\sqrt{n^2+3}}\to\text{„}\frac{-3}{\infty+\infty}\text{”}=\text{„}\frac{-3}{\infty}\text{”}=0\,.$$

(b)

$$\frac{n^3-2^{2n+1}}{3^{n+1}-n^5}=\frac{n^3-2\cdot 4^n}{3\cdot 3^n-n^5}=\frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{n^3/4^n-2}{3-n^5/3^n}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{n^3/4^n-2}{3-n^5/3^n}\to\text{„}\infty\cdot\frac{-2}{3}\text{”}=-\infty\,.$$

(c)

$$\sqrt[n]{7^n-5^n+2}=\sqrt[n]{7^n(1-5^n/7^n+2/7^n)}=7\cdot\sqrt[n]{1-(5/7)^n+2/7^n}\,.$$

Mivel

$$1-(5/7)^n+2/7^n\to 1\,,$$

így

$$1/2<1-(5/7)^n+2/7^n<3/2\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,,$$

ahonnan

$$\sqrt[n]{1/2}<\sqrt[n]{1-(5/7)^n+2/7^n}<\sqrt[n]{3/2}\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,.$$

Mivel $\sqrt[n]{1/2}\to 1$ és $\sqrt[n]{3/2}\to 1$, a rendőrelv miatt

$$\sqrt[n]{1-(5/7)^n+2/7^n}\to 1\,,$$

vagyis

$$\sqrt[n]{7^n-5^n+2}=7\cdot\sqrt[n]{1-(5/7)^n+2/7^n}\to 7\cdot 1=7\,.$$

C csoport megoldása

(a)

$$\frac{n^2+2n-n^3}{5-3n-2n^2}=\frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{1/n+2/n^2-1}{5/n^2-3/n-2}$$
$$=n\cdot\frac{1/n+2/n^2-1}{5/n^2-3/n-2}\to\text{„}\infty\cdot\frac{-1}{-2}\text{"}=\infty\,.$$

(b)

$$\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2-2}}=\frac{(n^2-3n)-(n^2-2)}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2-2}}$$
$$=\frac{-3n+2}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2-2}}=\frac{n}{\sqrt{n^2}}\cdot\frac{-3+2/n}{\sqrt{1-3/n}+\sqrt{1-2/n^2}}$$
$$=\frac{-3+2/n}{\sqrt{1-3/n}+\sqrt{1-2/n^2}}\to\frac{-3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-\frac{3}{2}\,.$$

(c)

$$\sqrt[n]{2^{3n+1}-n^4-1}=\sqrt[n]{2\cdot 8^n-n^4-1}$$
$$=\sqrt[n]{8^n(2-n^4/8^n-1/8^n)}=8\cdot\sqrt[n]{2-n^4/8^n-1/8^n}\,.$$

Mivel

$$2-n^4/8^n-1/8^n\to 2\,,$$

így

$$1<2-n^4/8^n-1/8^n<3\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,,$$

ahonnan

$$\sqrt[n]{1}<\sqrt[n]{2-n^4/8^n-1/8^n}<\sqrt[n]{3}\,,\quad\text{ha n elég nagy}\,.$$

Mivel $\sqrt[n]{1}\to 1$ és $\sqrt[n]{3}\to 1$, így a rendőrelv szerint

$$\sqrt[n]{2-n^4/8^n-1/8^n}\to 1\,,$$

vagyis

$$\sqrt[n]{2^{3n+1}-n^4-1}=8\cdot\sqrt[n]{2-n^4/8^n-1/8^n}\to 8\cdot 1=8\,.$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{5n^2+4}{n^2+2n}$

(b) $\dfrac{n-2n^3-4}{3n^3+1}$

(c) $\dfrac{2n^2-n^3}{n^5-3n^4+3n^2-\pi}$

(d) $\dfrac{2n^2+1-n^4}{\frac{1}{2}n^4-n^3+3n^2-4}$

(e) $\dfrac{4n^3+1-n^4}{2n^5+3n^2-n}$

(f) $\dfrac{3n^2-2n^4-\pi}{n-4n^2+3}$

(g) $\dfrac{(n-1)(n^2+n)}{2n^2-n+10}$

(h) $\dfrac{3n^3+1}{5n-4n^2+1}$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{n-\pi}{\sqrt[3]{4n^5-2n}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{n^5-3n+6n^2}}{2n-n^2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2n^2+5n-2}}{\sqrt{1+8n^2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n^4-1}}{\sqrt[4]{3n-4n^2+n^3}}$

(e) $\dfrac{\sqrt[5]{n^3+2n^2-1}}{\sqrt[7]{n+4n^5}}$

(f) $\dfrac{n-\sqrt{1+n^3}}{\sqrt[3]{n^2+2n^3-5}}$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{2^n-3^n}{5^n+7^n}$

(b) $\dfrac{4\cdot 2^n+3^{2n-1}}{2+5^{n+1}}$

(c) $\dfrac{n^4-n^3+4}{3^n-n^2+3}$

(d) $\dfrac{4^n-n^4}{2^{2n+1}+n-1}$

(e) $\dfrac{3^n-2^{2n}}{n^4-n}$

(f) $\dfrac{2^{2n-3}-6n^3}{n^3+2^n}$

(g) $\dfrac{2^{2n-3}-2\cdot 3^n}{7n^2+3\cdot 4^{n-1}}$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\sqrt{4n+1}-\sqrt{3n-8}$

(b) $\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2-1}$

(c) $\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{3n^2+4}$

(d) $\sqrt{n^2+n+4}-\sqrt{n^2+3}$

(e) $n-\sqrt{n^2-8n+3}$

(f) $\sqrt{3n^2+4n+2}-\sqrt{n^2+3n-1}$

5. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{9}-1}$

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{2}-\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{8}-\sqrt[n]{4}}$

(c) $\dfrac{1-\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{4}-1}$

(d) $\dfrac{3\sqrt[n]{3}-3}{\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{27}}$

(e) $\dfrac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{2}+1}$

6. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\sqrt[n]{2^{3n}-3^n}$

(b) $\sqrt[n]{3^{n+1}-n^4-2}$

(c) $\sqrt[n]{n-n^3+3^{2n-2}}$

(d) $\sqrt[n]{8^n-7^n+6^n}$

(e) $\sqrt[n]{n^7+2^n-5}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) 5

(b) $-\dfrac{2}{3}$

(c) 0

(d) -2

(e) 0

(f) ∞

(g) ∞

(h) $-\infty$

2. Feladat megoldása.

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) ∞ (e) 0 (f) $-\infty$

3. Feladat megoldása.

(a) 0

(b) ∞

(c) 0

(d) $\frac{1}{2}$

(e) $-\infty$

(f) ∞

(g) $\frac{1}{6}$

4. Feladat megoldása.

(a) ∞

(b) 0

(c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(d) $\frac{1}{2}$

(e) 4

(f) ∞

5. Feladat megoldása.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) -1

(c) $-\frac{3}{2}$

(d) -3

(e) 0

6. Feladat megoldása.

(a) 8

(b) 3

(c) 9

(d) 8

(e) 2

4. óra

Sorozatok határértéke formálisan II. Sorozatok monotonitása, korlátossága

Házi feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\left(\dfrac{3n+2}{4n-5}\right)^n$

Megoldás. "$a_n^{b_n}$" alak, amelyben a kitevő határértéke ∞, és az alap határértéke

$$\frac{3n+2}{4n-5} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3+2/n}{4-5/n} = \frac{3+2/n}{4-5/n} \to \frac{3}{4} \ \left(= \frac{6}{8}\right),$$

ami 1–nél kisebb pozitív szám. Így például

$$\frac{5}{8} < \frac{3n+2}{4n-5} < \frac{7}{8}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy,}$$

és ekkor a hatványfüggvény tulajdonsága miatt

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n < \left(\frac{3n+2}{4n-5}\right)^n < \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Mivel $\left(\dfrac{5}{8}\right)^n \to 0$ és $\left(\dfrac{7}{8}\right)^n \to 0$, így a rendőrelv szerint az általunk vizsgált sorozat határértéke is 0, vagyis

$$\left(\frac{3n+2}{4n-5}\right)^n \to 0\,.$$

(b) $\left(\dfrac{2n+7}{3n-1}\right)^{5-2n}$

Megoldás. "$a_n^{b_n}$" alak. A kitevő, $5-2n$ határértéke $-\infty$, ezért a hatványozás azonosságai alapján átírjuk az

$$\left(\frac{2n+7}{3n-1}\right)^{5-2n} = \left(\frac{3n-1}{2n+7}\right)^{2n-5}$$

alakra, így az új kitevő határértéke ∞. Az új alap határértéke

$$\frac{3n-1}{2n+7} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3-1/n}{2+7/n} = \frac{3-1/n}{2+7/n} \to \frac{3}{2} \quad \left(=\frac{6}{4}\right),$$

ami 1–nél nagyobb szám. Ezért

$$\frac{3n-1}{2n+7} > \frac{5}{4}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy,}$$

és így

$$\left(\frac{3n-1}{2n+7}\right)^{2n-5} > \left(\frac{5}{4}\right)^{2n-5}.$$

Mivel $\left(\frac{5}{4}\right)^n \to \infty$, ezért bármely részsorozatának, speciálisan $\left(\frac{5}{4}\right)^{2n-5}$–nek is ∞ a határértéke. Így az általunk vizsgált sorozat határértéke is ∞, azaz

$$\left(\frac{2n+7}{3n-1}\right)^{5-2n} \to \infty.$$

(c) $\left(\dfrac{3n+4}{3n+2}\right)^{n+3}$

Megoldás. A kitevő határértéke ∞, az alap határértéke

$$\frac{3n+4}{3n+2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3+4/n}{3+2/n} = \frac{3+4/n}{3+2/n} \to 1,$$

pontosan 1. Ekkor az

$$\left(1+\frac{1}{h(n)}\right)^{h(n)} \to e, \quad h(n) \to \pm\infty$$

nevezetes határérték segítségével oldjuk meg a feladatot. Az alapot a következő alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}\frac{3n+4}{3n+2} &= \frac{3n+2+2}{3n+2} = 1+\frac{2}{3n+2} \\ &= 1+\frac{1}{\frac{3n+2}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{2}}\right)^{\frac{3n+2}{2}}\right]^{\frac{2}{3n+2}}.\end{aligned}$$

Ugyanis ekkor

$$h(n) = \frac{3n+2}{2} \to \infty$$

miatt a szögletes zárójelben levő kifejezés határértéke

$$\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{2}}\right)^{\frac{3n+2}{2}} \to e\,.$$

Tehát

$$\left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{n+3} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{2}}\right)^{\frac{3n+2}{2}}\right]^{\frac{2}{3n+2}\cdot(n+3)},$$

és mert a külső kitevő határértéke

$$\frac{2}{3n+2}\cdot(n+3) = \frac{2n+6}{3n+2} = \frac{n}{n}\cdot\frac{2+6/n}{3+2/n} = \frac{2+6/n}{3+2/n} \to \frac{2}{3}\,,$$

kapjuk, hogy az általunk vizsgált sorozat határértéke $e^{2/3}$, vagyis

$$\left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{n+3} \to e^{2/3}\,.$$

(d) $\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n}$

Megoldás. A kitevő határértéke ∞, az alap határértéke

$$\frac{2n-5}{2n+3} = \frac{n}{n}\cdot\frac{2-5/n}{2+3/n} \to 1\,.$$

Ekkor

$$\left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n} = \left(\frac{2n+3-8}{2n+3}\right)^{4n} = \left(1+\frac{-8}{2n+3}\right)^{4n} = \left(1+\frac{1}{\frac{2n+3}{-8}}\right)^{4n}$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+3}{-8}}\right)^{\frac{2n+3}{-8}}\right]^{\frac{-8}{2n+3}\cdot 4n}.$$

A szögletes zárójelben levő kifejezés határértéke e, hiszen

$$h(n) = \frac{2n+3}{-8} \to -\infty\,.$$

A külső kitevő határértéke

$$\frac{-8}{2n+3}\cdot 4n = \frac{-32n}{2n+3} = \frac{n}{n}\cdot\frac{-32}{2+3/n} \to -\frac{32}{2} = -16\,.$$

Így az általunk vizsgált sorozat határértéke e^{-16}.

2. Feladat. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk a következő sorozatokat. Készítsünk ábrát, majd adjuk meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is.

(a) $a_n = \dfrac{5-n}{2n-5}$

Megoldás.

MONOTONITÁS.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{5-(n+1)}{2(n+1)-5} - \frac{5-n}{2n-5} = \frac{4-n}{2n-3} - \frac{5-n}{2n-5} \\
&= \frac{(4-n)(2n-5)-(5-n)(2n-3)}{(2n-3)(2n-5)} \\
&= \frac{(8n-20-2n^2+5n)-(10n-15-2n^2+3n)}{(2n+3)(2n+1)} \\
&= \frac{-5}{(2n-3)(2n-5)} < 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 2\,,
\end{aligned}$$

hiszen a számláló negatív, a nevezőben $2n-3 > 0$, ha $n > 1$ illetve $2n-5 > 0$, ha $n > 2$. Tehát

$$a_{n+1} - a_n < 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 2\,,$$

azaz

$$a_{n+1} < a_n\,, \quad \text{ha} \quad n > 2\,,$$

vagyis $n > 2$ esetén a sorozat monoton csökkenő.

KORLÁTOSSÁG.

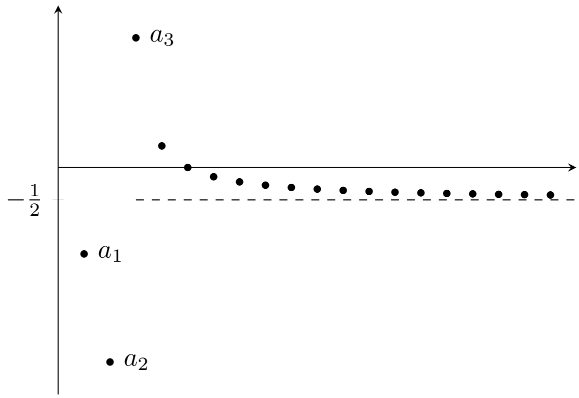
$$\frac{5-n}{2n-5} = \frac{n}{n} \cdot \frac{5/n-1}{2-5/n} \to -\frac{1}{2}\,,$$

azaz a sorozat konvergens, így korlátos.

Mindezek alapján a sorozat $a_3 = 2$–től kezdve monoton csökken $-\dfrac{1}{2}$–ig. Továbbá a_3 előtt véges sok (kettő) elem van, ezeket ki kell számolnunk:

$$a_1 = -\frac{4}{3}\,, \quad a_2 = -3\,.$$

Így $\min a_n = \inf a_n = -3$ és $\max a_n = \sup a_n = 2$.



(b) $a_n = \dfrac{1+n^2}{5-2n}$

Megoldás.

MONOTONITÁS.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1+(n+1)^2}{5-2(n+1)} - \frac{1+n^2}{5-2n} = \frac{n^2+2n+2}{3-2n} - \frac{1+n^2}{5-2n} \\
&= \frac{(n^2+2n+2)(5-2n) - (1+n^2)(3-2n)}{(3-2n)(5-2n)} \\
&= \frac{(5n^2 - 2n^3 + 10n - 4n^2 + 10 - 4n) - (3 - 2n + 3n^2 - 2n^3)}{(3-2n)(5-2n)} \\
&= \frac{-2n^2+8n+7}{(3-2n)(5-2n)} < 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 4\,,
\end{aligned}
$$

ugyanis a nevezőben $3-2n < 0$, ha $n > 1$ illetve $5-2n < 0$, ha $n > 2$, a számlálóban $-2n^2+8n+7 = -2n(n-4)+7 < 0$, ha $n > 4$. Azaz a sorozat monoton csökkenő, ha $n > 4$.

KORLÁTOSSÁG.

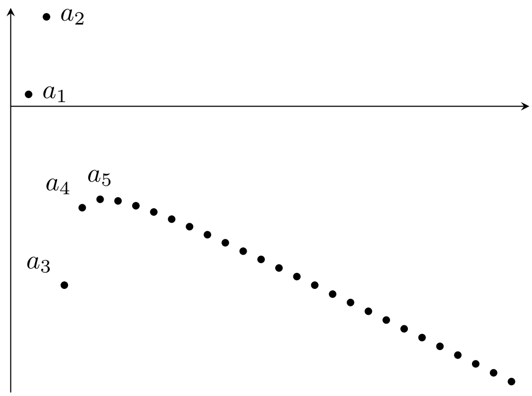
$$
\frac{1+n^2}{5-2n} = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{1/n^2+1}{5/n-2} = n \cdot \frac{1/n^2+1}{5/n-2} \to \text{„}\infty \cdot \frac{1}{-2}\text{”} = -\infty
$$

miatt a sorozat alulról nem korlátos, így minimuma, infimuma sincs.

Az első öt elem

$$
a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = 5,\ a_3 = -10,\ a_4 = -\frac{17}{3},\ a_5 = -\frac{26}{5}\,,
$$

és ezt követően a sorozat monoton csökkenő, ezért a sorozat felülről korlátos, $\max a_n = \sup a_n = 5$.



(c) $a_n = \dfrac{n^2-5}{3n-4}$

Megoldás.

MONOTONITÁS.

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{(n+1)^2-5}{3(n+1)-4} - \frac{n^2-5}{3n-4} = \frac{n^2+2n-4}{3n-1} - \frac{n^2-5}{3n-4} \\ &= \frac{(n^2+2n-4)(3n-4)-(n^2-5)(3n-1)}{(3n-1)(3n-4)} \\ &= \frac{3n^2-5n+11}{(3n-1)(3n-4)} > 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 1\,, \end{aligned}$$

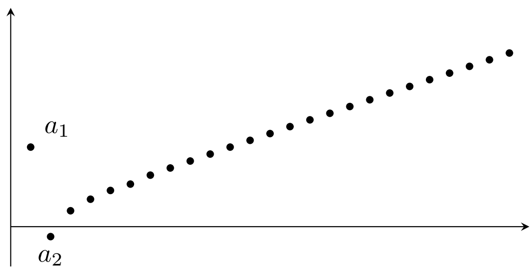
ugyanis $3n-1>0$, minden n–re, illetve $3n-4>0$, ha $n>1$, továbbá $3n^2-5n+11 = n(3n-5)+11>0$, minden n esetén. Azaz a sorozat monoton növő, ha $n>1$.

KORLÁTOSSÁG.

$$\frac{n^2-5}{3n-4} = \frac{n^2}{n}\cdot\frac{1-5/n^2}{3-4/n} = n\cdot\frac{1-5/n^2}{3-4/n} \to \text{„}\infty\cdot\frac{1}{3}\text{”} = \infty$$

alapján kapjuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos, így maximuma, szuprémuma sincs.

Továbbá $a_1 = 4,\ a_2 = -1/2$, és ezt követően monoton növő, ezért a sorozat alulról korlátos, $\min a_n = \inf a_n = -1/2$.



(d) $a_n = \dfrac{n-3}{3n+1}$

Megoldás.

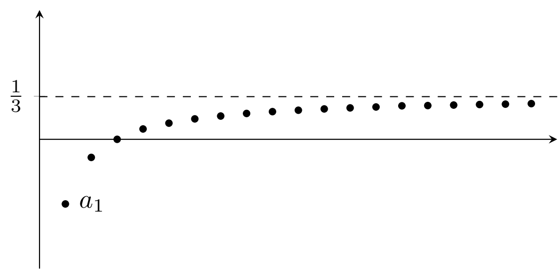
MONOTONITÁS.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)-3}{3(n+1)+1} - \frac{n-3}{3n+1} = \frac{n-2}{3n+4} - \frac{n-3}{3n+1} \\
&= \frac{(n-2)(3n+1)-(n-3)(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} \\
&= \frac{(3n^2-6n+n-2)-(3n^2-9n+4n-12)}{(3n+4)(3n+1)} = \frac{10}{(3n+4)(3n+1)} > 0\,,
\end{aligned}$$

minden n–re, azaz a sorozat monoton növő és így $\min a_n = \inf a_n = a_1 = -1/2$.
KORLÁTOSSÁG.

$$\frac{n-3}{3n+1} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1-3/n}{3+1/n} = \frac{1-3/n}{3+1/n} \to \frac{1}{3}\,,$$

azaz a sorozat konvergens, így korlátos, de a monotonitása miatt maximuma nincs, szuprémuma pedig a határértéke, $\sup a_n = \lim a_n = 1/3$.



Kvízek

A csoport

1. Feladat. Határozzuk meg a $\left(\dfrac{3-2n}{5-2n}\right)^{2n+3}$ sorozat határértékét.

2. Feladat. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2-3}{3n+1}$ sorozatot. Adjuk meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is.

B csoport

1. Feladat. Határozzuk meg az $\left(\dfrac{5n-1}{4n+6}\right)^{1-2n}$ sorozat határértékét.

2. Feladat. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2-1}{1-2n}$ sorozatot. Adjuk meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is.

C csoport

1. Feladat. Határozzuk meg a $\left(\dfrac{4n-1}{3n-2}\right)^{2n+1}$ sorozat határértékét.

2. Feladat. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{5n}{4n-9}$ sorozatot. Adjuk meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is.

A csoport megoldása

1. A kitevő, $2n+3$ határértéke ∞, az alap határértéke

$$\frac{3-2n}{5-2n} = \frac{3/n-2}{5/n-2} \to 1\,.$$

Ekkor

$$\left(\frac{3-2n}{5-2n}\right)^{2n+3} = \left(\frac{5-2n-2}{5-2n}\right)^{2n+3} = \left(1+\frac{-2}{5-2n}\right)^{2n+3} = \left(1+\frac{1}{\frac{5-2n}{-2}}\right)^{2n+3}$$
$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{5-2n}{-2}}\right)^{\frac{5-2n}{-2}}\right]^{\frac{-2}{5-2n}\cdot(2n+3)} \to e^2\,,$$

mert a szögletes zárójelben levő kifejezés határértéke e, a külső kitevő határértéke

$$\frac{-2}{5-2n}\cdot(2n+3) = \frac{-4n-6}{5-2n} = \frac{-4-6/n}{5/n-2} \to 2\,.$$

2.

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{(n+1)^2-3}{3(n+1)+1} - \frac{n^2-3}{3n+1} = \frac{n^2+2n-2}{3n+4} - \frac{n^2-3}{3n+1} \\ &= \frac{(n^2+2n-2)(3n+1)-(n^2-3)(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} \\ &= \frac{(3n^3+n^2+6n^2+2n-6n-2)-(3n^3+4n^2-9n-12)}{(3n+4)(3n+1)} \\ &= \frac{3n^2+5n+10}{(3n+4)(3n+1)} > 0\,, \quad \text{minden } n\text{–re, azaz a sorozat monoton növő.} \end{aligned}$$

Ezért alulról korlátos, és így $\inf a_n = a_1 = -2/4 = -1/2$. Ugyanakkor

$$\frac{n^2-3}{3n+1} = \frac{n^2}{n}\cdot\frac{1-3/n^2}{3+1/n} = n\cdot\frac{1-3/n^2}{3+1/n} \to „\infty\cdot\frac{1}{3}" = \infty$$

miatt a sorozat felülről nem korlátos, így szuprémuma nincs.

B csoport megoldása

1. A kitevő, $1-2n$ határértéke $-\infty$, ezért

$$\left(\frac{5n-1}{4n+6}\right)^{1-2n} = \left(\frac{4n+6}{5n-1}\right)^{2n-1}.$$

Az új alap határértéke

$$\frac{4n+6}{5n-1} = \frac{n}{n}\cdot\frac{4+6/n}{5-1/n} = \frac{4+6/n}{5-1/n} \to \frac{4}{5}\ \left(=\frac{8}{10}\right),$$

ami 1–nél kisebb pozitív szám. Így például

$$\frac{7}{10} < \frac{4n+6}{5n-1} < \frac{9}{10}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy,}$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{2n-1} < \left(\frac{4n+6}{5n-1}\right)^{2n-1} < \left(\frac{9}{10}\right)^{2n-1}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Mivel $\left(\frac{7}{10}\right)^{2n-1} \to 0$, hiszen $\left(\frac{7}{10}\right)^{n}$-nek részsorozata, $\left(\frac{9}{10}\right)^{2n-1} \to 0$, hiszen $\left(\frac{9}{10}\right)^{n}$–nek részsorozata, így a rendőrelv szerint $\left(\frac{4n+6}{5n-1}\right)^{2n-1} \to 0.$

2.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{(n+1)^2-1}{1-2(n+1)} - \frac{n^2-1}{1-2n} = \frac{n^2+2n}{-1-2n} - \frac{1+n^2}{1-2n}\\
&= \frac{(n^2+2n)(1-2n)-(n^2-1)(-1-2n)}{(-1-2n)(1-2n)}\\
&= \frac{(n^2-2n^3+2n-4n^2)-(-n^2-2n^3+1+2n)}{(-1-2n)(1-2n)}\\
&= \frac{-2n^2-1}{(-1-2n)(1-2n)} < 0,
\end{aligned}$$

jól láthatóan minden n–re, azaz a sorozat monoton csökkenő. Ezért felülről korlátos, és így $\sup a_n = a_1 = 0$. Ugyanakkor

$$\frac{n^2-1}{1-2n} = \frac{n^2}{n}\cdot\frac{1-1/n^2}{1/n-2} = n\cdot\frac{1-1/n^2}{1/n-2} \to \text{„}\infty\cdot\frac{1}{-2}\text{”} = -\infty,$$

miatt a sorozat alulról nem korlátos, így infimuma nincs.

C csoport megoldása

1. A kitevő határértéke ∞. Az alap határértéke

$$\frac{4n-1}{3n-2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{4-1/n}{3-2/n} = \frac{4-1/n}{3-2/n} \to \frac{4}{3} \ \left(= \frac{8}{6}\right),$$

ami 1–nél nagyobb szám. Ezért például

$$\frac{4n-1}{3n-2} > \frac{7}{6}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy,}$$

és így

$$\left(\frac{4n-1}{3n-2}\right)^{2n+1} > \left(\frac{7}{6}\right)^{2n+1}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Mivel $\left(\frac{7}{6}\right)^{2n+1} \to \infty$, hiszen $\left(\frac{7}{6}\right)^{n}$–nek részsorozata, így $\left(\frac{4n-1}{3n-2}\right)^{2n+1} \to \infty$.

2.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+1)}{4(n+1)-9} - \frac{5n}{4n-9} = \frac{5n+5}{4n-5} - \frac{5n}{4n-9}$$
$$= \frac{(5n+5)(4n-9) - 5n(4n-5)}{(4n-5)(4n-9)} = \frac{(20n^2 - 45n + 20n - 45) - 20n^2 + 25n}{(4n-5)(4n-9)}$$
$$= \frac{-45}{(4n-5)(4n-9)} < 0\,, \quad \text{ha} \quad n > 2\,,$$

ugyanis $4n-5>0$, ha $n>1$, $4n-9>0$, ha $n>2$, azaz a_n monoton csökkenő, ha $n>2$.

$$\frac{5n}{4n-9} = \frac{n}{n} \cdot \frac{5}{4-9/n} \to \frac{5}{4}\,,$$

azaz a sorozat konvergens, így korlátos is.

Tehát a sorozat $a_3 = \frac{15}{3} = 5$ –től kezdve monoton csökken $5/4$–ig.

$a_1 = \frac{5}{-5} = -1\,,\ \ a_2 = \frac{10}{-1} = -10$ szerint $\inf a_n = -10$ és $\sup a_n = 5$.

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\left(\frac{4-3n}{5-3n}\right)^{1-2n}$ (c) $\left(\frac{5n+2}{6n-5}\right)^{4-n}$ (e) $\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{5-3n}$

(b) $\left(\frac{5n-7}{4n+3}\right)^{3n+4}$ (d) $\left(\frac{2n-7}{n+3}\right)^{1-2n}$ (f) $\left(\frac{2-n}{5-3n}\right)^{3n}$

2. Feladat. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk a következő sorozatokat. Adjuk meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is.

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n-7}$ (d) $a_n = \frac{2-n}{5-3n}$ (g) $a_n = \frac{1-n^2}{2n-3}$

(b) $a_n = \frac{4-n}{n+2}$ (e) $a_n = \frac{n^2+1}{4n-5}$ (h) $a_n = \frac{1-2n^2}{9-4n}$

(c) $a_n = \frac{3n+1}{7-2n}$ (f) $a_n = \frac{n^2}{7-3n}$ (i) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n-3}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $e^{-2/3}$ (b) ∞ (c) ∞ (d) 0 (e) e^{-3} (f) 0

2. Feladat megoldása.

(a) csökkenő, ha $n > 3$, korlátos, $\inf a_n = -4$ és $\sup a_n = 5$

(b) csökkenő, korlátos, $\inf a_n = -1$ és $\sup a_n = 1$

(c) növő, ha $n > 3$, korlátos, $\inf a_n = -13$ és $\sup a_n = 10$

(d) növő, ha $n > 1$, korlátos, $\inf a_n = 0$ és $\sup a_n = 1/2$

(e) növő, ha $n > 2$, alulról korlátos, $\inf a_n = -2$, felülről nem korlátos, ezért $\sup a_n$ nem létezik

(f) csökkenő, ha $n > 4$, alulról nem korlátos, ezért $\inf a_n$ nem létezik, felülről korlátos, $\sup a_n = 4$

(g) csökkenő, ha $n > 2$, alulról nem korlátos, ezért $\inf a_n$ nem létezik, felülről korlátos, $\sup a_n = 0$

(h) növő, ha $n > 3$, alulról korlátos, $\inf a_n = -7$, felülről nem korlátos, ezért $\sup a_n$ nem létezik

(i) növő, ha $n > 2$, alulról korlátos, $\inf a_n = -4$, felülről nem korlátos, ezért $\sup a_n$ nem létezik

5. óra

Rekurzív sorozatok, lineáris függvénytranszformáció

Házi feladatok

1. Feladat. A tanult módon vizsgáljuk az alábbi rekurzív sorozatokat (monotonitás, korlátosság vizsgálata, határérték megadása):

(a) $a_1 = 3\,, \quad 6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \;\; (n > 1)$

Megoldás.
1. LÉPÉS: Tegyük fel, hogy az a_n sorozat konvergens és határértéke A, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a határértékre vonatkozó műveleti szabályok alapján

$$6a_n \to 6A \quad \text{és} \quad a_{n-1}^2 + 8 \to A^2 + 8$$

vagyis

$$6A = A^2 + 8\,,$$

ahonnan $A^2 - 6A + 8 = 0$. Ezt megoldva azt kapjuk, hogy a határérték vagy $A = 2$ vagy $A = 4$ lehet.

2. LÉPÉS: Vizsgáljuk a sorozat monotonitását.
Ha $a_1 = 3$, akkor $a_2 = \dfrac{a_1^2 + 8}{6} = \dfrac{3^2 + 8}{6} = \dfrac{17}{6} < a_1 = \dfrac{18}{6}$, azaz azt sejtjük, hogy a sorozat monoton csökkenő. Bizonyítsuk ezt n-szerinti teljes indukcióval:

(i) $n = 1$ esetén kiszámoltuk, hogy $a_1 > a_2$.

(ii) Tegyük fel, hogy n–re igaz az állítás, azaz $a_n > a_{n+1}$ teljesül. Ekkor ellenőrizve, hogy $a_n > 0$, kapjuk, hogy

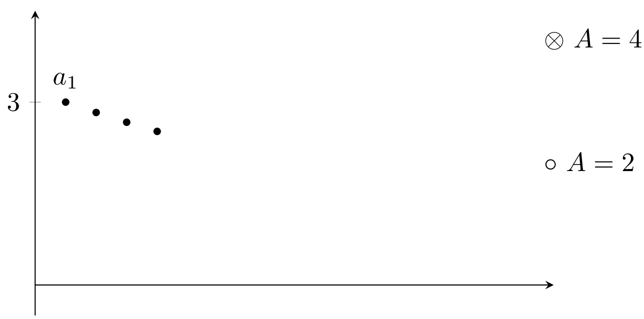
$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ a_n^2 &> a_{n+1}^2 \\ a_n^2 + 8 &> a_{n+1}^2 + 8 \\ \frac{a_n^2+8}{6} &> \frac{a_{n+1}^2+8}{6}\,, \end{aligned}$$

azaz

$$a_{n+1} > a_{n+2}\,.$$

(iii) Tehát megmutattuk, hogy az állítás igaz $(n+1)$–re, így az állítás igaz minden n–re.

Azaz a sorozat monoton csökkenő. Így $a_1 = 3$ miatt a határérték nem lehet 4.



3. LÉPÉS: Vizsgáljuk a sorozat korlátosságát.
Mivel $a_1 = 3$, a sorozat csökkenő és a lehetséges határértékek $A = 2$, ezért azt szeretnénk belátni, hogy $2 < a_n \leq 3$. Ezt is teljes indukcióval bizonyítjuk:

(i) $n = 1$ esetén természetesen $2 < a_1 \leq 3$.

(ii) Tegyük fel, hogy n–re igaz az állítás, azaz $2 < a_n \leq 3$ teljesül. Ekkor figyelembe véve, hogy $a_n > 0$, kapjuk, hogy

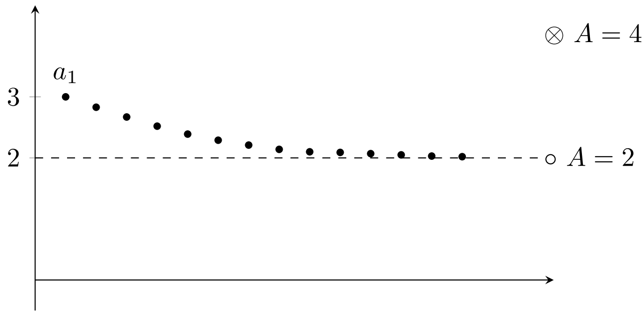
$$\begin{gathered} 2 < a_n \leq 3 \\ 4 < a_n^2 \leq 9 \\ 12 < a_n^2 + 8 \leq 17 \\ 2 < \frac{a_n^2+8}{6} \leq \frac{17}{6} < \frac{18}{6} = 3\,, \end{gathered}$$

azaz

$$2 < a_{n+1} \leq 3\,.$$

(iii) Így igazoltuk, hogy az állítás teljesül $(n+1)$–re, tehát az állítás igaz minden n–re.

Ezért a sorozat korlátos.



4. LÉPÉS: Összefoglalva:
A sorozat monoton és korlátos, így konvergens és a fentiek alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

(b) $a_1 = 17/9\,,\quad a_n = \sqrt{5a_{n-1} - 6}\ \ (n > 1)$

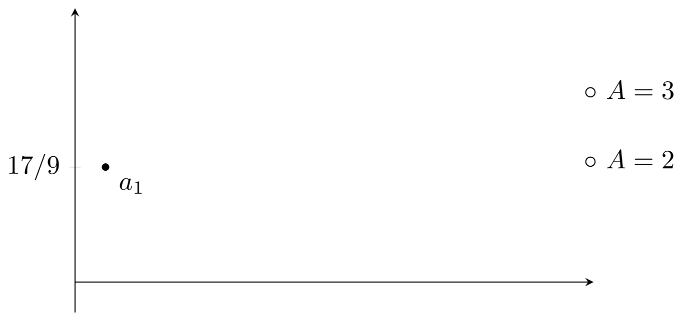
Megoldás.
1. LÉPÉS: Tegyük fel, hogy az a_n sorozat konvergens és határértéke A, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor feltéve, hogy $5a_n - 6 \geq 0$

$$\sqrt{5a_{n-1} - 6} \to \sqrt{5A - 6} \quad \text{és így } A = \sqrt{5A - 6}\,,$$

vagyis

$$A^2 = 5A - 6\,,$$

ahonnan $A^2 - 5A + 6 = 0$. Tehát a határérték vagy $A = 2$ vagy $A = 3$ lehet.



2. LÉPÉS: Vizsgáljuk a sorozat monotonitását.
Ekkor

$$a_1 = \frac{17}{9} = \sqrt{\frac{289}{81}}\,,\quad a_2 = \sqrt{5 \cdot \frac{17}{9} - 6} = \sqrt{\frac{31}{9}} = \sqrt{\frac{279}{81}}$$

alapján azt sejtjük, hogy a sorozat monoton csökkenő. Bizonyítsuk ezt n-szerinti teljes indukcióval:

(i) Amint azt láttuk, $n = 1$ esetén az állítás igaz, $a_1 > a_2$.

(ii) Tegyük fel, hogy n–re igaz az állítás, azaz $a_n > a_{n+1}$ teljesül. Ekkor feltéve, hogy $5a_n - 6 \geq 0$

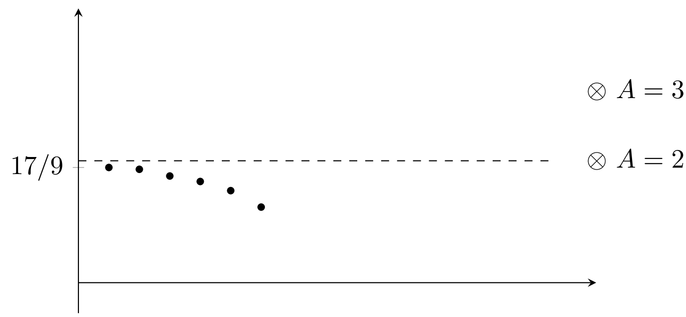
$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ 5a_n &> 5a_{n+1} \\ 5a_n - 6 &> 5a_{n+1} - 6 \\ \sqrt{5a_n - 6} &> \sqrt{5a_{n+1} - 6}\,, \end{aligned}$$

azaz

$$a_{n+1} > a_{n+2}\,.$$

(iii) Tehát megmutattuk, hogy az állítás igaz $(n+1)$–re, így az állítás igaz minden n–re.

Azaz a sorozat monoton csökkenő. Így $a_1 = 17/9$ miatt a határérték nem lehet sem 3, sem 2, azaz a sorozat nem lehet konvergens.



Megjegyzés: Az $5a_n - 6 \geq 0$ feltétel $n = 8$ esetén már nem teljesül, azaz a_n már nem definiált $n \geq 9$–re.

(c) $a_1 = 3\,, \quad a_n = \dfrac{6a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 2} \quad (n > 1)$

Megoldás.

1. lépés: Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor

$$\frac{6a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 2} \to \frac{6A + 5}{A + 2} \quad (A \neq -2)\,,$$

vagyis

$$A = \frac{6A + 5}{A + 2}\,, \quad A^2 + 2A = 6A + 5\,,$$

tehát vagy $A = -1$ vagy $A = 5$. De a képzési szabály miatt $a_n > 0$, így a határérték csak $A = 5$ lehet.

2. LÉPÉS: Monotonitás.
Mivel $a_1 = 3$, így

$$a_2 = \frac{6a_1 + 5}{a_1 + 2} = \frac{6 \cdot 3 + 5}{3 + 2} = \frac{23}{5} > a_1 = \frac{15}{5}\,,$$

ezért azt sejtjük, hogy a sorozat monoton növő. Bizonyítsuk ezt teljes indukcióval. Ehhez írjuk a_n–t a következő alakba:

$$a_n = \frac{6a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 2} = \frac{6(a_{n-1} + 2) - 7}{a_{n-1} + 2} = 6 - \frac{7}{a_{n-1} + 2}\,.$$

(i) $n = 1$ esetén ellenőriztük, hogy $a_1 < a_2$.

(ii) Tegyük fel, hogy n–re igaz az állítás, azaz $a_n < a_{n+1}$ teljesül. Ekkor $a_n > 0$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ a_n + 2 &< a_{n+1} + 2 \\ \frac{1}{a_n + 2} &> \frac{1}{a_{n+1} + 2} \\ -\frac{7}{a_n + 2} &< -\frac{7}{a_{n+1} + 2} \\ 6 - \frac{7}{a_n + 2} &< 6 - \frac{7}{a_{n+1} + 2}\,, \end{aligned}$$

azaz

$$a_{n+1} < a_{n+2}\,.$$

(iii) Tehát megmutattuk, hogy az állítás igaz $(n + 1)$–re.

Ezért a sorozat monoton növő.

3. LÉPÉS: Korlátosság.
Mivel $a_1 = 3$, a sorozat növő és a határérték csak $A = 5$ lehet, ezért azt szeretnénk belátni, hogy $3 \leq a_n < 5$. Teljes indukcióval kapjuk, hogy:

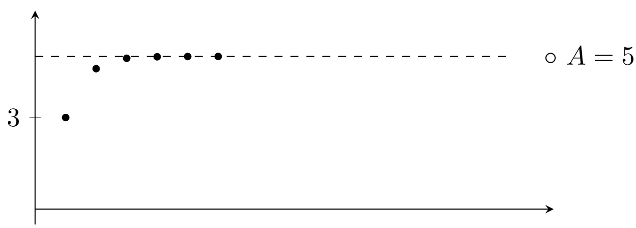
(i) $n = 1$ esetén természetesen $3 \leq a_1 < 5$.

(ii) Tegyük fel, hogy n–re igaz az állítás, azaz $3 \leq a_n < 5$ teljesül. Ekkor, figyelembe véve, hogy $a_n > 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} 3 \leq & a_n & < 5 \\ 5 \leq & a_n + 2 & < 7 \\ \dfrac{1}{5} \geq & \dfrac{1}{a_n + 2} & > \dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{7}{5} \leq & -\dfrac{7}{a_n + 2} & < -1 \\ 3 < \dfrac{23}{5} \leq & 6 - \dfrac{7}{a_n + 2} & < 5\,, \quad \text{tehát} \\ 3 \leq & a_{n+1} & < 5\,. \end{array}$$

(iii) Azaz bizonyítottuk $(n + 1)$–re.

Tehát a sorozat korlátos.



4. LÉPÉS: Összefoglalva:
Monoton, korlátos sorozat konvergens. Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

2. Feladat. Lineáris függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

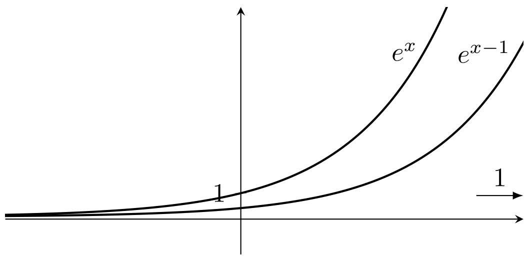
(a) $f(x) = 2e^{(x/5)-1}$

Megoldás. Bonyolultabb függvénytranszformáció eredménye megkapható több egyszerű transzformáció egymás utáni végrehajtásával. Az egyes lépésekhez tartozó ábrákon jól látható, hogy az adott lineáris transzformáció hogyan mozgatja a függvény grafikonját. Ezért egy ábrába mindig csak egy transzformációs lépést rajzolunk, továbbá jelezzük a mozgás irányát is.

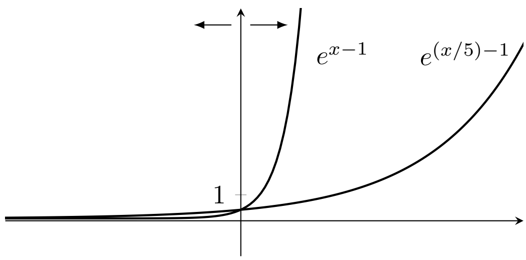
Az alapfüggvény: $f_0(x) = e^x$.

Egy lehetséges lépéssorozat például a következő:

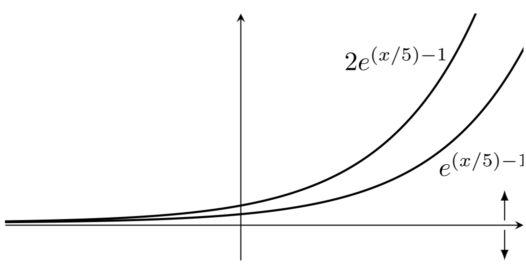
1. LÉPÉS: $f_0(x-1) = e^{x-1} = f_1(x)$



2. LÉPÉS: $f_1(x/5) = e^{(x/5)-1} = f_2(x)$



3. LÉPÉS: $2f_2(2x) = 2e^{(x/5)-1} = f(x)$

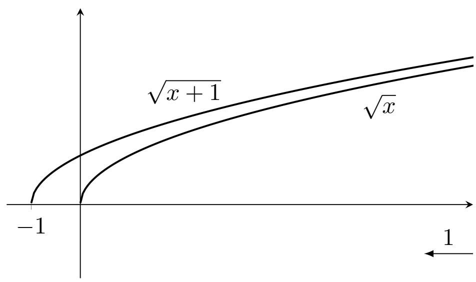


(b) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{1+2x}}{3}$

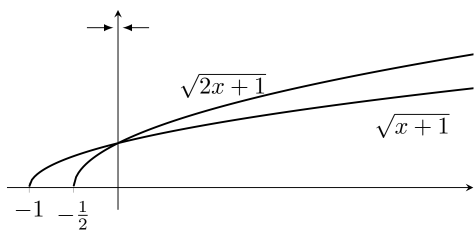
Megoldás. Az alapfüggvény: $f_0(x) = \sqrt{x}$.

Egy lehetséges lépéssorozat:

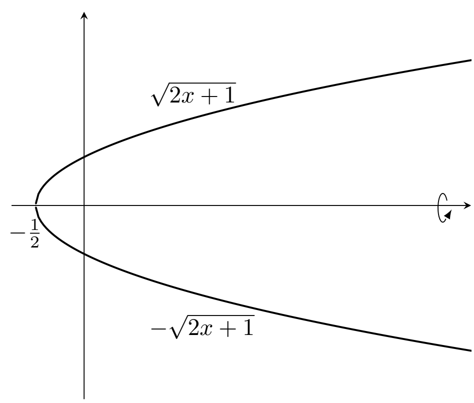
1. LÉPÉS: $f_0(x+1) = \sqrt{x+1} = f_1(x)$



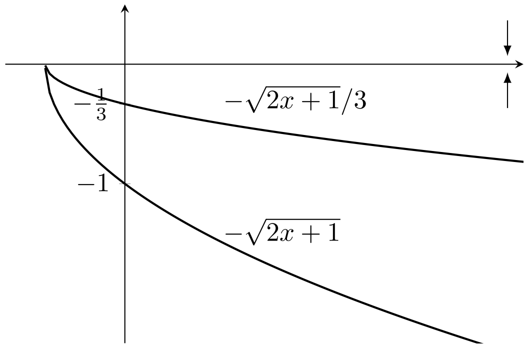
2. LÉPÉS: $f_1(2x) = \sqrt{2x+1} = f_2(x)$



3. LÉPÉS: $f_2(-x) = -\sqrt{2x+1} = f_3(x)$



4. LÉPÉS: $f_3(x)/3 = \dfrac{-\sqrt{2x+1}}{3} = f(x)$

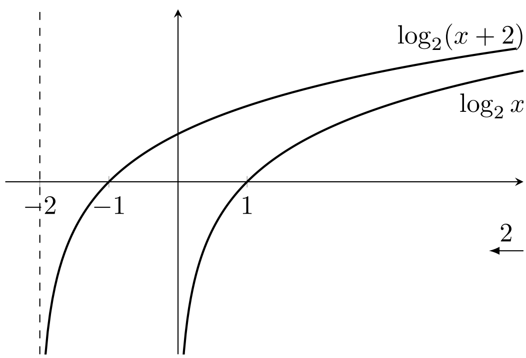


(c) $f(x) = 1 + \log_2(2 - 3x)$

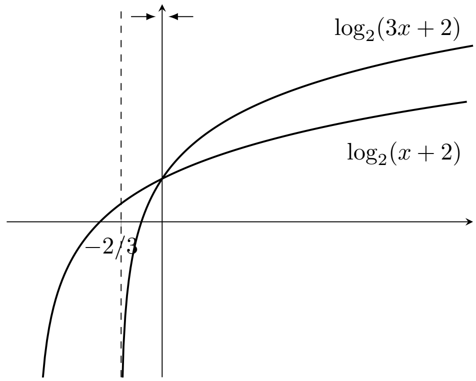
Megoldás. Alapfüggvény: $f_0(x) = \log_2 x$

Egy lehetséges lépéssorozat:

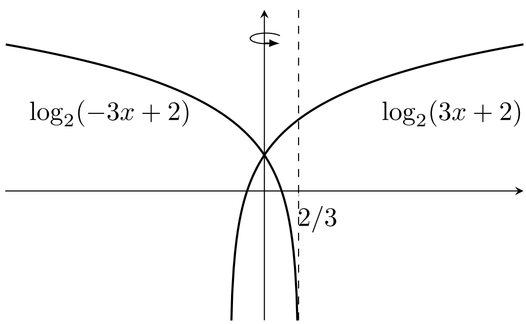
1. LÉPÉS: $f_0(x + 2) = \log_2(x + 2) = f_1(x)$



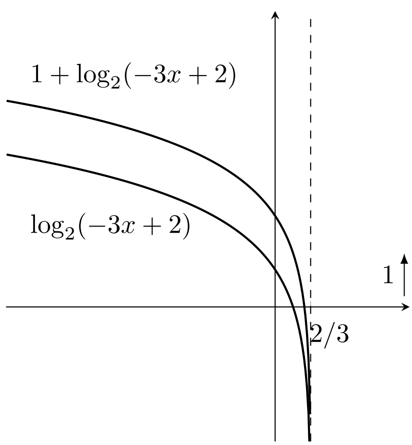
2. LÉPÉS: $f_1(3x) = \log_2(3x+2) = f_2(x)$



3. LÉPÉS: $f_2(-x) = \log_2(-3x+2) = f_3(x)$



4. LÉPÉS: $f_3(x) + 1 = \log_2(-3x+2) + 1 = f(x)$



Kvízek

A csoport

Feladat. A tanult módon vizsgáljuk az

$$a_1 = 6\,, \quad a_n = \sqrt{7a_{n-1} - 10} \ \ (n > 1)$$

rekurzív sorozatot (monotonitás, korlátosság vizsgálata, határérték megadása).

B csoport

1. Feladat. Monotonitás szempontjából vizsgáljuk az

$$a_1 = 3\,, \quad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 2} \ \ (n > 1)$$

rekurzív sorozatot.

2. Feladat. Az $f_0(x) = \ln x$ alapfüggvényből kiindulva lineáris függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ függvényt.

C csoport

1. Feladat. Korlátosság szempontjából vizsgáljuk az

$$a_1 = 2\,, \quad 4a_n = a_{n-1}^2 + 3 \ \ (n > 1)$$

rekurzív sorozatot.

2. Feladat. Az $f_0(x) = e^x$ alapfüggvényből kiindulva lineáris függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = -e^{2x-3}$ függvényt.

A csoport megoldása

1. LÉPÉS: Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor feltéve, hogy $7a_n - 10 \geq 0$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7A-10} \\ A^2 &= 7A - 10 \\ 0 &= A^2 - 7A + 10 \\ A_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}, \quad \text{tehát vagy } A = 5 \ \text{ vagy } \ A = 2. \end{aligned}$$

2. LÉPÉS: Monotonitás.

(i) $n = 1$ esetén $a_2 = \sqrt{7 \cdot 6 - 10} = \sqrt{32}$, $a_1 = 6 = \sqrt{36}$, azaz $a_1 > a_2$.

(ii) Tegyük fel, hogy $a_n > a_{n+1}$ teljesül. Ekkor, feltéve, hogy $7a_n - 10 \geq 0$

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ 7a_n &> 7a_{n+1} \\ 7a_n - 10 &> 7a_{n+1} - 10 \\ \sqrt{7a_n - 10} &> \sqrt{7a_{n+1} - 10}\,, \quad \text{azaz} \\ a_{n+1} &> a_{n+2}\,. \end{aligned}$$

(iii) Bizonyítottuk $(n+1)$–re, tehát a sorozat monoton csökkenő.

3. LÉPÉS: Korlátosság.
Mivel $a_1 = 6$, a sorozat csökkenő és a határérték vagy $A = 5$ vagy $A = 2$ lehet, ezért teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $5 < a_n \leq 6$.

(i) $n = 1$ esetén természetesen $5 < a_n \leq 6$.

(ii) Tegyük fel, hogy $5 < a_n \leq 6$ teljesül. Feltéve, hogy $7a_n - 10 \geq 0$ kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} 5 < & a_n & \leq 6 \\ 35 < & 7a_n & \leq 42 \\ 25 < & 7a_n - 10 & \leq 32 \\ 5 = \sqrt{25} < & \sqrt{7a_{n+1} - 10} & \leq \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6\,, \quad \text{azaz} \\ 5 < & a_{n+1} & \leq 6 \end{array}$$

(iii) Bizonyítottuk $(n+1)$–re, azaz a sorozat korlátos.

4. LÉPÉS: Összefoglalva:
Monoton, korlátos sorozat konvergens, és $5 < a_n \leq 6$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

B csoport megoldása

1. Mivel $a_1 = 3$, így

$$a_2 = \frac{3a_1 + 2}{a_1 + 2} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3 + 2} = \frac{11}{5} < a_1 = \frac{15}{5}\,, \quad \text{sejtés: csökkenő.}$$

Teljes indukcióval bizonyítunk.

$$a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 2} = \frac{3(a_{n-1} + 2) - 4}{a_{n-1} + 2} = 3 - \frac{4}{a_{n-1} + 2} \quad \text{alapján}$$

(i) $n = 1$ esetén ellenőriztük, hogy $a_1 > a_2$.

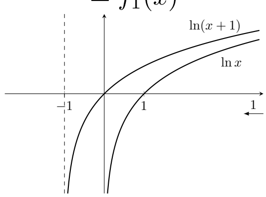
(ii) Tegyük fel, hogy $a_n > a_{n+1}$ teljesül. Ekkor $a_n > 0$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ a_n + 2 &> a_{n+1} + 2 \\ \frac{1}{a_n + 2} &< \frac{1}{a_{n+1} + 2} \\ -\frac{4}{a_n + 2} &> -\frac{4}{a_{n+1} + 2} \\ 3 - \frac{4}{a_n + 2} &> 3 - \frac{4}{a_{n+1} + 2}\,, \quad \text{azaz} \\ a_{n+1} &> a_{n+2}\,. \end{aligned}$$

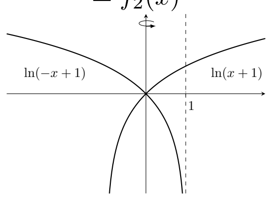
(iii) Így az állítás igaz $(n+1)$–re, azaz a sorozat monoton csökkenő.

2. Alapfüggvény: $f_0(x) = \ln x$. Egy lehetséges lépéssorozat:

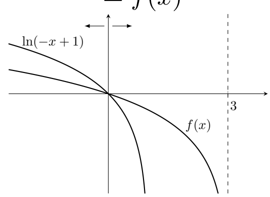
1. LÉPÉS:
$f_0(x+1) = \ln(x+1)$
$= f_1(x)$



2. LÉPÉS:
$f_1(-x) = \ln(-x+1)$
$= f_2(x)$



3. LÉPÉS:
$f_2(x/3) = \ln(-x/3+1)$
$= f(x)$



C csoport megoldása

1. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor

$$\begin{aligned} 4A &= A^2 + 3 \\ 0 &= A^2 - 4A + 3 \\ A_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}, \quad \text{tehát vagy } A = 3 \text{ vagy } A = 1\,. \end{aligned}$$

Korlátosság. Mivel $a_1 = 2$, és a lehetséges határértékek vagy $A = 3$ vagy $A = 1$, ezért teljes indukcióval igazoljuk, hogy $1 < a_n < 3$.

(i) $n = 1$ esetén természetesen $1 < a_1 < 3$.

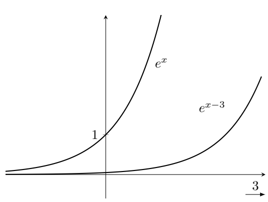
(ii) Tegyük fel, hogy $1 < a_n < 3$ teljesül. Ekkor

$$\begin{array}{lcl} 1 < & a_n & < 3 \\ 1 < & a_n^2 & < 9 \\ 4 < & a_n^2 + 3 & < 12 \\ 1 < & \dfrac{a_n^2+3}{4} & < 3\,, \quad \text{azaz} \\ 1 < & a_{n+1} & < 3\,. \end{array}$$

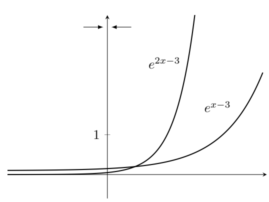
(iii) Bizonyítottuk $(n+1)$–re, azaz a sorozat korlátos.

2. Alapfüggvény: $f_0(x) = e^x$. Egy lehetséges lépéssorozat:

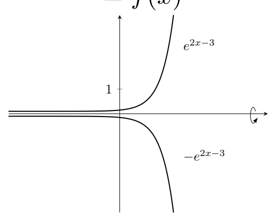
1. LÉPÉS:
$f_0(x-3) = e^{x-3}$
$= f_1(x)$



2. LÉPÉS:
$f_1(2x) = e^{2x-3}$
$= f_2(x)$



3. LÉPÉS:
$-1 \cdot f_2(x) = -e^{2x-3}$
$= f(x)$



További gyakorló feladatok

1. Feladat. A tanult módon vizsgáljuk az alábbi rekurzív sorozatokat (monotonitás, korlátosság vizsgálata, határérték megadása):

(a) $a_1 = 1\,, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \quad (n > 1)$

(b) $a_1 = 3\,, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \quad (n > 1)$

(c) $a_1 = 6\,, \quad a_n = \sqrt{6a_{n-1} - 5} \quad (n > 1)$

(d) $a_1 = 4\,, \quad a_n = \sqrt{6a_{n-1} - 5} \quad (n > 1)$

(e) $a_1 = 1\,, \quad 6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \quad (n > 1)$

(f) $a_1 = 5\,, \quad 6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \quad (n > 1)$

(g) $a_1 = 5\,, \quad 7a_n = a_{n-1}^2 + 6 \quad (n > 1)$

(h) $a_1 = 6\,, \quad a_n = \dfrac{6a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 2} \quad (n > 1)$

(i) $a_1 = 4\,, \quad a_n = \dfrac{6a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 2} \quad (n > 1)$

2. Feladat. Lineáris függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

(b) $f(x) = 3\sqrt{\frac{x}{2} + 1}$

(c) $f(x) = -\sin(\frac{x}{2} + \pi)$

(d) $f(x) = 2e^{1-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{3}$

(f) $f(x) = -e^{3x-1}$

(g) $f(x) = \ln(1 + 2x) + 1$

(h) $f(x) = \log_{1/2}(4 - 3x)$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $1 \leq a_n < 2$, növő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

(b) $2 < a_n \leq 3$, csökkenő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

(c) $5 < a_n \leq 6$, csökkenő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

(d) $4 \leq a_n < 5$, növő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

(e) $1 \leq a_n < 2$, növő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

(f) $5 \leq a_n$, növő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik

(g) $1 < a_n \leq 5$, csökkenő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

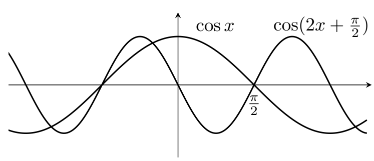
(h) $5 < a_n \leq 6$, csökkenő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

(i) $4 \leq a_n < 5$, növő, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

2. Feladat megoldása.

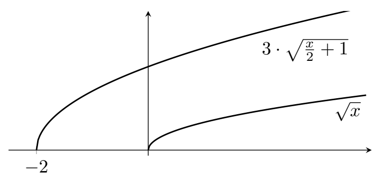
(a) Alapfüggvény: $f_0(x) = \cos x$

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(2x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$



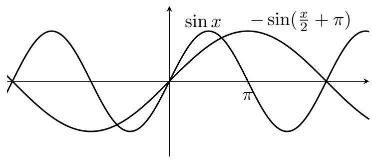
(b) Alapfüggvény: $f_0(x) = \sqrt{x}$

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x + 1) = \sqrt{x + 1} = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{x}{2} + 1} = f_2(x)$
2. LÉPÉS: $3f_2(x) = 3 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 1} = f(x)$



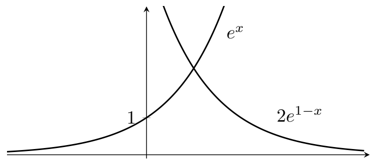
(c) Alapfüggvény: $f_0(x) = \sin x$

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x+\pi) = \sin(x+\pi) = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{x}{2}+\pi) = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $-f_2(x) = -\sin(\frac{x}{2}+\pi) = f(x)$



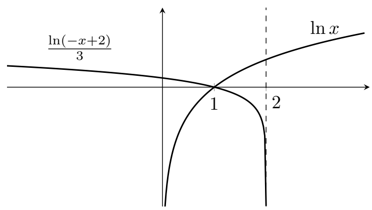
(d) Alapfüggvény: $f_0(x) = e^x$.

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x+1) = e^{x+1} = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(-x) = e^{-x+1} = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $2 \cdot f_2(x) = 2e^{-x+1} = f(x)$



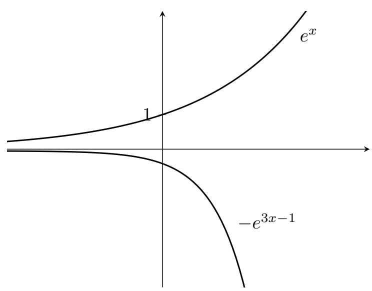
(e) Alapfüggvény: $f_0(x) = \ln x$.

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x+2) = \ln(x+2) = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(-x) = \ln(-x+2) = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $\dfrac{f_2(x)}{3} = \dfrac{\ln(-x+2)}{3} = f(x)$



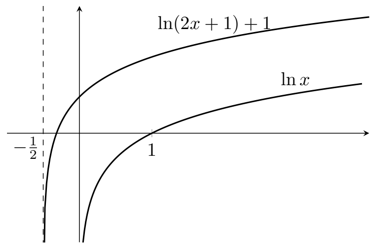
(f) Alapfüggvény: $f_0(x) = e^x$.

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x-1) = e^{x-1} = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(3x) = e^{3x-1} = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $-f_2(x) = -e^{3x-1} = f(x)$



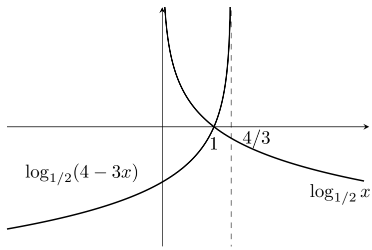
(g) Alapfüggvény: $f_0(x) = \ln x$.

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x+1) = \ln(x+1) = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(2x) = \ln(2x+1) = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $f_2(x)+1 = \ln(2x+1)+1 = f(x)$



(h) Alapfüggvény: $f_0(x) = \log_{1/2} x$.

Egy lehetséges lépéssorozat:
1. LÉPÉS: $f_0(x+4) = \log_{1/2}(x+4) = f_1(x)$
2. LÉPÉS: $f_1(3x) = \log_{1/2}(3x+4) = f_2(x)$
3. LÉPÉS: $f_2(-x) = \log_{1/2}(-3x+4) = f(x)$



6. óra

Függvényhatárérték

Házi feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^3}{5+x^2}$

Megoldás. Végtelenben vett határérték. Ilyenkor a sorozatoknál tanultak szerint oldjuk meg a feladatot.

Ez egy "$\dfrac{\infty}{\infty}$" típusú határérték. A számláló és a nevező domináns tagját kiemelve, az első szorzótényezőt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2x^3}{5+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1/x^2-2}{5/x^2+1} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1/x^2-2}{5/x^2+1} = \text{"}\infty \cdot \frac{-2}{1}\text{"} = -\infty\,.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2x^3}{5+x^2}$

Megoldás. Mínusz végtelenben vett határérték. Mivel a feladatban nincs négyzetgyökös kifejezés, ezért itt is a sorozatoknál tanult módszerrel dolgozunk. "$\dfrac{\infty}{\infty}$" típus.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2x^3}{5+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1/x^2-2}{5/x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{1/x^2-2}{5/x^2+1} = \text{"}-\infty \cdot \frac{-2}{1}\text{"} = \infty\,.$$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+x+\sqrt[3]{x^2}\right)$

Megoldás. Mínusz végtelenben vett határérték. "$-\infty+\infty$" alak. A tanult módon

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+x+\sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \text{"}-\infty \cdot 1\text{"} = -\infty\,.$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2x-5})$

Megoldás. Mínusz végtelenben vett határérték. ”$-\infty+\infty$” alak. Mivel a feladatban van négyzetgyökös kifejezés, ezért célszerű az $x=-y$ helyettesítéssel visszavezetni a feladatot $+\infty$–ben vett határértékre (u. is $\sqrt{x^2}=|x|$):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2x-5}) &= \lim_{y\to\infty}(-y+\sqrt{(-y)^2+2(-y)-5})\\ &= \lim_{y\to\infty}(-y+\sqrt{y^2-2y-5})\\ &= \lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-2y-5}-y)\cdot\frac{\sqrt{y^2-2y-5}+y}{\sqrt{y^2-2y-5}+y}\\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{y^2-2y-5-y^2}{\sqrt{y^2-2y-5}+y}=\lim_{y\to\infty}\frac{-2y-5}{\sqrt{y^2-2y-5}+y}\\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt{y^2}}\frac{-2-5/y}{\sqrt{1-2/y-5/y^2}+1}\\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{-2-5/y}{\sqrt{1-2/y-5/y^2}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1\,,\end{aligned}$$

ugyanis $y\to\infty$, ezért $y>0$, tehát $\sqrt{y^2}=|y|=y$.

2. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{4+x^2}$

Megoldás. Végesben vett határérték. A "hely" behelyettesítésével megállapítjuk a határérték típusát.

Esetünkben x helyére 2–t írva elvegezhető műveletet kapunk, így ez lesz a határérték is:

$$\lim_{x\to2}\frac{2-x}{4+x^2}=\frac{2-2}{4+2^2}=\frac{0}{8}=0\,.$$

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{4-x^2}$

Megoldás. Végesben vett határérték. Behelyettesítve a 2–t kapjuk, hogy a határérték ”$\dfrac{0}{0}$” típusú. Ebben az esetben az eredmény bármi lehet. Ilyenkor szorzattá alakítunk, majd egyszerűsítünk. Ezt követően az egyszerűsített kifejezésbe újból behelyettesítünk.

$$\lim_{x\to2}\frac{2-x}{4-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{(2-x)(2+x)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{4}\,.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-x^2}$

Megoldás. Végesben vett "$\dfrac{0}{0}$" típusú határérték.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{-x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{-x} = \frac{0}{-1} = 0\,.$$

(d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}\,.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-x^2-3}{x^3+x^2-2x}$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{4x-x^2-3}{x^3+x^2-2x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3-x)}{x(x^2+x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3-x)}{x(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3-x}{x(x+2)} = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$

Megoldás. "$\dfrac{0}{0}$" típusú trigonometrikus határérték. Ekkor bővítéssel a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{\sin \alpha x} = 1$$

nevezetes határértéket alakítjuk ki:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\frac{4}{4}\cdot 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x\cdot\frac{3}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{1}{3/4} = 1\cdot\frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}\,.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} 2x\cdot \operatorname{ctg} 5x$

Megoldás. "$0\cdot\infty$" típusú trigonometrikus határérték. Azonosság alkalmazásával visszavezetjük az előző feladatban használt nevezetes határértékre.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} 2x\cdot \operatorname{ctg} 5x &= \lim_{x\to 0} 2x\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}\cdot\cos 5x = 1\cdot\frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{1-x}$

Megoldás. Végesben vett határérték, helyettesítés után „$\dfrac{-3}{0}$" típus adódik. Ebben az esetben három lehetőség van, a határérték $+\infty$, $-\infty$ vagy nem létezik annak megfelelően, hogy tudjuk-e garantálni a kifejezés előjelét a hely környezetében. Erről a féloldali határértékek vizsgálatával győződünk meg.

Ha $x<1$, akkor $1-x>0$, ezért

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{1-x} = \text{„}\frac{-3}{0^+}\text{"} = -\infty\,.$$

Ha $x>1$, akkor $1-x<0$, így

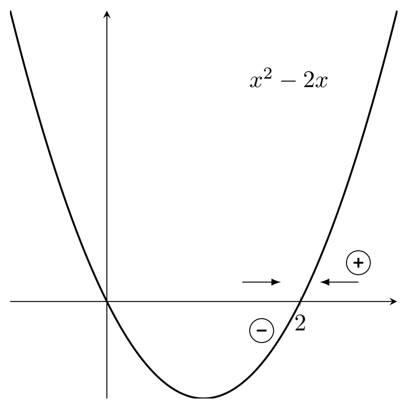
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{1-x} = \text{„}\frac{-3}{0^-}\text{"} = \infty\,.$$

Vagyis $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{1-x}$ nem létezik.

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-2x}$

Megoldás. A határérték „$\dfrac{1}{0}$" típusú.

Az $x^2-2x = x(x-2)$ függvényt ábrázolva a grafikonról leolvassuk a nevező előjelét a 2 pont környezetében:



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-2x} = \text{„}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty\,,$$

és

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-2x} = \text{„}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty\,.$$

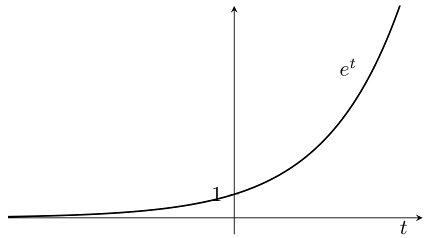
Vagyis $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-2x}$ nem létezik.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{1}{x^2-2x}}$

Megoldás. Nézzük először a kitevő határértékét. Az előző feladat alapján

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-2x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-2x} = \infty\,,$$

ahonnan az exponenciális függvény grafikonjának ismeretében



$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x^2-2x}} = \text{„}e^{-\infty}\text{”} = 0\,,$$

illetve

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x^2-2x}} = \text{„}e^{\infty}\text{”} = \infty\,.$$

Így $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{1}{x^2-2x}}$ nem létezik.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{(x-1)^3}$

Megoldás. A határérték „$\dfrac{0}{0}$” típusú.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)^3}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(1+x)}{(x-1)^2}\,.$$

Az így kapott határérték „$\dfrac{-2}{0}$” típusú. A nevező előjele jól láthatóan nemnegatív, tehát

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(1+x)}{(x-1)^2} = \text{„}\frac{-2}{0^+}\text{”} = -\infty$$

és

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-(1+x)}{(x-1)^2} = \text{„}\frac{-2}{0^+}\text{”} = -\infty\,.$$

Így $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{(x-1)^3} = -\infty\,.$

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} e^{\frac{x-4}{x^2-4x+4}}$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

B csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

$$\lim_{x \to A} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}, \qquad \text{ahol} \qquad A = -\infty\,, \quad -1\,, \quad 1\,, \quad 2\,.$$

C csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{6x}$

A csoport megoldása

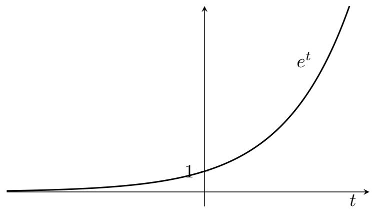
(a) "$\infty - \infty$" típus.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)=\text{"}\infty\cdot 1\text{"}=\infty\,.$$

(b) A kitevő határértéke "$\dfrac{-2}{0}$" típusú. A nevező előjele az $x^2-4x+4=(x-2)^2$ azonosság miatt jól láthatóan nemnegatív, tehát

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-4}{x^2-4x+4}=\text{"}\frac{-2}{0^+}\text{"}=-\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-4}{x^2-4x+4}=\text{"}\frac{-2}{0^+}\text{"}=-\infty\,.$$

Vagyis $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x^2-4x+4}=-\infty.$



Így az exponenciális függvény grafikonjának ismeretében

$$\lim_{x\to 2}e^{\frac{x-4}{x^2-4x+4}}=\text{"}e^{-\infty}\text{"}=0\,.$$

(c) "$\dfrac{0}{0}$" típus.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-3x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)}{x+2}=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

B csoport megoldása

- $A = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1-1/x-2/x^2}{1-3/x+2/x^2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-1/x-2/x^2}{1-3/x+2/x^2} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

- $A = -1$

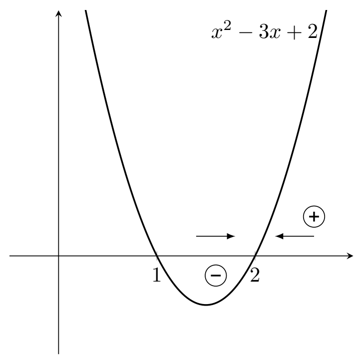
$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2-3\cdot(-1)+2} = \frac{0}{6} = 0\,.$$

- $A = 1$ „$\dfrac{-2}{0}$” típus.

A nevező $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ előjelét a grafikonról leolvasva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \text{„}\frac{-2}{0^+}\text{”} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \text{„}\frac{-2}{0^-}\text{”} = \infty\,.$$



Vagyis

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} \quad \text{nem létezik.}$$

- $A = 2$ „$\dfrac{0}{0}$” típus.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3\,.$$

C csoport megoldása

(a) ”$\frac{0}{0}$” típus.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{1-x} = \frac{-3}{2}\,.$$

(b) ”$\infty-\infty$” típus. Az $x=-y$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+1}\right) &= \lim_{y\to \infty} \left(\sqrt{y^2-4y}-\sqrt{y^2+1}\right)\\
&= \lim_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2-4y}-\sqrt{y^2+1}\right)\cdot \frac{\sqrt{y^2-4x}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2-4y}+\sqrt{y^2+1}}\\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{(y^2-4y)-(y^2+1)}{\sqrt{y^2-4y}+\sqrt{y^2+1}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-4y-1}{\sqrt{y^2-4y}+\sqrt{y^2+1}}\\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2}}\cdot \frac{-4-1/y}{\sqrt{1-4/y}+\sqrt{1+1/y^2}}\\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{-4-1/y}{\sqrt{1-4/y}+\sqrt{1+1/y^2}} = \frac{-4}{2} = -2\,.
\end{aligned}$$

(c) ”$\frac{0}{0}$” típus.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x\cdot \frac{6}{7}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x}\cdot \frac{1}{6/7} = 1\cdot \frac{1}{6/7} = \frac{7}{6}\,.$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x}{2x^2-9}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-5x}{2+3x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2x^3}{21+4x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2-3\sqrt[3]{x^2}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-3\sqrt[3]{x^2}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+5x}}{2-x}$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x-4}{x^3+2x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x-4}{x^3-2x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3x^2-9x}{6-5x+x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$

(e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2-9}$

(f) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2-5x-2}{5x-6-x^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

(h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4\sin 2x}{2x\cos x}$

(i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 6x}{2x}$

(j) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{8x}$

(k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$

(l) $\lim\limits_{x\to0} 5x\cdot\operatorname{ctg} 8x$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+2}{9-x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-3}{x+4x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}} \dfrac{x-3}{x+4x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+2x-2}{|x|}$

(e) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2-x}{(x+2)^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{6x}$

(h) $\lim_{x\to 4} e^{\frac{x}{x-4}}$

(i) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x-3}{x^2-2x+1}}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 0

(c) $-\infty$

(d) 0

(e) ∞

(f) ∞

(g) 1

(h) $\frac{3}{2}$

(i) $-\frac{1}{2}$

(j) $\sqrt{2}$

2. Feladat megoldása.

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 9

(d) $\frac{1}{2}$

(e) 1

(f) 7

(g) $\frac{1}{4}$

(h) 4

(i) 3

(j) $\frac{7}{8}$

(k) $\frac{3}{2}$

(l) $\frac{5}{8}$

3. Feladat megoldása.

(a) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

(b) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(c) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to -\frac{1}{4}^-} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x\to -\frac{1}{4}^+} f(x) = \infty$

(d) $-\infty$

(e) ∞

(f) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

(g) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

(h) nem létezik, ugyanis $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$ és $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$

(i) 0

7. óra

Folytonosság, differenciálhányados

Házi feladatok

1. Feladat. Adjuk meg a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a\,, & \text{ha} \quad x < 1 \\ 4\,, & \text{ha} \quad x = 1 \\ 2x^2 + bx + 10\,, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

függvény az $x = 1$ pontban folytonos legyen.
Megoldás. Az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban, ha

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)\,.$$

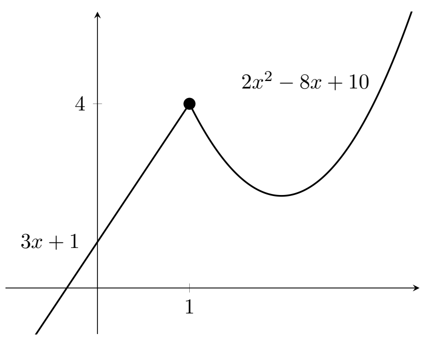
Mivel $f(1) = 4$, ezért ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen az 1 pontban, teljesülnie kell, hogy

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x + a) = 4\,,$$

azaz $3 \cdot 1 + a = 4$, ahonnan $a = 1$. Hasonlóan

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x^2 + bx + 10) = 4\,,$$

alapján $2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 10 = 2 + b + 10 = 12 + b = 4$, ahonnan $b = -8$.
Tehát az $a = 1$ és $b = -8$ választás esetén az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban.



2. Feladat. Definíció szerint határozzuk meg a következő függvények adott pontbeli differenciálhányadosát.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}\,, \quad x_0 = 1$

Megoldás. Mivel $f(1) = -1$, így a definíció alapján, ami mindig egy „$\dfrac{0}{0}$" típusú határérték, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2-3x}+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1+(2-3x)}{2-3x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{3-3x}{2-3x}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3-3x}{2-3x}\cdot\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(1-x)}{2-3x}\cdot\frac{1}{-(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3}{-(2-3x)} = \frac{3}{1} = 3\,.
\end{aligned}
$$

(b) $f(x) = \sqrt{3x-x^2}\,, \quad x_0 = 2$

Megoldás. Mivel $f(2) = \sqrt{2}$, így

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{2}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{2}} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{3x-x^2-2}{(x-2)(\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1-x)}{(x-2)(\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1-x}{(\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

3. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $x^6 - x^{1/3} + 4$

Megoldás.

$$
\left[x^6 - x^{1/3} + 4\right]' = \left[x^6\right]' - \left[x^{1/3}\right]' + [4]' = 6x^5 - \frac{1}{3}x^{-2/3} + 0\,.
$$

(b) $5\sin x - 3\,\mathrm{tg}\,x + \dfrac{\log_2 x}{4}$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\left[5\sin x - 3\,\mathrm{tg}\,x + \frac{\log_2 x}{4}\right]' &= 5\cdot[\sin x]' - 3\cdot[\mathrm{tg}\,x]' + \frac{1}{4}\cdot[\log_2 x]' \\
&= 5\cdot\cos x - 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\ln 2}\,.
\end{aligned}
$$

(c) $3\sqrt[4]{x^5} + \dfrac{7}{x^{-3}} + \dfrac{1}{-3\sqrt[3]{x}}$

Megoldás.

$$\left[3\sqrt[4]{x^5} + \frac{7}{x^{-3}} + \frac{1}{-3\sqrt[3]{x}}\right]' = \left[3x^{5/4} + 7x^3 - \frac{1}{3}x^{-1/3}\right]'$$
$$= 3 \cdot \left[x^{5/4}\right]' + 7 \cdot \left[x^3\right]' - \frac{1}{3} \cdot \left[x^{-1/3}\right]'$$
$$= 3 \cdot \frac{5}{4}x^{1/4} + 7 \cdot 3x^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-4/3} .$$

(d) $3\cos x - \cos 3 + x \ln 4$

Megoldás.

$$[3\cos x - \cos 3 + x\ln 4]' = 3 \cdot [\cos x]' - [\cos 3]' + \ln 4 \cdot [x]' = 3 \cdot (-\sin x) - 0 + \ln 4 \cdot 1 .$$

(e) $x^2 \arcsin x$

Megoldás.

$$[x^2 \cdot \arcsin x]' = \left[x^2\right]' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot [\arcsin x]' = 2x \cdot \arcsin x + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

(f) $2^x \sqrt{x}$

Megoldás.

$$\left[2^x \cdot \sqrt{x}\right]' = \left[2^x \cdot x^{1/2}\right]' = [2^x]' \cdot x^{1/2} + 2^x \cdot \left[x^{1/2}\right]' = 2^x \ln 2 \cdot x^{1/2} + 2^x \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} .$$

(g) $\dfrac{2x+7}{3-x^2}$

Megoldás.

$$\left[\frac{2x+7}{3-x^2}\right]' = \frac{[2x+7]' \cdot (3-x^2) - (2x+7) \cdot [3-x^2]'}{(3-x^2)^2}$$
$$= \frac{2 \cdot (3-x^2) - (2x+7) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} .$$

(h) $\dfrac{3\cos x}{1+\sin x}$

Megoldás.

$$\left[\frac{3\cos x}{1+\sin x}\right]' = \frac{[3\cos x]' \cdot (1+\sin x) - 3\cos x \cdot [1+\sin x]'}{(1+\sin x)^2}$$
$$= \frac{-3\sin x \cdot (1+\sin x) - 3\cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} .$$

(i) $\dfrac{e^x x}{\ln x + 2}$

Megoldás.

$$\left[\frac{e^x x}{\ln x + 2}\right]' = \frac{[e^x x]' \cdot (\ln x + 2) - e^x x \cdot [\ln x + 2]'}{(\ln x + 2)^2} = \frac{(e^x x + e^x) \cdot (\ln x + 2) - e^x x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x + 2)^2}.$$

(j) $\dfrac{x}{x^2 + a^2}$

Megoldás.

$$\left[\frac{x}{x^2 + a^2}\right]' = \frac{1 \cdot (x^2 + a^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}.$$

4. Feladat. Az összetett függvény deriváltjára érvényes

$$[\ f(y(x))\ ]' = \frac{df(y(x))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = f'(y) \cdot y'$$

összefüggés alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

(a) $(x^2 + x)^4$

Megoldás. $y = x^2 + x$ alapján $f(y) = y^4$, ezért $f'(y) = 4y^3 = 4(x^2 + x)^3$ és $y' = 2x + 1$ miatt

$$\left[(x^2 + x)^4\right]' = f'(y) \cdot y' = 4(x^2 + x)^3 \cdot (2x + 1).$$

(b) $\sqrt{1 - 2x}$

Megoldás. $y = 1 - 2x$, $f(y) = \sqrt{y}$, ekkor $f'(y) = \dfrac{1}{2} y^{-1/2} = \dfrac{1}{2}(1 - 2x)^{-1/2}$ és $y' = -2$ miatt

$$[\sqrt{1 - 2x}]' = [(1 - 2x)^{1/2}]' = f'(y) \cdot y' = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{-1/2} \cdot (-2).$$

(c) $\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}$

Megoldás. $y = 2 - x^2$, $f(y) = y^{2/3}$, ezért $f'(y) = \dfrac{2}{3} y^{-1/3} = \dfrac{2}{3}(2 - x^2)^{-1/3}$ és $y' = -2x$ alapján

$$\left[\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}\right]' = \left[\left(2 - x^2\right)^{2/3}\right]' = f'(y) \cdot y' = \frac{2}{3}\left(2 - x^2\right)^{-1/3} \cdot (-2x).$$

(d) $\ln(4-3x)$

Megoldás. $y = 4-3x,\ \ f(y) = \ln y$, így $f'(y) = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4-3x}$ és $y' = -3$ alapján

$$[\ln(4-3x)]' = f'(y)\cdot y' = \frac{1}{4-3x}\cdot(-3)\,.$$

(e) $\ln^2 x$

Megoldás. $y = \ln x,\ f(y) = y^2$ szerint

$$\left[\ln^2 x\right]' = \left[(\ln x)^2\right]' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,.$$

(f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\ln x}}$

Megoldás. $y = \ln x,\ f(y) = 2y^{-1/3}$ alapján

$$\left[\frac{2}{\sqrt[3]{\ln x}}\right]' = \left[2(\ln x)^{-1/3}\right]' = 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(\ln x)^{-4/3}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

(g) $x^2\ln^{3/2} x$

Megoldás.

$$\left[x^2\ln^{3/2} x\right]' = 2x\cdot\ln^{3/2} x + x^2\cdot\frac{3}{2}\ln^{1/2} x\cdot\frac{1}{x}\,.$$

(h) $xe^{-x/\lambda}$

Megoldás.

$$\left[xe^{-x/\lambda}\right]' = 1\cdot e^{-x/\lambda} + x\cdot e^{-x/\lambda}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\,.$$

(i) $\cos(5x)e^{-inx}$

Megoldás.

$$\left[\cos(5x)e^{-inx}\right]' = -\sin(5x)\cdot 5\cdot e^{-inx} + \cos(5x)\cdot e^{-inx}\cdot(-in)\,.$$

(j) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}$

Megoldás.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}\right]' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}\cdot\left(-\frac{2(x-m)}{2\sigma}\right)\,.$$

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Adjuk meg a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1\,, & \text{ha} \quad x < -1 \\ 2\,, & \text{ha} \quad x = -1 \\ \sqrt{x+b}\,, & \text{ha} \quad x > -1 \end{cases}$$

függvény az $x = -1$ pontban folytonos legyen.

2. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $3x^2 \cdot \ln(2-3x)$ (b) $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\pi} - \dfrac{\pi}{x}$ (c) $2 - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

B csoport

1. Feladat. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{2} + 1$ függvény $x = 2$ pontbeli differenciálhányadosát.

2. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $x \cdot e^{2-3x}$ (b) $\dfrac{\sqrt{x} - \ln x}{4-x}$ (c) $\sin(\operatorname{tg} x)$

C csoport

1. Feladat. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ függvény $x = -1$ pontbeli differenciálhányadosát.

2. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos 3x$ (b) $\dfrac{1}{1-x^3}$ (c) $\arcsin(x^2 - x)$

A csoport megoldása

1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x)\,.$$

Mivel

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} (x^2 + ax - 1) = 1 - a - 1 = -a\\ f(-1) &= 2\\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \sqrt{x+b} = \sqrt{-1+b}\,,\end{aligned}$$

így $a = -2$ és $-1 + b = 4$, azaz $b = 5$.

2.

(a)

$$\left[3x^2 \cdot \ln(2-3x)\right]' = 6x \cdot \ln(2-3x) + 3x^2 \cdot \frac{1}{2-3x} \cdot (-3)\,.$$

(b)

$$\left[\frac{\sqrt{x^5}}{\pi} - \frac{\pi}{x}\right]' = \left[\frac{1}{\pi} \cdot x^{5/2} - \pi \cdot x^{-1}\right]' = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{3/2} - \pi \cdot (-1) \cdot x^{-2}\,.$$

(c)

$$\left[2 - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]' = \left[2 - e^{x^{-1/2}}\right]' = -e^{x^{-1/2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2}\,.$$

B csoport megoldása

1.

- Definíció szerint:

  Mivel $f(2) = 2^2 + 2/2 + 1 = 6$,

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + \frac{x}{2} + 1 - 6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + \frac{x}{2} - 5}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+\frac{5}{2})}{x-2} = \lim_{x\to 2} \left(x + \frac{5}{2}\right) = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}\,.$$

- Formálisan:

$$f'(x) = \left[x^2 + \frac{x}{2} + 1\right]' = 2x + \frac{1}{2} \quad \text{alapján} \quad f'(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\,.$$

2.

(a)

$$\left[x \cdot e^{2-3x}\right]' = 1 \cdot e^{2-3x} + x \cdot e^{2-3x} \cdot (-3)\,.$$

(b)

$$\left[\frac{\sqrt{x} - \ln x}{4-x}\right]' = \left[\frac{x^{1/2} - \ln x}{4-x}\right]'$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{x}\right)(4-x) - \left(x^{1/2} - \ln x\right) \cdot (-1)}{(4-x)^2}\,.$$

(c)

$$[\sin(\operatorname{tg} x)]' = \cos(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

C csoport megoldása

1.

- Definíció szerint:

  Mivel $f(-1) = \dfrac{2(-1)+3}{-1-2} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$,

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{2x+3}{x-2}+\frac{1}{3}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{3(2x+3)+(x-2)}{3(x-2)}}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{\frac{7x+7}{3x-6}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{7(x+1)}{3x-6}\cdot\frac{1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{7}{3x-6} = \frac{7}{-9} = -\frac{7}{9}\,.$$

- Formálisan:

$$f'(x) = \left[\frac{2x+3}{x-2}\right]' = \frac{2(x-2)-(2x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}$$

  alapján

$$f'(-1) = \frac{2\cdot(-3)-1}{(-3)^2} = \frac{-7}{9}\,.$$

2.

(a)

$$\left[\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos 3x\right]' = \left[x^{2/3}\cdot\cos 3x\right]' = \frac{2}{3}x^{-1/3}\cdot\cos 3x + x^{2/3}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3\,.$$

(b)

$$\left[\frac{1}{1-x^3}\right]' = \left[\left(1-x^3\right)^{-1}\right] = -\left(1-x^3\right)^{-2}\cdot(-3x^2)\,.$$

(c)

$$\left[\arcsin(x^2-x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-x)^2}}\cdot(2x-1)\,.$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Adjuk meg az egyes paraméterek (a, b, c) értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek.

(a) $g(x) = \begin{cases} ax-9\,, & \text{ha } x < -2 \\ -x^2+3\,, & \text{ha } x \geq -2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} bx^2-1\,, & \text{ha } x < 2 \\ 7\,, & \text{ha } x = 2 \\ \sqrt{8x-c}\,, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$

2. Feladat. Definíció szerint határozzuk meg a következő függvények adott pontbeli differenciálhányadosát.

(a) $g(x) = \dfrac{2x+5}{3x-4}, \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = 3x^2+7x-1, \quad x_0 = -1$

(c) $h(x) = \sin^3(x), \quad x_0 = 0$

(d) $m(x) = \sqrt{4x+1-x^2}, \quad x_0 = 2$

3. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $x^5 - 0,125x^2 + 0,25x$

(b) $x^3 - 3\left(x^2+\pi^2\right)$

(c) $6x^2 - 10x - \dfrac{5}{x^2}$

(d) $\dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

(e) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{4}{x^4}$

(f) $x \operatorname{ctg} x$

(g) $\mathrm{e}^x \arcsin x$

(h) $x\sqrt{x}\,(3\ln x - 2)$

(i) $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$

(j) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(k) $\dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}}$

(l) $2\operatorname{tg} x \cdot 3\ln x$

(m) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \arccos x$

(n) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot 3^x}{\cos x}$

(o) $x^2 e^x \sin x$

4. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $\sqrt{2x-x^2}$

(b) $\dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{7}\right)^7}$

(c) $\sin^3 x$

(d) $\sin x^3$

(e) $\sin 3x$

(f) $\log_5(5x-3)$

(g) $\sqrt[3]{x^4}\ln 7x$

(h) e^{7+x}

(i) $e^{\frac{1}{1-x}}$

(j) $x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}$

(k) $e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^n}{n!}$

(l) $2x\cos\frac{\pi x}{2}$

(m) $\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$

(n) $\sqrt{x\mathrm{e}^x + x}$

(o) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(p) $\sqrt{\ln(x^2-1)}$

(q) $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $a = -4$

(b) $b = 2, \;\; c = -33$

2. Feladat megoldása.

(a) -23

(b) 1

(c) 0

(d) 0

3. Feladat megoldása.

(a) $5x^4 - 0,125 \cdot 2x + 0,25$

(b) $3x^2 - 6x$

(c) $12x - 10 - 5 \cdot (-2)x^{-3}$

(d) $\dfrac{5(2\sqrt{x}) - (5x+1)x^{-1/2}}{4x}$

(e) $1 + x - \dfrac{18}{x^4} - \dfrac{16}{x^5}$

(f) $\operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$

(g) $e^x \arcsin x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $\dfrac{3}{2}x^{1/2}\,(3\ln x - 2) + x^{3/2} \cdot \dfrac{3}{x}$

(i) $\dfrac{2\left(x^2 - 5x + 5\right) - (2x+3)\,(2x-5)}{\left(x^2 - 5x + 5\right)^2}$

(j) $\dfrac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$

(k) $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^{2/5} - \ln x \cdot \frac{2}{5}x^{-3/5}}{x^{4/5}}$

(l) $\dfrac{2}{\cos^2 x} \cdot 3\ln x + 2\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{3}{x}$

(m) $\dfrac{2}{3}x^{-1/3} \cdot \arccos x + x^{2/3} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(n) $\dfrac{(\frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot 3^x + x^{1/2} \cdot 3^x \ln 3)\cos x - (\sqrt{x} \cdot 3^x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

(o) $(2xe^x + x^2e^x)\sin x + x^2e^x \cos x$

4. Feladat megoldása.

(a) $\frac{1}{2}(2x-x^2)^{-1/2}\cdot(2-2x)$

(b) $-7\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-8}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$

(c) $3\sin^2 x\cdot\cos x$

(d) $\cos x^3\cdot 3x^2$

(e) $\cos 3x\cdot 3$

(f) $\dfrac{1}{(5x-3)\ln 5}\cdot 5$

(g) $\frac{4}{3}x^{1/3}\cdot\ln 7x+x^{4/3}\cdot\frac{1}{7x}\cdot 7$

(h) e^{7+x}

(i) $e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$

(j) $3x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}+x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x)$

(k) $e^{-\lambda x}(-\lambda)\dfrac{(\lambda x)^n}{n!}+e^{-\lambda x}\dfrac{n\,(\lambda x)^{n-1}\,\lambda}{n!}$

(l) $2\cos\frac{\pi x}{2}-2x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

(m) $\dfrac{-1}{\operatorname{arctg}^2 x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

(n) $\dfrac{1}{2\sqrt{x\mathrm{e}^x+x}}\left(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+1\right)$

(o) $\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

(p) $\frac{1}{2}\left(\ln(x^2-1)\right)^{-1/2}\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}$

(q) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$

8. óra

A differenciálszámítás néhány alkalmazása

Házi feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{3-2x^2}$ függvény $x = -1$ pontjához húzott érintőjének egyenletét.
Megoldás. Az $f(x)$ függvény $x = a$ pontjához húzott érintőjének egyenlete

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \,.$$

Esetünkben $a = -1$, így

$$y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1) \,,$$

ahol $f(-1) = \sqrt{3 - 2(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, és

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3 - 2x^2)^{-1/2}(-4x) = \frac{-2x}{\sqrt{3-2x^2}}$$

alapján $f'(-1) = \dfrac{2}{\sqrt{1}} = 2$. Tehát az érintő egyenlete:

$$y = 2 \cdot (x + 1) + 1 = 2x + 3 \,.$$

2. Feladat. Határozzuk meg az adott függvény a pont körüli harmadrendű Taylor–polinomját, majd segítségével becsüljük meg az adott A szám értékét.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}\,, \quad a = 1\,, \quad A = \sqrt[3]{3/2}$

Megoldás. Az $f(x)$ függvény a pont körüli harmadrendű Taylor–polinomja

$$T_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \,.$$

Most $a = 1$, így

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \,.$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{2-x} = (2-x)^{1/3}\,, \quad f(1) = \sqrt[3]{2-1} = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{3}(2-x)^{-2/3}\cdot(-1) = -\frac{1}{3}(2-x)^{-2/3} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}\,, \quad f'(1) = -\frac{1}{3} \\
f''(x) &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(2-x)^{-5/3}\cdot(-1) = -\frac{2}{9}(2-x)^{-5/3} \\
&= -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^5}}\,, \quad f''(1) = -\frac{2}{9} \\
f'''(x) &= -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{3}\right)(2-x)^{-8/3}\cdot(-1) = -\frac{10}{27}(2-x)^{-8/3} \\
&= -\frac{10}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^8}}\,, \quad f'''(1) = -\frac{10}{27}\,,
\end{aligned}
$$

ezért

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= 1 + \frac{-1/3}{1!}(x-1) + \frac{-2/9}{2!}(x-1)^2 + \frac{-10/27}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{5}{81}(x-1)^3\,.
\end{aligned}
$$

Továbbá $f(x) \approx T_3(x)$ alapján

$$
\sqrt[3]{2-x} \approx 1 - \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{5}{81}(x-1)^3\,.
$$

Így $\sqrt[3]{3/2}$ becsült értékét úgy kapjuk meg, hogy az $2-x=3/2$ összefüggésből kapott $x=1/2$ helyettesítéssel élünk:

$$
\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 - \frac{5}{81}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3 = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + \frac{5}{648}\,.
$$

(b) $f(x) = \ln(1-3x)\,, \quad a = 0\,, \quad A = \ln 1/2$

Megoldás. Ekkor

$$
T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3\ .
$$

Mivel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1-3x)\,, \quad f(0) = \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1-3x} \cdot (-3) = \frac{-3}{1-3x} \\
&= -3(1-3x)^{-1}\,, \quad f'(0) = \frac{-3}{1} = -3 \\
f''(x) &= -3 \cdot (-1)(1-3x)^{-2} \cdot (-3) = -9(1-3x)^{-2} \\
&= \frac{-9}{(1-3x)^2}\,, \quad f''(0) = \frac{-9}{1} = -9 \\
f'''(x) &= -9 \cdot (-2)(1-3x)^{-3} \cdot (-3) = -54(1-3x)^{-3} \\
&= \frac{-54}{(1-3x)^3}\,, \quad f'''(0) = \frac{-54}{1} = -54\,,
\end{aligned}$$

ezért

$$T_3(x) = 0 + \frac{-3}{1!}x + \frac{-9}{2!}x^2 + \frac{-54}{3!}x^3 = -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3\,.$$

Tehát

$$\ln(1-3x) \approx -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3\,,$$

és $1 - 3x = 1/2$, azaz $x = 1/6$ alapján

$$\ln\frac{1}{2} \approx -3 \cdot \frac{1}{6} - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3\,.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az érintőegyenes egyenlete éppen az elsőrendű Taylor–polinom, $T_1(x)$.

3. Feladat. Ha alkalmazható, a L'Hospital-szabály segítségével határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x+x^2}$

Megoldás. „$\dfrac{0}{0}$" típusú határérték. Mivel

$$\lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos x]'}{[2x+x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2+2x} = \frac{0}{2} = 0\,,$$

ezért az eredeti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x+x^2}$ határérték is létezik és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x+x^2} = 0\,.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Megoldás. ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” típusú határérték. Mivel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[\sqrt{x}]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{x^{-1}}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,,$$

ezért az eredeti határérték is létezik és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0\,.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \ln x$

Megoldás. ”$0\cdot\infty$” típusú határérték. Ezt a hatványozás azonosságai segítségével átírjuk ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” vagy ”$\dfrac{0}{0}$” típusú határértékre:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}}{(\ln x)^{-1}}\,.$$

A ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” alakot használva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1/2}]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} (-2)x^{1/2} = \lim_{x\to 0^+} (-2)\sqrt{x} = 0\,.$$

Ezért $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\ln x = 0\,.$

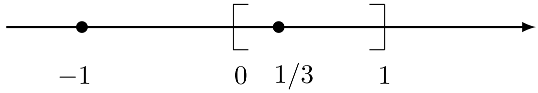
4. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit az adott zárt intervallumon.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1\,, \quad [0,1]$

Megoldás. Zárt intervallumon differenciálható függvény szélsőértékeit az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallumon belül található kritikus pontokban ($f' = 0$) veszi fel.

Határozzuk meg ezen utóbbi pontokat:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, így a $3x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenletből a kritikus pontok az $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$,



de csak az $x_2 = 1/3$ van a $[0,1]$ intervallumban.

Ebben a pontban és a végpontokban számoljuk ki az eredeti, az

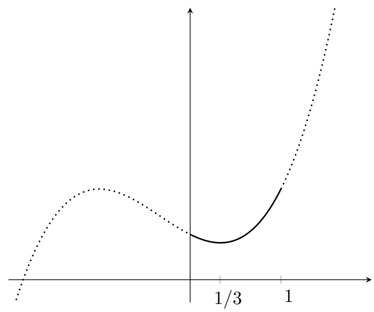
$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

függvény értékeit:

$$f(0) = 1\,, \quad f(1/3) = \frac{22}{27}\,, \quad f(1) = 2\,.$$

Így a minimum érték 22/27,

a maximum érték 2.

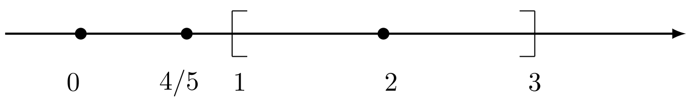


(b) $f(x) = x^2(x-2)^3\,, \quad [1,3]$

Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x-2)^3 + x^2 \cdot 3(x-2)^2 \\ &= x(x-2)^2[2(x-2) + 3x] = x(x-2)^2(5x-4)\,. \end{aligned}$$

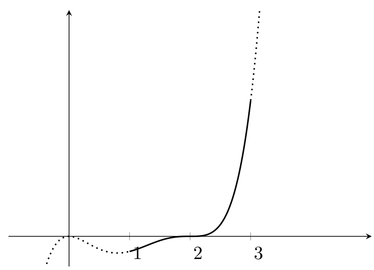
Az $x(x-2)^2(5x-4) = 0$ egyenletből a kritikus pontok $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4/5$,



melyek közül csak az $x_2 = 2 \in [1,3]$.

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 9\,. \end{aligned}$$

Ezért a minimum érték -1,
a maximum érték 9.



5. Feladat. A második derivált teszt használatával határozzuk meg a következő függvények lokális (helyi) szélsőértékeit.

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

Megoldás. Jól láthatóan a függvény kétszer differenciálható. A kritikus pontok

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

szerint a $3x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenletből az $x_1 = 2$, $x_2 = 2/3$. Továbbá

$$f''(x) = 6x - 8$$

alapján

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 \cdot 2 - 8 > 0 \quad \text{miatt 2–ben helyi minimum van,} \\ f''\left(\frac{2}{3}\right) &= 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 < 0 \quad \text{miatt } \frac{2}{3}\text{–ban helyi maximum van.} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left[(1+x^4)^{-1}\right]' = -1 \cdot (1+x^4)^{-2} \cdot 4x^3 = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}\,.$$

Az egyetlen kritikus pont az $x = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-12x^2(1+x^4)^2 - (-4x^3) \cdot 2(1+x^4) \cdot 4x^3}{(1+x^4)^4} \\ &= \frac{-12x^2(1+x^4) + 32x^6}{(1+x^4)^3} \end{aligned}$$

miatt

$$f''(0) = 0\,.$$

Ekkor a második derivált teszt nem tud dönteni.

Megjegyzés. A függvény monotonitását vizsgálva megmutatható, hogy az $x = 0$ pontban helyi maximum van, ezt a következő fejezetben részletesen tárgyaljuk.

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^3e^{1-x^2} + 2$ függvény $x = 1$ pontjához húzott érintőjének egyenletét.

2. Feladat. A második derivált teszt használatával határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1$ függvény lokális (helyi) szélsőértékeit.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ függvény $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–polinomját, majd segítségével becsüljük meg $\sqrt{1/2}$ értékét.

C csoport

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = (x + 2)^3(x - 3)^2$ függvény szélsőértékeit az $[-3, 2]$ zárt intervallumon.

2. Feladat. Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x$ határértéket.

A csoport megoldása

1.

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)\,,$$

ahol $f(1) = 1^3 \cdot e^{1-1^2} + 2 = 1 \cdot e^0 + 2 = 1 + 2 = 3$, és

$$f'(x) = 3x^2 e^{1-x^2} + x^3 e^{1-x^2}(-2x) = 3x^2 e^{1-x^2} - 2x^4 e^{1-x^2}$$

alapján $f'(1) = 3 - 2 = 1$. Tehát az érintő egyenlete:

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 3\,.$$

2. A kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x$$

szerint

$$\begin{aligned} 6x^2 - 18x &= 0 \\ 6x(x-3) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad x_2 &= 3\,. \end{aligned}$$

$$f''(x) = 12x - 18$$

alapján

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0 - 18 < 0 && \text{miatt 0–ban helyi maximum van,} \\ f''(3) &= 12 \cdot 3 - 18 > 0 && \text{alapján 3–ban helyi minimum van.} \end{aligned}$$

B csoport megoldása

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3\,.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1-\frac{x}{2}} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/2}, \qquad f(0)=1\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1/2}\\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}\,,\quad f'(0) = -\frac{1}{4}\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-3/2}\\
&= -\frac{1}{16}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{x}{2})^3}}\,,\qquad f''(0) = -\frac{1}{16}\\
f'''(x) &= -\frac{1}{16}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-5/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16\cdot 4}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-5/2}\\
&= -\frac{3}{64}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{x}{2})^5}}\,,\qquad f'''(0) = -\frac{3}{64}\,,
\end{aligned}$$

ezért

$$T_3(x) = 1 + \frac{-1/4}{1!}x + \frac{-1/16}{2!}x^2 + \frac{-3/64}{3!}x^3 = 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{128}x^3\,.$$

Tehát

$$\sqrt{1-\frac{x}{2}} \approx 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{128}x^3\,,$$

és

$$\begin{aligned}
1-\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2} &= \frac{x}{2}\\
1 &= x
\end{aligned}$$

alapján

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128}\,.$$

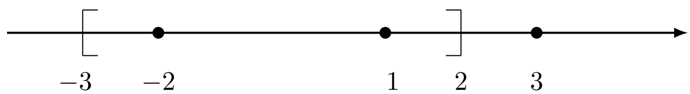
C csoport megoldása

1.

$$f'(x) = 3(x+2)^2(x-3)^2 + (x+2)^3 2(x-3)$$

így a kritikus pontok

$$\begin{aligned}
3(x+2)^2(x-3)^2 + (x+2)^3 2(x-3) &= 0 \\
(x+2)^2(x-3)\left[3(x-3) + 2(x+2)\right] &= 0 \\
(x+2)^2(x-3)\left[3x - 9 + 2x + 4\right] &= 0 \\
(x+2)^2(x-3)(5x-5) &= 0 \\
x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 &= 1
\end{aligned}$$



de csak az $x_1 = -2$ és az $x_3 = 1$ van a $[-3, 2]$ intervallumban.
Ebben a két pontban és a végpontokban az eredeti $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$ függvény értékei:

$$\begin{aligned}
&f(-3) = (-1)^3 \cdot (-6)^2 = -1 \cdot 36 = -36 \qquad \text{MIN} \\
&f(-2) = 0 \\
&f(1) = 3^3 \cdot (-2)^2 = 27 \cdot 4 = 108 \qquad \text{MAX} \\
&f(2) = 4^3 \cdot (-1)^2 = 64 \cdot 1 = 64
\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = \text{"}0 \cdot (-\infty)\text{"} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}}\,.$$

A L'Hospital szabály

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0$$

alapján $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x = 0\,.$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x)$ függvény x_0 pontjához húzott érintőjének egyenletét.

(a) $f(x) = x^3 + x + 2\,,\ \ x_0 = 3$

(b) $f(x) = \ln\left(3x - x^2\right)\,,\ \ x_0 = 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}\,,\ \ x_0 = 2$

(d) $f(x) = e^{1-x^2} + 1\,,\ \ x_0 = -1$

2. Feladat. Határozzuk meg az adott függvény a pont körüli harmadrendű Taylor–polinomját, majd segítségével becsüljük meg az adott A szám értékét.

(a) $f(x) = e^{1-x}\,, \quad a = 1\,, \quad A = \dfrac{1}{e}\,, \quad A = \sqrt{e}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{2}}\,, \quad a = 0\,, \quad A = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

(c) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}\,, \quad a = 1\,, \quad A = \sqrt{2}$

(d) $f(x) = \ln(3 - x)\,, \quad a = 2\,, \quad A = \ln 2$

(e) $f(x) = \arcsin x\,, \quad a = 0\,, \quad A = \dfrac{\pi}{6}$

(f) $f(x) = \sin(2x + \dfrac{\pi}{2})\,, \quad a = 0$

3. Feladat. Ha alkalmazható, a L'Hospital–szabály segítségével határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x \ln^{2/3} x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2 e^{1/x^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + x^2}{e^x + 4x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{7x}{\sin 8x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x + 2}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - 3}{2 - 5x^2}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit az adott zárt intervallumon.

(a) $f(x) = 12x - x^3\,, \quad [-3, 5]$

(b) $f(x) = (x-2)(x-8)^5\,, \quad [2, 8]$

(c) $f(x) = x - 2\sqrt{x}\,, \quad [1, 4]$

(d) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5\,, \quad [-2, 1]$

5. Feladat. A második derivált teszt használatával határozzuk meg a következő függvények lokális (helyi) szélsőértékeit.

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(b) $f(x) = x^2(1 - 3x)$

(c) $f(x) = xe^{-x}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $y = 28(x-3) + 32$

(b) $y = \frac{1}{2}(x-1) + \ln 2$

(c) $y = \frac{7}{2\sqrt{10}}(x-2) + \sqrt{10}$

(d) $y = 2(x+1) + 2$

2. Feladat megoldása.

(a) $T_3(x) = 1 - (x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{6}(x-1)^3$

$\dfrac{1}{e} \approx 1 - (2-1) + \dfrac{1}{2}(2-1)^2 - \dfrac{1}{6}(2-1)^3 = \dfrac{1}{3}$

$\sqrt{e} \approx 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{64}$

(b) $T_3(x) = 1 + \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{36}x^2 + \dfrac{5}{648}x^3$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \approx 1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{36} - \dfrac{5}{648}$

(c) $T_3(x) = 1 - (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}(x-1)^3$

$\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16}$

(d) $T_3(x) = -(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{3}(x-2)^3$
$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(e) $T_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3\,, \quad \frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48}$

(f) $T_3(x) = 1 - 2x^2$

3. Feladat megoldása.

(a) ∞

(b) 0

(c) 0

(d) ∞

(e) ∞

(f) ∞

(g) 1

(h) 0

(i) $\frac{7}{8}$

(j) $\frac{1}{6}$

(k) -4

(l) 0

(m) A L'Hospital–szabály nem alkalmazható

4. Feladat megoldása.

(a) 2–ben 16 abszolút maximum, 5–ben -65 abszolút minimum

(b) 2–ben és 8–ban 0 abszolút maximum, 3–ban $(-5)^5$ abszolút minimum

(c) 4–ben 0 abszolút maximum, 1–ben -1 abszolút minimum

(d) 1–ben 6 abszolút maximum, -2–ben -15 abszolút minimum

5. Feladat megoldása.

(a) -1–ben helyi maximum, 1–ben helyi minimum

(b) 0–ban helyi minimum, 2/9–ben helyi maximum

(c) 1–ben helyi maximum

9. óra

Monotonitás, konvexitás

Házi feladatok

1. Feladat. Adjuk meg, hogy hol monoton növő, hol csökkenő, hol van helyi szélsőértéke az adott függvénynek – az első táblázat megadása.

(a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya: $x > 0$, azaz

A lehetséges szélsőérték helyek az értelmezési tartomány azon "kritikus pontjai", amelyekben vagy a függvény nem differenciálható, vagy a deriváltfüggvény a 0 értéket veszi fel.

A függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x + x^{1/2} \cdot \frac{1}{x}\,.$$

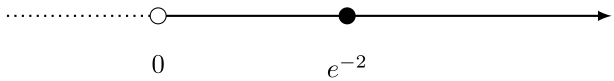
A deriváltfüggvény

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x + x^{1/2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right) \end{aligned}$$

átalakítása után az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right) =& 0 \\ \frac{1}{2}\ln x + 1 =& 0 \\ \ln x =& -2 \\ x =& e^{-2}\,. \end{aligned}$$

Tehát az egyetlen kritikus pont az $x = e^{-2}$, azaz



alapján a táblázatunk a következőképpen néz ki:

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$x > e^{-2}$
f'		0	
f			

Ezt követően meghatározzuk a deriváltfüggvény előjelét a megfelelő nyílt intervallumokon. Ez történhet a megfelelő függvény(ek) ábrázolásával, vagy az adott nyílt intervallumból vett tetszőleges tesztpont behelyettesítésével.

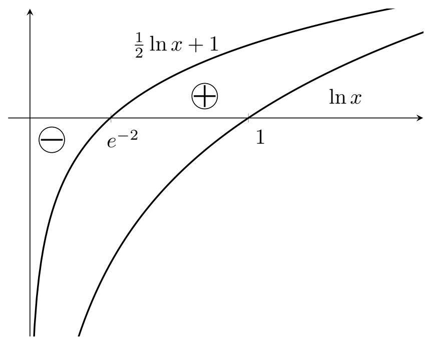
Az egyszerűsített alakot használjuk,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) .$$

Az $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény pozitív, így elég az

$$\frac{1}{2} \ln x + 1$$

függvény előjelét vizsgálni. Ezt lineáris függvénytranszformációval ábrázoljuk.



Az ábra segítségével f' előjelére kapjuk, hogy

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$x > e^{-2}$
f'	$-$	0	$+$
f			

Ahol a derivált pozitív, ott a függvény monoton nő ($\nearrow$), ahol a derivált negatív, ott a függvény monoton csökken ($\searrow$).

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$x > e^{-2}$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Végül a nyilak segítségével megállapítjuk, hogy a kritikus pontokban a függvénynek milyen típusú szélsőértéke van, ez a módszer az "első derivált teszt" a szélsőérték meghatározására.
Most a nyilak alapján minimum van, ezt az értéket ki kell számolni

$$f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}} \cdot \ln e^{-2} = e^{-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{e},$$

és beírni az "első táblázatba".

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$x > e^{-2}$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min $-2/e$	$\nearrow$

(b) $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$

Megoldás. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^4} - 1\right).$$

Látható, hogy a derivált függvény nincs értelmezve az $x = 0$ pontban, ellentétben az eredeti függvénnyel, így ez kritikus pont. További kritikus pontok

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^4} - 1 &= 0 \\ \sqrt[3]{x^4} &= 1 \\ x^4 &= 1 \\ x &= \pm 1\,. \end{aligned}$$

Tehát az összes kritikus pont: $x = -1,\ 0,\ 1,$

és a táblázat:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'		0		$\nexists$		0	
f							

A deriváltfüggvény előjelét most tesztpontok segítségével határozzuk meg. Ezeket tetszőlegesen választjuk az adott intervallumból, ugyanis a deriváltfüggvény folytonos a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon, és intervallumon folytonos függvény csak a zérushelyénél válthat előjelet.

Ha $x < -1$, akkor például az $x = -8 = (-2)^3$ választással kapjuk, hogy

$$f'(-8) = 2 \cdot (-8) - \frac{2}{\sqrt[3]{-8}} = -15 < 0\,.$$

Ha $-1 < x < 0$, akkor például az $x = -1/8$ választással kapjuk, hogy

$$f'(-1/8) = -\frac{2}{8} - \frac{2}{\sqrt[3]{-1/8}} = -\frac{1}{4} + 4 > 0\,.$$

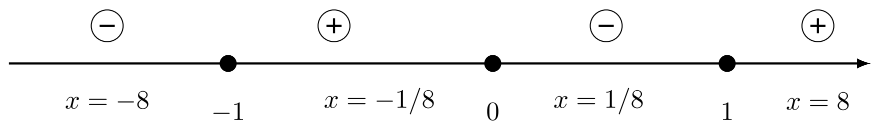
Ha $x = 1/8$, akkor

$$f'(1/8) = \frac{2}{8} - \frac{2}{\sqrt[3]{1/8}} = \frac{1}{4} - 4 < 0\,.$$

Ha $x = 8$, akkor

$$f'(8) = 2 \cdot (8) - \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = 16 - 1 > 0\,.$$

Összefoglalva:



Így az "első táblázat":

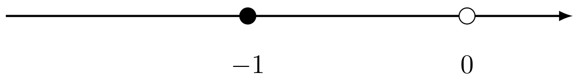
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min -2	$\nearrow$	max 0	$\searrow$	min -2	$\nearrow$

(c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Megoldás. Értelmezési tartomány: $x \neq 0$,

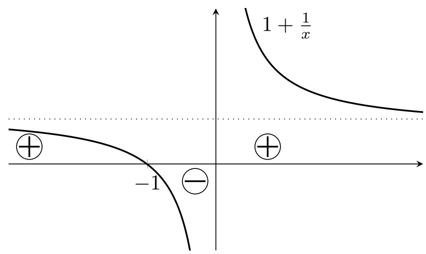
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,.$$

Egy exponenciális kifejezés mindig pozitív, tehát $e^{-\frac{1}{x}} > 0$. Így $1 + \dfrac{1}{x} = 0$ alapján az egyetlen kritikus pont az $x = -1$.



	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x>0$
f'		0		
f				

A deriváltfüggvény előjelét, $e^{-\frac{1}{x}}>0$ miatt csak az $1+\frac{1}{x}$ függvényt ábrázolva határozzuk meg.



A grafikon alapján a táblázat:

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x>0$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	$\nearrow$	max $-e$	$\searrow$	$\nearrow$

2. Feladat. Adjuk meg, hogy hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az adott függvénynek – a második táblázat megadása.

(a) $f(x)=x^2e^{-x+1}$

Megoldás. A második táblázat megadása hasonlít az első táblázat készítéséhez, de most a második derivált előjelét vizsgáljuk.

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$.

A lehetséges inflexiós helyek az értelmezési tartomány azon "kritikus pontjai" amelyekben vagy a függvény vagy kétszer nem differenciálható, vagy a második derivált függvény a 0 értéket veszi fel.

A függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x+1}+x^2e^{-x+1}\cdot(-1)=(2x-x^2)e^{-x+1}\\ f''(x) &= (2-2x)e^{-x+1}+(2x-x^2)e^{-x+1}\cdot(-1)\\ &= (2-2x-2x+x^2)e^{-x+1}=(x^2-4x+2)e^{-x+1} \end{aligned}$$

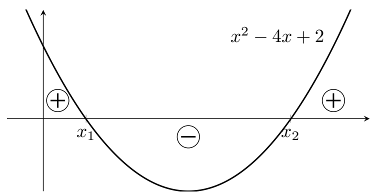
az eredeti függvény értelmezési tartományának minden pontjában létezik. Ezért kritikus pontokat most csak az $f''(x) = 0$ egyenlet szolgáltat.

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x + 2)e^{-x+1} &= 0\\ x^2 - 4x + 2 &= 0\\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}\\ x_1 &= 2 - \sqrt{2}\\ x_2 &= 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

a két kritikus pont.

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
f''		0		0	
f					

Ezt követően, mivel $e^{-x+1} > 0$, az $x^2 - 4x + 2$ függvény grafikonjának ismeretében megadjuk a második derivált függvény előjelét a megfelelő nyílt intervallumokon.



	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Ahol a második derivált pozitív, ott a függvény konvex ($\cup$), ahol a második derivált negatív, ott a függvény konkáv ($\cap$). Továbbá amennyiben a kritikus pontban a második deriváltfüggvény előjelet vált, akkor ott inflexiós pont van.
Így a "második táblázat":

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	inf	$\cap$	inf	$\cup$

Megjegyzés. A deriváltfüggvények egyszerűsítése, és ha lehet, szorzattá alakítása fontos lépés a táblázat gyors és helyes kitöltéséhez.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

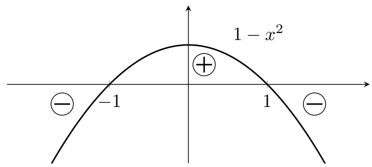
Megoldás.

Értelmezési tartomány: $(\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

A deriváltak egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\ f''(x) =& \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}\,. \end{aligned}$$

A $6x^2 + 2$ függvény pozitív, így nincs kritikus pont. Továbbá egy pozitív szám harmadik hatványa is pozitív, negatív számé pedig negatív, így elég az $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ függvényt ábrázolni az előjel megállapításához.



Így a táblázat:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
f''	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Kvízek

A csoport

Feladat. Adjuk meg, hogy hol hol monoton növő, hol csökkenő, hol van szélsőértéke az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvénynek (első táblázat megadása).
Számoljuk ki $f''(x)$–t és egyszerűsítsük is.

B csoport

Feladat. Adjuk meg, hogy hol hol monoton növő, hol csökkenő, hol van szélsőértéke az $f(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ függvénynek (első táblázat megadása).

C csoport

Feladat. Adjuk meg, hogy hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az $f(x) = x\ln^2 x$ függvénynek (második táblázat megadása).

A csoport megoldása

ÉT: $x+1>0$ és $x+1\neq 0$ alapján $x>-1$.

A deriváltfüggvény

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

alapján a kritikus pont $x=0$. Mivel a nevező, $(x+1)^2$ nemnegatív, így f' előjelét a számláló, x előjele határozza meg. Így a táblázat:

	$-1<x<0$	$x=0$	$x>0$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

$$f(0) = \ln 1 - \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

A második derivált:

$$\begin{aligned} f''(x) = \left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]' &= \frac{1\cdot(x+1)^2 - x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}\,. \end{aligned}$$

B csoport megoldása

ÉT:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 1 \\ x &\neq \pm 1\,. \end{aligned}$$

A deriváltfüggvény

$$f'(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}} \cdot \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{2x}{1-x^2}} \cdot \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= e^{\frac{2x}{1-x^2}} \cdot \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Az $e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ függvény mindig pozitív, továbbá a tört számlálója, $2x^2 + 2 > 0$, így kritikus pont nincs.

A tört nevezője, $(1-x^2)^2$ nemnegatív, ezért a táblázat:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
f'	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

C csoport megoldása

ÉT: $x > 0$.

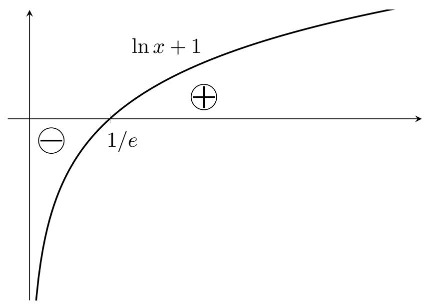
A deriváltak:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x\,(\ln x)^2\right]' = 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x\,, \\ f''(x) &= 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\,(\ln x + 1)\ . \end{aligned}$$

A $\dfrac{2}{x}$ függvény pozitív (hiszen $x > 0$), így a kritikus pont

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= e^{-1} = \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

Továbbá f'' előjele az $\ln x + 1$ függvény grafikonja alapján:



Tehát a második táblázat:

	$0 < x < e^{-1}$	$x = e^{-1}$	$x > e^{-1}$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Adjuk meg, hogy hol hol monoton növő, hol csökkenő, hol van szélsőértéke az adott függvénynek (első táblázat megadása).

(a) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

(b) $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$

(c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

(e) $f(x) = x^2 \ln^2 x$

(f) $\sqrt[3]{x^2}\,(x+5)$

2. Feladat. Adjuk meg, hogy hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az adott függvénynek (második táblázat megadása).

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$

(b) $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

(d) $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x$

(f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1 + x^2}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2}$, kritikus pont nincs

	$x < 1$	$x > 1$
f'	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

(b) Értelmezési tartomány: $[-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$

$f'(x) = \sqrt{8 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}}$, kritikus pontok: $x_1 = -\sqrt{8}$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = \sqrt{8}$

	$x = x_1$	(x_1, x_2)	$x = x_2$	(x_2, x_3)	$x = x_3$	(x_3, x_4)	$x = x_4$
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$
f	max 0	$\searrow$	min -4	$\nearrow$	max 4	$\searrow$	min 0

(c) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2}(1 - x^2)\,,$ kritikus pontok: -1, 0, 1

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max e^{-1}	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	max e^{-1}	$\searrow$

(d) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}\,,$ kritikus pontok: 1, 3

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max 2	$\searrow$	$\searrow$	min 6	$\nearrow$

(e) Értelmezési tartomány: $(0, \infty)$
$f'(x) = 2x \ln^2 x + 2x \ln x\,,$ kritikus pontok: e^{-1}, 1

	$0 < x < e^{-1}$	$x = e^{-1}$	$e^{-1} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max e^{-2}	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

(f) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x + 10)\,,$ kritikus pontok: -2, 0

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	max $3\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

2. Feladat megoldása.

(a) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$

$f''(x) = \dfrac{2+4x}{(1-x)^4}$, kritikus pont: $-1/2$

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 1$	$x > 1$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	$\cup$

(b) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = 1 + \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1-2x}{x^4}$, kritikus pont: $1/2$

	$x < 0$	$0 < x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$\cup$	inf	$\cap$

(c) Értelmezési tartomány: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$, kritikus pontok: 0, $\sqrt[3]{2}$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$x > \sqrt[3]{2}$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$		$\cap$	inf	$\cup$

(d) Értelmezési tartomány: $(-1, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$, kritikus pont: 1

	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	inf	$\cap$

(e) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - 1$

$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1+2x}{x^4}$, kritikus pont: $-1/2$

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	$\cup$

(f) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, kritikus pontok: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$

	$(-\infty, x_1)$	$x = x_1$	(x_1, x_2)	$x = x_2$	(x_2, x_3)	$x = x_3$	(x_3, ∞)
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	inf	$\cap$	inf	$\cup$

10. óra

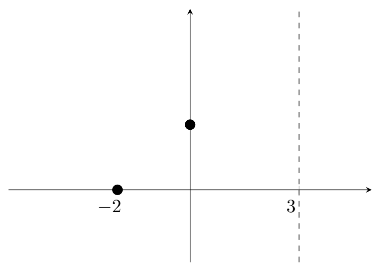
Teljes függvényvizsgálat

Házi feladatok

1. Feladat. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi lépések alapján:
– Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás
– Határérték
– Monotonitás, helyi szélsőérték, értékkészlet
– Konvexitás, inflexiós pont
– Grafikon

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$

Megoldás.



Értelmezési tartomány. $x \neq 3$, azaz $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. Így majd négy határértéket számolunk.

Tengelymetszetek. Az $f(0) = \dfrac{2}{9}$ érték az y-tengelymetszet.
Az $x + 2 = 0$ egyenletből $x = -2$ az x-tengelymetszet (zérushely).

Paritás. Nincs, mert az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra.

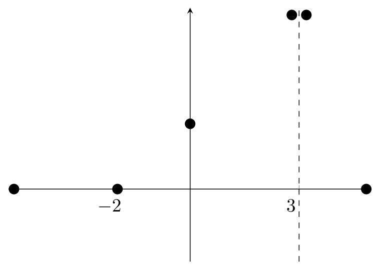
Határérték. Az értelmezési tartomány alapján a következő négy határértéket számoljuk:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1+2/x}{(1-3/x)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+2/x}{(1-3/x)^2} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+2/x}{(1-3/x)^2} = 0\,,$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{5}{0^+} = \infty \,,$$

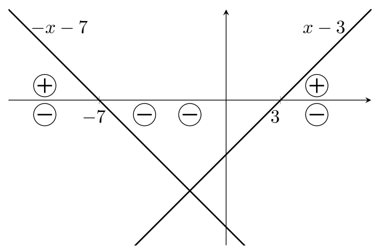
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{5}{0^+} = \infty \,.$$



Monotonitás, helyi szélsőérték. Az "első táblázat" megadása a függvény deriváltjának ismeretében.

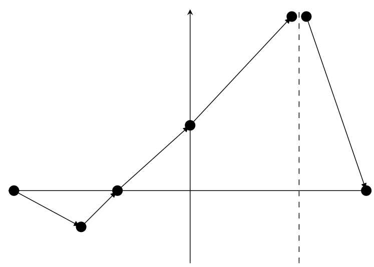
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3)^2 - (x+2) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{(x-3) - 2(x+2)}{(x-3)^3} = \frac{-x-7}{(x-3)^3} \,.$$

Nagyon lényeges, hogy egyszerűsítsük a kifejezést. A kritikus pont az $f' = 0$ egyenletből az $x = -7$. Harmadik hatványa egy pozitív számnak pozitív, negatív számnak negatív, így az $y = -x - 7$ és csak az $y = x - 3$ egyenest ábrázoljuk a deriváltfüggvény előjelének megállapításához.



A segédábra alapján az első táblázat:

	< -7	-7	$(-7, 3)$	> 3
f'	$-$	0	$+$	$-$
f	$\searrow$	min $-\frac{1}{20}$	$\nearrow$	$\searrow$



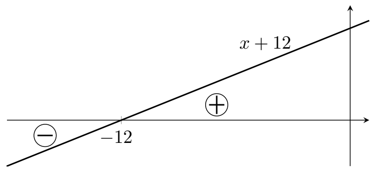
Értékkészlet. $R_f = (-1/20, \infty)$.

Konvexitás, inflexiós pont. A "második táblázat" megadása a második derivált segítségével.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x-3)^3 - (-x-7) \cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{-(x-3) - 3(-x-7)}{(x-3)^4}$$

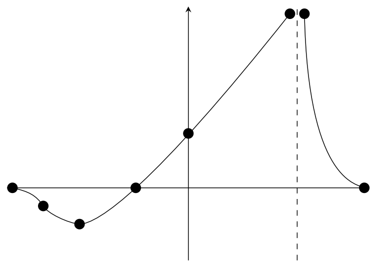
$$= \frac{2x+24}{(x-3)^4} \,.$$

A kritikus pont a $2x + 24 = 0$ egyenletből $x = -12$. A nevező nemnegatív, így az előjel meghatározásához csak az $y = x + 12$ egyenest ábrázoljuk.



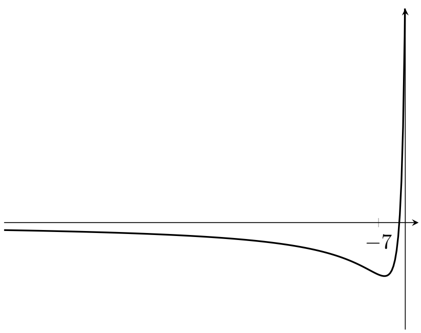
Így a második táblázat:

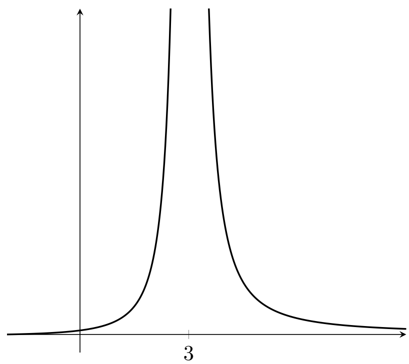
	< -12	-12	$(-12, 3)$	> 3
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	$\cup$



Grafikon.

A jobb szemléltetés érdekében két ábrát mutatunk a függvény tényleges grafikonjáról, ezeket a TikZ programmal készítettük.





(b) $f(x) = xe^{-x^2}$

Megoldás.

Értelmezési tartomány. $x \in \mathbb{R}$, azaz $D_f = (-\infty, \infty)$.

Tengelymetszetek. Az $f(0) = 0$ érték az y-tengelymetszet. Ez egyben x-tengelymetszet is, és az egyetlen, mert az $xe^{-x^2} = 0$ egyenletnek nincs másik megoldása.

Paritás. $f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$ alapján a függvény páratlan, azaz a függvény grafikonja szimmetrikus lesz az origóra.

Határérték. Az értelmezési tartomány alapján két határértéket számolunk.

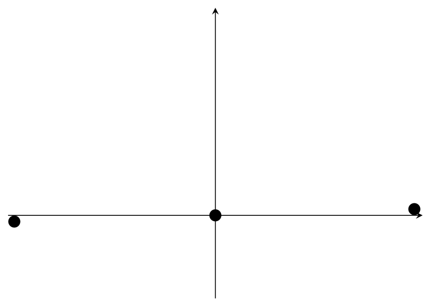
A L'Hospital–szabály alapján

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0^- \ ,$$

ugyanis

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0^- \ .$$

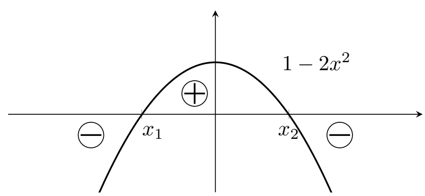
De ekkor $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0^+$, mert a függvény páratlan.



Monotonitás, helyi szélsőérték.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) \ .$$

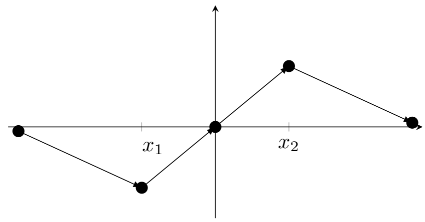
A kritikus pontokat az $f' = 0$ egyenletből $e^{-x^2} > 0$ miatt $1 - 2x^2 = 0$ adja, így $x_1 = -1/\sqrt{2}$ $x_2 = 1/\sqrt{2}$.
A deriváltfüggvény előjelének megállapításához $e^{-x^2} > 0$ miatt elegendő az $1 - 2x^2$ függvény grafikonját ismerni.



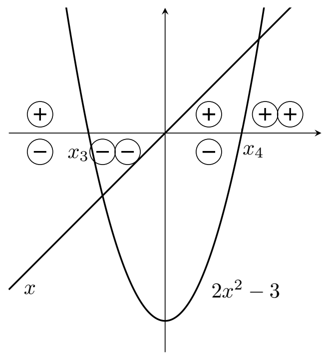
Így az első táblázat:

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	max $\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$

Értékkészlet. $R_f = [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$.



Konvexitás, inflexiós pont.



$$
\begin{aligned}
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) \\
&= 2xe^{-x^2}(2x^2-3)\,.
\end{aligned}
$$

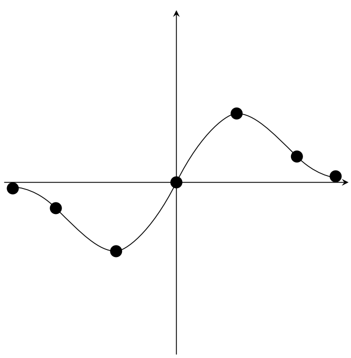
A kritikus pontok:
$x = 0$, $x_3 = -\sqrt{3/2}$, $x_4 = \sqrt{3/2}$.

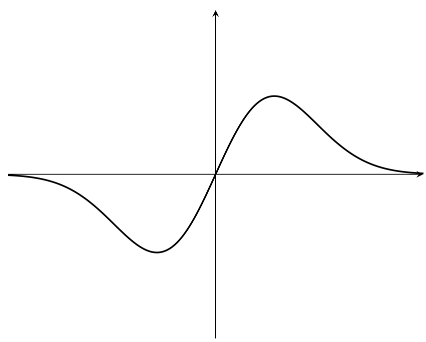
Az előjel meghatározásához az $y = x$ és az $y = 2x^2 - 3$ függvényeket ábrázoljuk.

Így a második táblázat:

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < x_4$	$x = x_4$	$x > x_4$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	inf	$\cap$	inf	$\cup$

Grafikon.





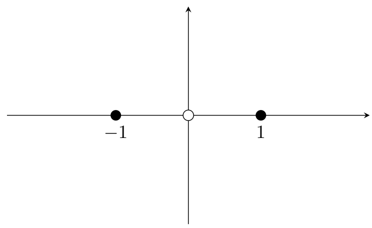
(c) $f(x) = x \ln^2 |x|$

Megoldás.

ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY. $x \neq 0$, azaz $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

TENGELYMETSZETEK. Az értelmezési tartomány miatt y–tengelymetszet nincs, az $x \ln^2 |x| = 0$ egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} \ln |x| &= 0 \\ |x| &= 1, \\ x &= \pm 1 \,. \end{aligned}$$



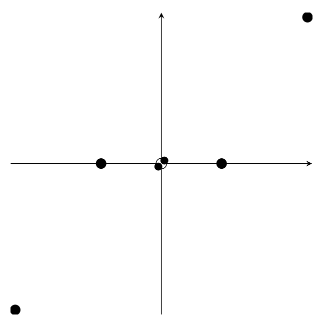
PARITÁS. $f(-x) = (-x) \ln^2 |-x| = -x \ln^2 |x| = -f(x)$, így a függvény páratlan, azaz a grafikon szimmetrikus az origóra.
Ezen tulajdonság miatt csak a pozitív félegyenesen vizsgáljuk a függvény tulajdonságait, majd az így kapott grafikont tükrözzük az origóra. Számolásunkat könnyíti, hogy ekkor, azaz $x > 0$ esetén $x \ln^2 |x| = x \ln^2 x$.

HATÁRÉRTÉK: Az értelmezési tartomány és az előbbi megjegyzés alapján csak két határértéket számolunk.

$$\lim_{x \to \infty} x \ln^2 x = \infty \,,$$

illetve a L'Hospital–szabályt kétszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x = 0^+ \,,$$

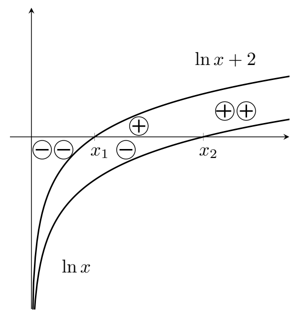


ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-2x) \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0^+ \,. \end{aligned}$$

Ábrázoláskor a kapott értékeket a paritás miatt tükrözzük az origóra, teljes ábrát készítünk.

Monotonitás, helyi szélsőérték.



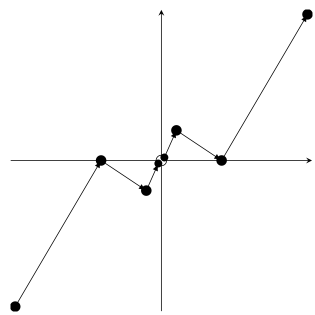
$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln^2 x + 2\ln x \\ &= \ln x\,(\ln x + 2) \end{aligned}$$

alapján a kritikus pontok:
$x_1 = e^{-2}$, $x_2 = 1$.
A deriváltfüggvény előjelének megállapításához ábrázoljuk az $y = \ln x$ és az $y = \ln x + 2$ függvényeket.

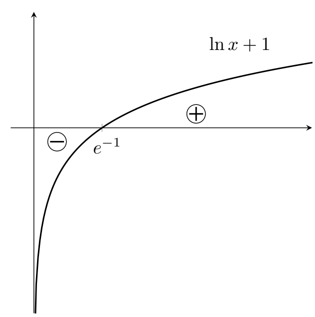
Így az első táblázat "fele":

	$0 < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max $4e^{-2}$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

Értékkészlet. $R_f = (-\infty; \infty)$.



Konvexitás, inflexiós pont.



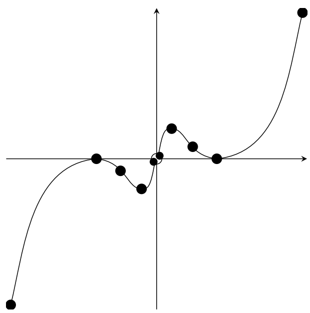
$$f''(x) = \frac{2}{x}\,(\ln x + 1)$$

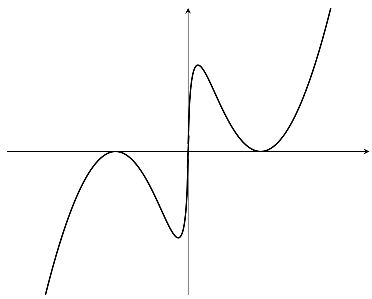
alapján a kritikus pont $x = e^{-1}$.
Mivel $\dfrac{2}{x} > 0$, így az előjel meghatározásához csak az $y = \ln x + 1$ görbét ábrázoljuk.

Így a második táblázat "fele":

	$0 < x < e^{-1}$	$x = e^{-1}$	$x > e^{-1}$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$

GRAFIKON.





(d) $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+2)^2}$

Megoldás.

ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY. $x \in \mathbb{R}$, azaz $D_f = (-\infty, \infty)$.

TENGELYMETSZETEK. $f(0) = 2 - 3\sqrt[3]{4}$, az x–tengelymetszet meghatározásával nem foglalkozunk, ugyanis egy 3–adfokú egyenletet kellene megoldanunk.

PARITÁS. Nincs, például $f(1) = 4 - 3\sqrt[3]{9}$, $f(-1) = -3$ alapján $f(1) \neq f(-1)$ és $f(1) \neq -f(-1)$.

HATÁRÉRTÉK. Az

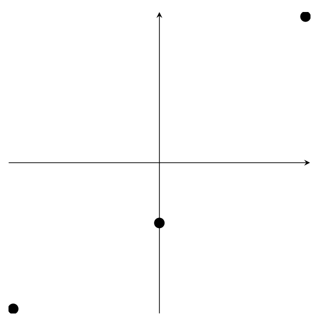
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2 + 4x + 4} \\ &= x\left(2 + \frac{2}{x} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}}\right) \end{aligned}$$

összefüggés alapján

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

és

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \,.$$



Monotonitás, helyi szélsőérték.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+2}}\,.$$

A deriváltfüggvény nincs értelmezve az $x = -2$ pontban, ellentétben az eredeti függvénnyel, így ez kritikus pont. További kritikus pont az $x = -1$.
A deriváltfüggvény előjelének megállapításához most használjunk tesztpontokat:

Ha $x < -2$, akkor például az $x = -3$ választással kapjuk, hogy

$$f'(-3) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{-1}} = 2 - \frac{2}{-1} > 0\,.$$

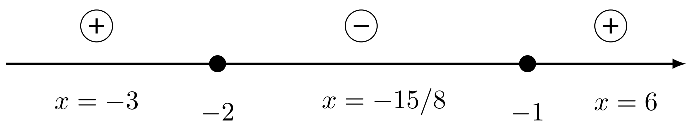
Ha $-2 < x < -1$, akkor például az $x = -15/8$ választással

$$f'(-15/8) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{1/8}} = 2 - 2 \cdot 8 < 0\,.$$

Ha $x = 6$, akkor

$$f'(6) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = 2 - \frac{2}{2} > 0\,.$$

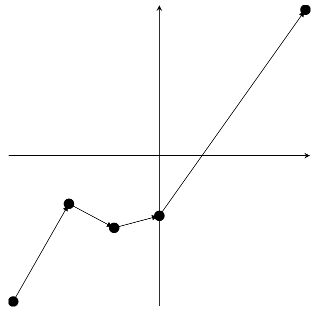
Összefoglalva:



Így az első táblázat:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max -2	$\searrow$	min -3	$\nearrow$

Értékkészlet. $R_f = (\infty, \infty)$.



Konvexitás, inflexiós pont.

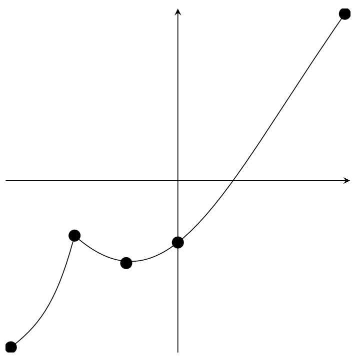
$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}\,,$$

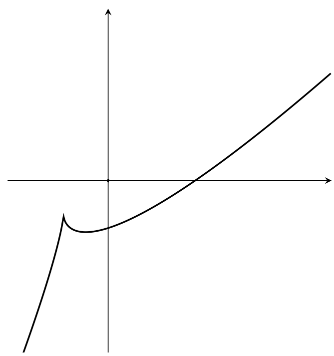
ha $x \neq -2$. Jól láthatóan a második derivált pozitív.

Így a második táblázat:

	$x < -2$	-2	$x > -2$
f''	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\cup$		$\cup$

Grafikon.





Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln^{2/3} x$ függvény értelmezési tartományát, tengelymetszeteit, paritását, határértékeit.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ függvény második táblázatát.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ függvény határértékeit, második táblázatát.

A csoport megoldása

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln^{2/3}x=\frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{2/3}=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\left(\ln x\right)^2}\,.$$

ÉT: $x>0$, így a függvény nem metszi az y–tengelyt, nincs paritása.
Az x–tengelymetszet:

$$\begin{aligned} && \frac{1}{x}\ln^{2/3}x&=0\\ \frac{1}{x}\neq 0\,, && \ln^{2/3}x&=0\\ && \ln x&=0\\ && x&=1\,. \end{aligned}$$

Az értelmezési tartomány, $(0,\infty)$ alapján két határértéket számolunk:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln^{2/3}x=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{2/3}=\text{"}\infty\cdot\infty\text{"}=\infty\,.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{2/3}=\text{"}0\cdot\infty\text{"}\,,$$

így a L'Hospital szabályt használjuk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{2/3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^{2/3}}{x}$$

alapján

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{-1/3}\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\cdot 0\cdot 0=0\,.$$

Tehát

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln^{2/3}x=0\,.$$

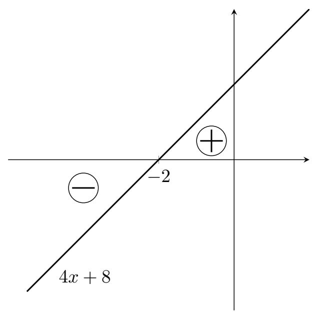
B csoport megoldása

ÉT: $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1)^2 - (x^2+1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1) \cdot 2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 - 2}{(x-1)^3} = \frac{-2x-2}{(x-1)^3},$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x-1)^3 - (-2x-2) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2 \cdot (x-1) - (-2x-2) \cdot 3}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{-2x+2+6x+6}{(x-1)^4} = \frac{4x+8}{(x-1)^4}$$

alapján a kritikus pont $4x+8=0$, azaz $x=-2$.
A nevező, $(x-1)^4$ nemnegatív, így az előjel meghatározásához csak az $y = 4x+8$ egyenest ábrázoljuk.



	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x>1$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\cap$	inf	$\cup$	$\cup$

C csoport megoldása

ÉT: $x \in \mathbb{R}$, így két határértéket számolunk:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right) = \text{"}\infty - \infty\text{"}\,,$$

ezért

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\cdot\left(1 - 3\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^2\cdot\left(1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}}\right) = \text{"}\infty\cdot 1\text{"} = \infty\,,$$

hasonlóan

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - 3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}}\right) = \text{"}\infty\cdot 1\text{"} = \infty\ .$$

A deriváltak

$$f'(x) = \left[x^2 - 3x^{2/3}\right]' = 2x - 3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3} = 2x - 2x^{-1/3}\,,$$

$$f''(x) = 2 - 2\cdot\frac{-1}{3}x^{-4/3} = 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,.$$

A derivált függvény nincs értelmezve az $x = 0$ pontban, ellentétben az eredeti függvénnyel, így ez kritikus pont.
Jól láthatóan a második derivált nemnegatív, így több kritikus pont nincs.
A második táblázat:

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
f''	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\cup$		$\cup$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. A tanult lépések alapján végezzünk teljes függvényvizsgálatot.

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = (x-5)^3 \cdot \sqrt{x^2}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

(h) $f(x) = x \ln |x|$

(i) $f(x) = x^2 \ln |x|$

(j) $f(x) = x \ln^{2/3} x$

(k) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(l) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

(m) $f(x) = \dfrac{x}{e^x(x-1)}$

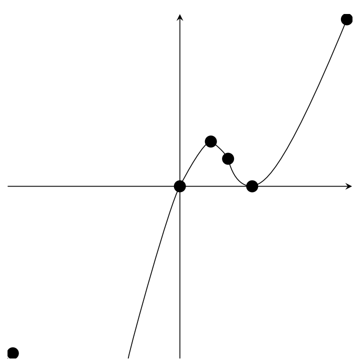
(n) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2x}{3}}$

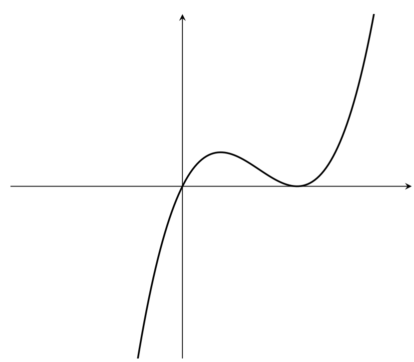
(o) $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4\,,$ kritikus pontok: 2/3, 2
$f''(x) = 6x - 8\,,$ kritikus pont: 4/3

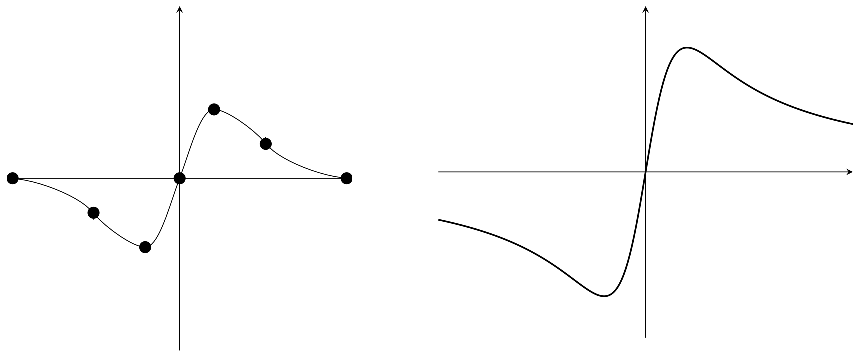




(b) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}, \quad \text{kritikus pontok: } \pm 1$$

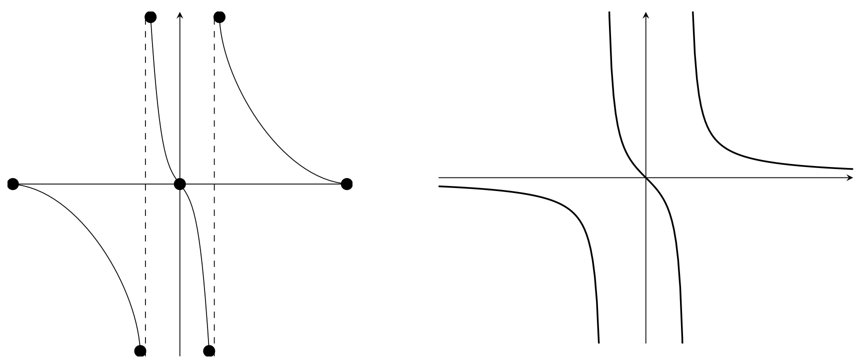
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}, \quad \text{kritikus pontok: } 0, \ \pm\sqrt{3}$$



(c) Értelmezési tartomány: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}, \quad \text{kritikus pont nincs}$$

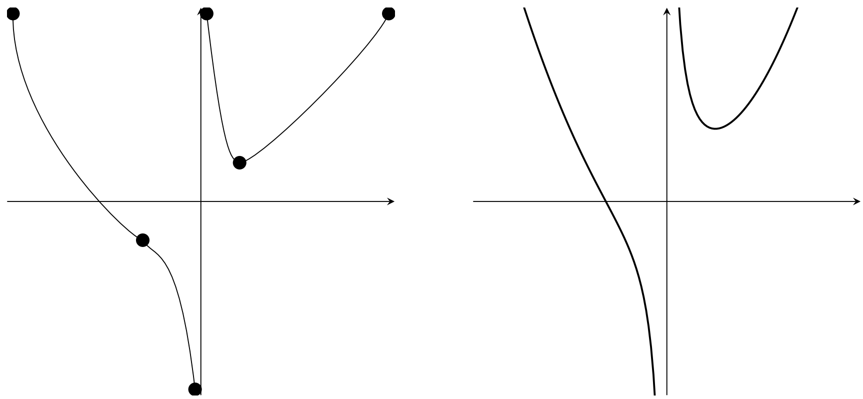
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad \text{kritikus pont: } 0$$



(d) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$, kritikus pont: 1

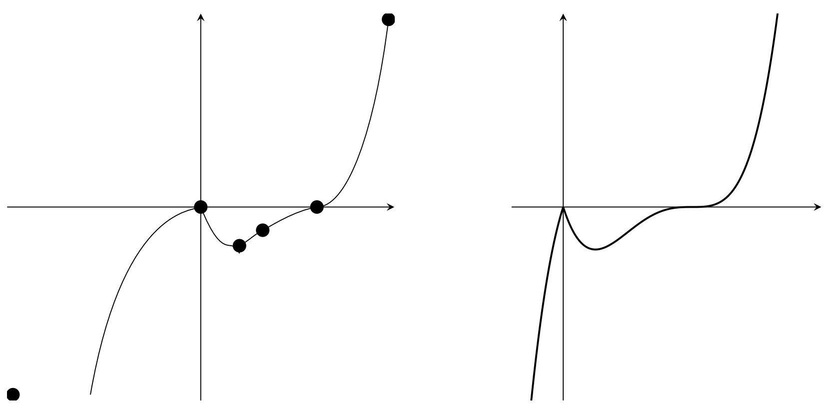
$f''(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3}$, kritikus pont: $\sqrt[3]{-2}$



(e) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-5)^2(4x-5), & \text{ha } x < 0 \\ (x-5)^2(4x-5), & \text{ha } x > 0\,, \end{cases} \quad \text{kritikus pontok} : 0, 5/4, 5$$

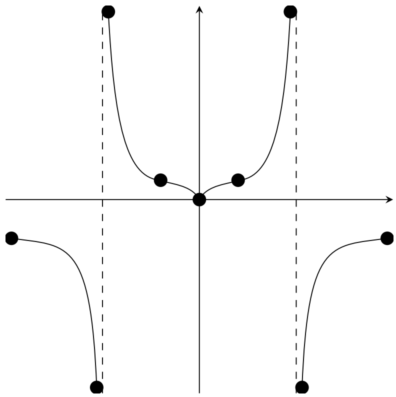
$$f''(x) = \begin{cases} -(x-5)(12x-30), & \text{ha } x < 0 \\ (x-5)(12x-30), & \text{ha } x > 0\,, \end{cases} \quad \text{kritikus pontok} : 0, 5/2, 5$$

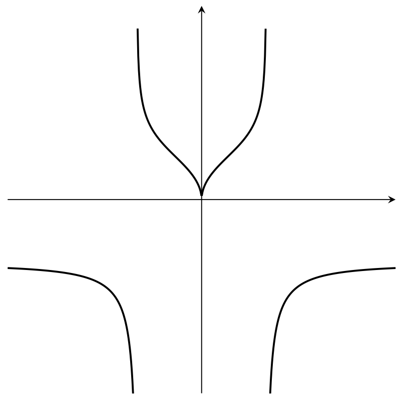


(f) Értelmezési tartomány: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{1/3}(1-x^2)^{4/3}}$, kritikus pont: 0

$f''(x)=\dfrac{2}{9}\dfrac{9x^2-1}{x^{4/3}(1-x^2)^{7/3}}$, kritikus pontok: $0,\ \pm\dfrac{1}{3}$

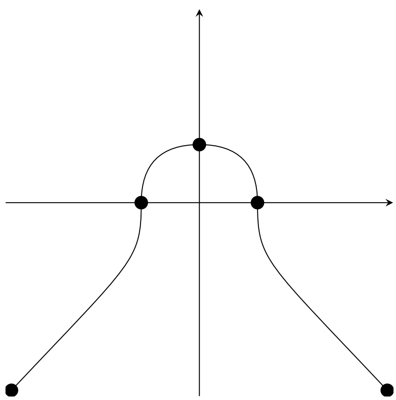


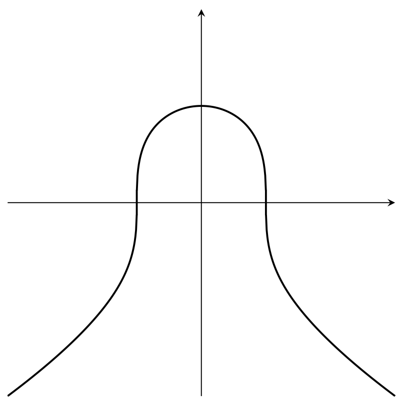


(g) Értelmezési tartomány: $(-\infty,\infty)$

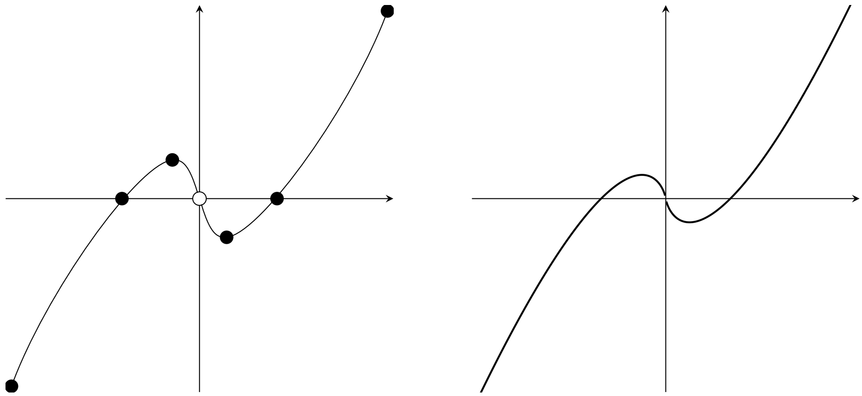
$f'(x)=\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$, kritikus pontok: $0,\ \pm 1$

$f''(x)=\dfrac{-2x^2-6}{9\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$, kritikus pontok: ± 1

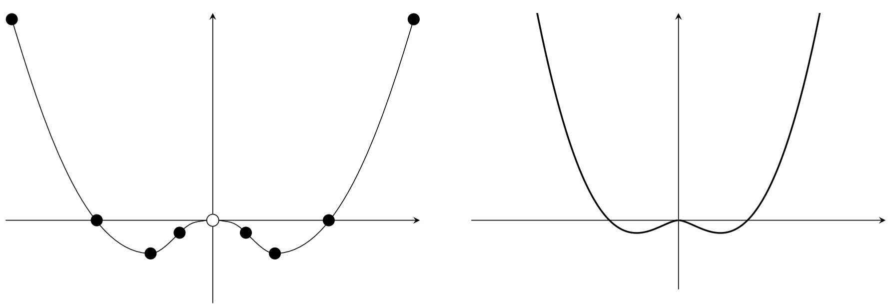




(h) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f'(x) = \ln|x| + 1\,, \quad$ kritikus pontok: $\pm e^{-1}$
$f''(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad$ kritikus pont nincs



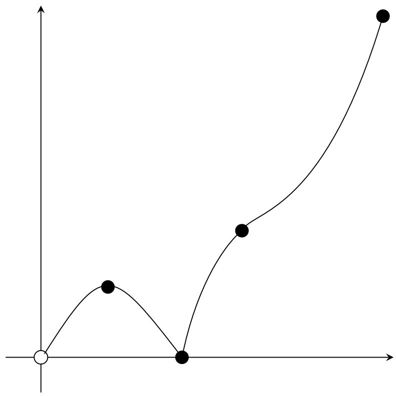
(i) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f'(x) = 2x\ln|x| + x\,, \quad$ kritikus pontok: $\pm e^{-1/2}$
$f''(x) = 2\ln|x| + 3\,, \quad$ kritikus pontok: $\pm e^{-3/2}$

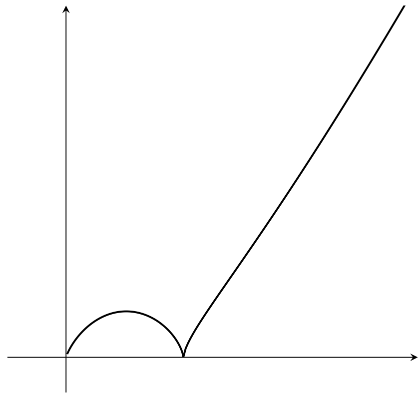


(j) Értelmezési tartomány: $(0, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\ln x + 2}{\ln^{1/3} x}$, kritikus pontok: $e^{-2/3}$, 1

$f''(x) = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3\ln x - 1}{x \ln^{4/3} x}$, kritikus pontok: 1, $e^{1/3}$

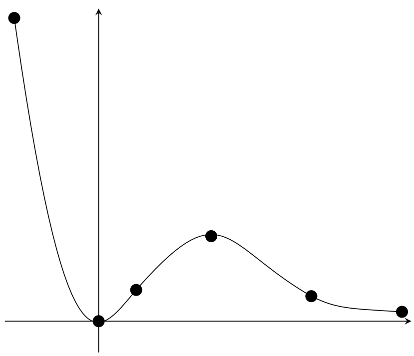


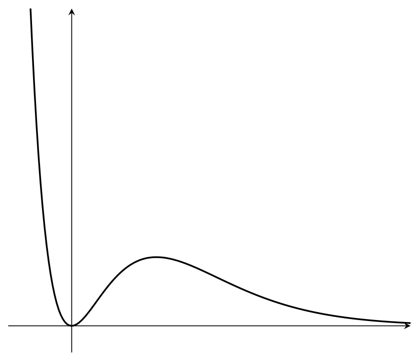


(k) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, kritikus pontok: 0, 2

$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, kritikus pontok: $2 \pm \sqrt{2}$

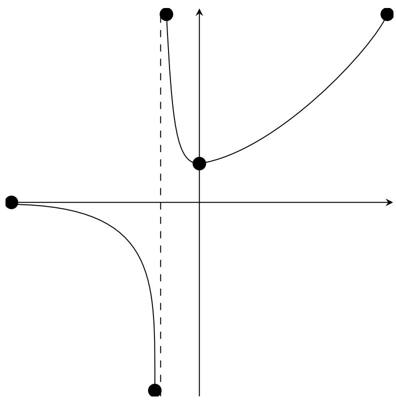


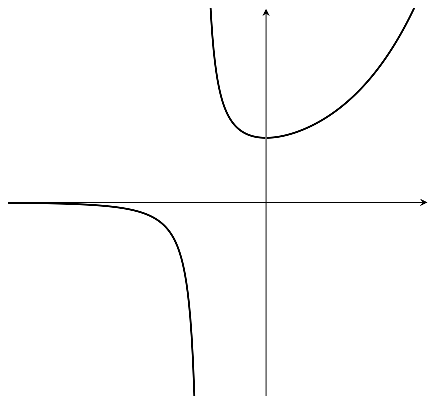


(l) Értelmezési tartomány: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,, \quad \text{kritikus pont: } 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}\,, \quad \text{kritikus pont nincs}$$

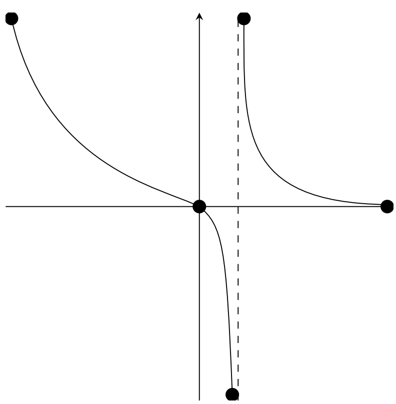


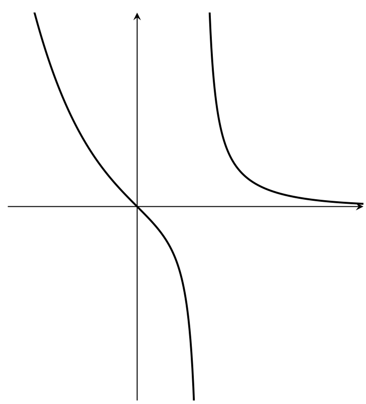


(m) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x-1}{e^x(x-1)^2}\,, \quad \text{kritikus pont nincs}$$

$$f''(x) = \frac{x^3-2x^2+3x}{e^x(x-1)^3}\,, \quad \text{kritikus pont: } 0$$

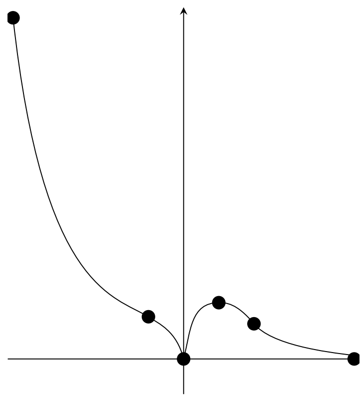


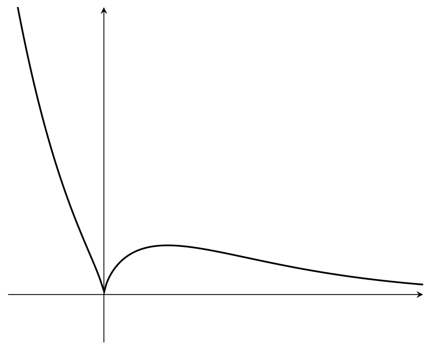


(n) Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}e^{-\frac{2x}{3}}\dfrac{1-x}{x^{1/3}}$, kritikus pontok: 0, 1

$f''(x) = \dfrac{2}{9}e^{-\frac{2x}{3}}\dfrac{2x^2-4x-1}{x^{4/3}}$, kritikus pontok: 0, $1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

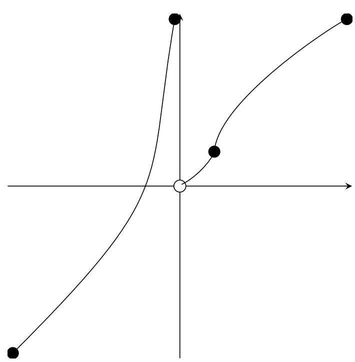


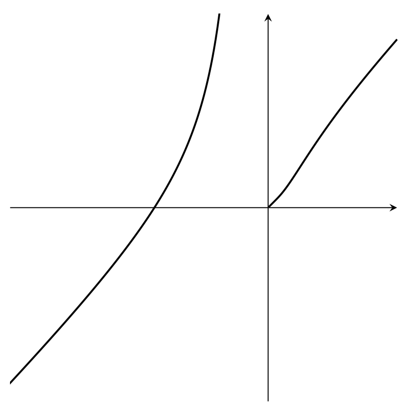


(o) Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = 1 + \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$, kritikus pont nincs

$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{1-2x}{x^4}$, kritikus pont: $\dfrac{1}{2}$





11. óra

Határozatlan integrál I.

Házi feladatok

1. Feladat. Az egyszerű integrálok tulajdonsága,

$$\text{ha} \quad \int f(x)\ dx = F(x) + C\,, \quad \text{akkor} \quad \int f(ax+b)\ dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

alapján határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \cos x\ dx\,,\ \int \cos(x+4)\ dx\,,\ \int \cos(x-3)\ dx\,,\ \int \cos 3x\ dx\,,$
$\displaystyle\int \cos 2\pi x\ dx\,,\ \int \cos\frac{\pi-2x}{3}\ dx$

Megoldás.

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C\,, \quad \text{elemi integrál.}$$

$$\int \cos(x+4)\ dx = \sin(x+4) + C\,, \quad \text{hiszen} \quad a = 1\,.$$

$$\int \cos(x-3)\ dx = \sin(x-3) + C\,, \quad a = 1\,.$$

$$\int \cos 3x\ dx = \frac{\sin 3x}{3} + C\ , \quad a = 3\,.$$

$$\int \cos 2\pi x\ dx = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} + C\,, \quad a = 2\pi\,.$$

$$\int \cos\frac{\pi-2x}{3}\ dx = \int \cos\left(-\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)\ dx = \frac{\sin\frac{\pi-2x}{3}}{-2/3} + C\,, \quad a = -2/3\,.$$

(b) $\displaystyle\int e^x\ dx\,,\ \int e^{3-x}\ dx\,,\ \int \frac{1}{e^{2x}}\ dx\,,\ \int e^{-\frac{x}{2}}\ dx\,,\ \int e^{-xy}\ dx$

Megoldás.

$$\int e^x\ dx = e^x + C\,, \quad \text{elemi integrál.}$$

$$\int e^{3-x}\ dx = \frac{e^{3-x}}{-1} + C = -e^{3-x} + C\,, \quad a = -1\,.$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}}\ dx = \int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2} + C\,, \quad a = -2\,.$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\ dx = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-1/2} + C\,, \quad a = -1/2\,.$$

$$\int e^{-xy}\ dx = \frac{e^{-xy}}{-y} + C\,, \quad a = -y \quad (\text{ha} \quad y \neq 0)\,.$$

2. Feladat. Egyszerűsítés, algebrai átalakítás után határozzuk meg a következő egyszerű integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \left(5x^2 + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x}\right)\ dx$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \left(5x^2 + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x}\right)\ dx &= 5\int x^2\ dx + \frac{1}{4}\int x^{-3}\ dx - \int \frac{1}{x}\ dx \\ &= 5\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \ln|x| + C\,.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx &= \int \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\ dx = \int (2x^{5/2} + x^{-1/2} - 1)\ dx \\ &= 2\int x^{5/2}\ dx + \int x^{-1/2}\ dx - \int 1\ dx \\ &= 2\cdot\frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} - x + C\,.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{3x-2}\ dx$

Megoldás.

$$\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+3}{6x-4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x-4+7}{6x-4} = \frac{2}{3}\cdot\left(1 + \frac{7}{6x-4}\right)$$

alapján

$$\int \frac{2x+1}{3x-2}\ dx = \frac{2}{3}\int\left(1 + \frac{7}{6x-4}\right)\ dx = \frac{2}{3}\left(x + 7\cdot\frac{\ln|6x-4|}{6}\right) + C\,.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+9}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \int (x+3)^{-2}\,dx = \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C\,.$$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+6x+9}}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+6x+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}\,dx = \int (x+3)^{-2/5}dx = \frac{(x+3)^{3/5}}{3/5} + C\,.$$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+3) + C\,.$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}\,dx = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3} + C\,.$$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}}{1/\sqrt{3}} + C\,.$$

(i) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

Megoldás. A $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ azonosság alapján

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C\,.$$

3. Feladat. A helyettesítéses integrálás,

$$\text{ha} \quad \int f(y)\; dy = F(y) + C\,, \quad \text{akkor} \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\; dx = F(g(x)) + C$$

segítségével határozzuk meg a következő szorzatfüggvények integrálját. A megoldás során a $g(x)$ belső függvény helyett használjuk az y jelölést.

(a) $\displaystyle\int 3x^2(x^3+8)^{10}\; dx$

Megoldás. Az

$$\int 3x^2(x^3+8)^{10}\; dx = \int (x^3+8)^{10} \cdot 3x^2\; dx$$

átalakítás szerint az első szorzótényező összetett függvény, ahol a belső függvény $y = x^3 + 8$. Így $y' = 3x^2$, azaz $dy = 3x^2\; dx$, tehát

$$\int (x^3+8)^{10} \cdot 3x^2\; dx = \int y^{10}\; dy = \frac{y^{11}}{11} + C = \frac{(x^3+8)^{11}}{11} + C\,.$$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{5x^2-4}\; dx$

Megoldás. A belső függvény $y = 5x^2 - 4$, így $y' = 10x$, azaz $\dfrac{1}{10}\; dy = x\; dx$, tehát

$$\int x\sqrt[3]{5x^2-4}\; dx = \int (5x^2-4)^{1/3} \cdot x\; dx = \int y^{1/3} \cdot \frac{1}{10}\; dy = \frac{1}{10}\int y^{1/3}\; dy$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{y^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{10} \cdot \frac{(5x^2-4)^{4/3}}{4/3} + C\,.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt[3]{5x^2-4}}\; dx$

Megoldás. Ekkor

$$\int \frac{3x}{\sqrt[3]{5x^2-4}}\; dx = \int (5x^2-4)^{-1/3} \cdot 3x\; dx\,.$$

A belső függvény $y = 5x^2 - 4$, így $y' = 10x$, azaz $\dfrac{3}{10}\; dy = 3x\; dx$, tehát

$$\int (5x^2-4)^{-1/3} \cdot 3x\; dx = \int y^{-1/3} \cdot \frac{3}{10}\; dy$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{y^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{10} \cdot \frac{(5x^2-4)^{2/3}}{2/3} + C\,.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^3}\, dx$

Megoldás. $y = x^2+6x$, innen $y' = 2x+6$, így $\dfrac{1}{2}\, dy = (x+3)\, dx$, ezért

$$\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^3} dx = \int (x^2+6x)^{-3} \cdot (x+3)\, dx = \int y^{-3} \cdot \frac{1}{2}\, dy$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+6x)^{-2}}{-2} + C\,.$$

(e) $\displaystyle\int x^2 e^{1-x^3}\, dx$

Megoldás. $y = 1-x^3$, $y' = -3x^2$, $-\dfrac{1}{3}\, dy = x^2\, dx$, ezért

$$\int x^2 e^{1-x^3}\, dx = \int e^{1-x^3} \cdot x^2\, dx = \int e^y \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\, dy$$
$$= -\frac{1}{3} e^y + C = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C\,.$$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+e^x}\, dx$

Megoldás. $y = 4+e^x$, $dy = e^x\, dx$ alapján

$$\int \frac{e^x}{4+e^x}\, dx = \int (4+e^x)^{-1} \cdot e^x\, dx = \int y^{-1}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy$$
$$= \ln|y| + C = \ln|4+e^x| + C\,.$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln 3x}\, dx$

Megoldás. $y = \ln 3x$, $\;y' = \dfrac{1}{3x} \cdot 3$, $\;dy = \dfrac{1}{x}\, dx$, tehát

$$\int \frac{1}{x \ln 3x}\, dx = \int (\ln 3x)^{-1} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int y^{-1}\, dy = \ln|y| + C = \ln|\ln 3x| + C\,.$$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx$

Megoldás. $y = \dfrac{1}{x}$, $-dy = \dfrac{1}{x^2}\, dx$,

$$\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx = \int -\sin y\, dy = \cos y + C = \cos\frac{1}{x} + C\,.$$

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)\, dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{4x^2+4x+1}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{2x}\, dx$

B csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{x-1}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x-1}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+6x-9}\, dx$

C csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-3+x}{x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

A csoport megoldása

(a)

$$\int \sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)\ dx = \int \sin\left(-\frac{1}{2}x + \pi\right)\ dx = \frac{-\cos\left(-\frac{1}{2}x + \pi\right)}{-1/2} + C\,.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1}\ dx = \int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\ dx = \int (2x+1)^{2/3}\ dx \\ = \frac{(2x+1)^{5/3}}{(5/3)\cdot 2} + C\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{2x}\ dx = \int \sqrt[3]{\ln x}\cdot\frac{1}{2x}\ dx = \int (\ln x)^{1/3}\cdot\frac{1}{2x}\ dx$$

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ \frac{dy}{dx} &= y' = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2}dy &= \frac{1}{2x}\ dx \end{aligned}$$

alapján

$$= \int y^{1/3}\cdot\frac{1}{2}\ dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^{4/3} x}{4/3} + C\,.$$

B csoport megoldása

(a)

$$\int \frac{1}{e^{x-1}}\ dx = \int e^{1-x}\ dx = \frac{e^{1-x}}{-1} + C\,.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{4x-1}\ dx &= \frac{3}{4}\int \frac{4}{3}\cdot\frac{3x+2}{4x-1}\ dx = \frac{3}{4}\int \frac{12x+8}{12x-3}\ dx = \frac{3}{4}\int \frac{12x-3+11}{12x-3}\ dx \\ &= \frac{3}{4}\int\left(1+\frac{11}{12x-3}\right)\ dx = \frac{3}{4}\left(x+11\cdot\frac{\ln|12x-3|}{12}\right)+C\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x-9}\ dx = \int (x^2+6x-9)^{-1}\cdot(x+3)\ dx$$

$$\begin{aligned}y &= x^2+6x-9 \\ \frac{dy}{dx} &= y' = 2x+6 = 2(x+3) \\ \frac{1}{2}dy &= (x+3)\ dx\end{aligned}$$

alapján

$$\begin{aligned}&= \int y^{-1}\cdot\frac{1}{2}\ dy = \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}\ dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x-9| + C\,.\end{aligned}$$

C csoport megoldása

(a)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-3+x}{x}\ dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{3}{x}+\frac{x}{x}\right)\ dx = \int \left(x^{-2/3}-\frac{3}{x}+1\right)\ dx$$
$$= \frac{x^{1/3}}{1/3} - 3\ln|x| + x + C\,.$$

(b)

$$\int \frac{1}{x^2+6}\ dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^2/6+1}\ dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(x/\sqrt{6}\right)^2+1}\ dx$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\left(x/\sqrt{6}\right)}{1/\sqrt{6}} + C\,.$$

(c)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx = \int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int e^{\sqrt{x}}\cdot x^{-1/2}\ dx$$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$2dy = x^{-1/2}\ dx$$

alapján

$$= \int e^y\cdot 2\ dy = 2\int e^y\ dy = 2e^y + C = 2e^{\sqrt{x}} + C\,.$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a következő egyszerű integrálokat.

(a) $\int (1+x)^4\,dx$ (d) $\int \frac{1}{1+3x}\,dx$ (g) $\int \cos\frac{x}{6}\,dx$

(b) $\int \sqrt{3-4x}\,dx$ (e) $\int 4^{2-3x}\,dx$ (h) $\int \sin(x-\pi)\,dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}\,dx$ (f) $\int e^{-px}\,dx$ (i) $\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx$

2. Feladat. Egyszerűsítés, algebrai átalakítás után határozzuk meg a következő egyszerű integrálokat.

(a) $\int (\sqrt[3]{x^2}-4x+4)\,dx$ (e) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ (i) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

(b) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ (f) $\int \frac{3x+5}{2x+1}\,dx$ (j) $\int \frac{3}{x^2+8}\,dx$

(c) $\int \left(x^5+\frac{3}{x^5}\right)dx$ (g) $\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$ (k) $\int \frac{1}{(4x^2+4x+1)^2}\,dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[4]{x^7}-2x+5}{x^2}\,dx$ (h) $\int \sqrt[5]{x^2+4x+4}\,dx$ (l) $\int \cos^2 x\,dx$

3. Feladat. A helyettesítéses integrálás segítségével határozzuk meg az alábbi szorzatfüggvények integrálját.

(a) $\int 3x^2(3+x^3)^3\,dx$ (e) $\int \frac{2x}{x^4+2x^2+1}\,dx$ (i) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

(b) $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ (f) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+6}\,dx$ (j) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(c) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[5]{(x^3+2)^2}}\,dx$ (g) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ (k) $\int \frac{\sqrt{\ln 2x}}{3x}\,dx$

(d) $\int \frac{-x^2}{x^3+2}\,dx$ (h) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$ (l) $\int \frac{1}{x+x\ln x}\,dx$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $\dfrac{(1+x)^5}{5}+C$

(b) $\dfrac{(3-4x)^{3/2}}{3/2\cdot(-4)}+C$

(c) $\dfrac{(1-x)^{-2/3}}{2/3}+C$

(d) $\dfrac{\ln|1+3x|}{3}+C$

(e) $\dfrac{4^{2-3x}}{\ln 4\cdot(-3)}+C$

(f) $\dfrac{e^{-px}}{-p}+C$

(g) $\dfrac{\sin\frac{x}{6}}{1/6}+C$

(h) $-\cos(x-\pi)+C$

(i) $\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2}+C$

2. Feladat megoldása.

(a) $\dfrac{x^{5/3}}{5/3}-4\cdot\dfrac{x^2}{2}+4x+C$

(b) $6\cdot\dfrac{x^{1/2}}{1/2}+2\cdot\dfrac{x^{-2}}{-2}+C$

(c) $\dfrac{x^6}{6}+3\cdot\dfrac{x^{-4}}{-4}+C$

(d) $\dfrac{4}{3}x^{3/4}-2\ln|x|-\dfrac{5}{x}+C$

(e) $\dfrac{x^{7/3}}{7/3}+\dfrac{x^{1/3}}{1/3}+C$

(f) $\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{7}{6}\ln|6x+3|\right)+C$

(g) $-\dfrac{1}{x+2}+C$

(h) $\dfrac{5}{7}(x+2)^{7/5}+C$

(i) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$

(j) $\dfrac{3\sqrt{8}}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{8}}+C$

(k) $\dfrac{1}{-6(2x+1)^3}+C$

(l) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$
$\left(\text{u. is}\quad \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)$

3. Feladat megoldása.

(a) $\dfrac{(3+x^3)^4}{4}$

(b) $\dfrac{2}{9}(x^3+2)^{3/2}+C$

(c) $\dfrac{10}{9}\sqrt[5]{(x^3+2)^3}+C$

(d) $-\dfrac{1}{3}\ln|x^3+2|+C$

(e) $-\dfrac{1}{x^2+1}+C$

(f) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-4x+6|+C$

(g) $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+C$

(h) $\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$

(i) $\ln|\sin x|+C$

(j) $\operatorname{arctg} e^x+C$

(k) $\dfrac{2}{9}\sqrt{\ln^3 2x}+C$

(l) $\ln|1+\ln x|+C$

12. óra

Határozatlan integrál II.

Házi feladatok

1. Feladat. A parciális integrálás módszerének

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g\,, \quad \text{vagy} \quad \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

segítségével határozzuk meg a következő szorzatfüggvények integrálját.

(a) $\displaystyle\int x \cos x \; dx$

Megoldás. Mindkét szorzótényező, az x és a $\cos x$ is elemi függvény. Az első egy polinom, a második pedig nem a logaritmus függvény. Ezért a polinomot deriváljuk tovább, azaz az $f = x$ választással élünk, ekkor a derivált $f' = 1$. Ez azt is jelenti, hogy $g' = \cos x$, ezt integrálva $g = \sin x$; C–től itt eltekintünk. Tehát

$$\begin{aligned} f &= x & f' &= 1 \\ g' &= \cos x & g &= \sin x \end{aligned}$$

alapján

$$\begin{aligned} \int x \cos x \; dx &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \; dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\,. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int (2x-1) \sin x \; dx$

Megoldás. Mindkét szorzótényező, a $2x-1$ és a $\sin x$ is elemi függvény. Az egyik egy polinom, a másik pedig nem a logaritmus függvény. Ezért a polinomot deriváljuk tovább, így

$$\begin{aligned} u &= 2x-1 & u' &= 2 \\ v' &= \sin x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

szerint

$$\begin{aligned}\int (2x-1)\sin x \; dx &= (2x-1)\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)\; dx \\ &= -(2x-1)\cos x + 2\int \cos x \; dx \\ &= -(2x-1)\cos x + 2\sin x + C\,.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{3x}} \; dx$

Megoldás. Ekkor

$$\int \frac{x}{e^{3x}} \; dx = \int x e^{-3x} \; dx$$

alapján a két szorzótényező az x és az e^{-3x}. Ezért

$$\begin{aligned} s &= x & s' &= 1 \\ t' &= e^{-3x} & t &= \frac{e^{-3x}}{-3} = -\frac{1}{3}e^{-3x}\end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned}\int x e^{-3x} \; dx &= x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} \; dx \\ &= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx \\ &= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C\,.\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int x^2 e^{-px} \; dx$

Megoldás. Amennyiben $p \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} f &= x^2 & f' &= 2x \\ g' &= e^{-px} & g &= \frac{e^{-px}}{-p}\end{aligned}$$

szerint

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-px} \; dx &= x^2\cdot\frac{e^{-px}}{-p} - \int 2x\cdot\frac{e^{-px}}{-p} \; dx \\ &= x^2\cdot\frac{e^{-px}}{-p} + \frac{2}{p}\int x\cdot e^{-px} \; dx\,.\end{aligned}$$

A kapott integrál ismét egy szorzat, a két tényező, x és e^{-px} két egyszerű függvény. Így a parciális integrálás ismételt alkalmazásával,

$$u = x \qquad u' = 1$$
$$v' = e^{-px} \qquad v = \frac{e^{-px}}{-p}$$

alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&= x^2 \cdot \frac{e^{-px}}{-p} + \frac{2}{p}\left(x \cdot \frac{e^{-px}}{-p} - \int \frac{e^{-px}}{-p}\, dx\right) \\
&= x^2 \cdot \frac{e^{-px}}{-p} + \frac{2}{p}\left(x \cdot \frac{e^{-px}}{-p} + \frac{1}{p}\int e^{-px}\, dx\right) \\
&= x^2 \cdot \frac{e^{-px}}{-p} + \frac{2}{p}\left(x \cdot \frac{e^{-px}}{-p} + \frac{1}{p}\frac{e^{-px}}{-p}\right) + C \\
&= -x^2 \cdot \frac{e^{-px}}{p} - 2x \cdot \frac{e^{-px}}{p^2} - 2\frac{e^{-px}}{p^3} + C\,.
\end{aligned}$$

Ha $p = 0$, akkor

$$\int x^2 e^{-px}\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C\,.$$

(e) $\displaystyle\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx$

Megoldás. Ebben az esetben tetszőlegesen választhatunk, legyen például a trigonometrikus függvény a "sima" függvény, azaz

$$u = \cos 4x \qquad u' = -4\sin 4x$$
$$v' = e^{-x} \qquad v = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}\,.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx &= \cos 4x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int -4\sin 4x \cdot \left(-e^{-x}\right)\, dx \\
&= -\cos 4x \cdot e^{-x} - 4\int \sin 4x \cdot e^{-x}\, dx\,.
\end{aligned}$$

A kapott szorzatfüggvény parciális integrálásakor a választásnak az elsővel megegyezőnek kell lennie. Most is a trigonometrikus függvény a "sima" függvény.

$$s = \sin 4x \qquad s' = 4\cos 4x$$
$$t' = e^{-x} \qquad t = -e^{-x}$$

miatt

$$
\begin{aligned}
&= -\cos 4x \cdot e^{-x} - 4\left(\sin 4x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int 4\cos 4x \cdot \left(-e^{-x}\right)\, dx\right) \\
&= -\cos 4x \cdot e^{-x} + 4\sin 4x \cdot e^{-x} - 16\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx\,,
\end{aligned}
$$

azaz visszakapjuk az eredeti integrál számszorosát. Így az

$$
\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx = -\cos 4x \cdot e^{-x} + 4\sin 4x \cdot e^{-x} - 16\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx
$$

egyenletet rendezve és a C konstanst beírva nyerjük, hogy

$$
\begin{aligned}
17\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx &= -\cos 4x \cdot e^{-x} + 4\sin 4x \cdot e^{-x} + C \\
\int \cos 4x \cdot e^{-x}\, dx &= -\frac{1}{17}\cos 4x \cdot e^{-x} + \frac{4}{17}\sin 4x \cdot e^{-x} + C\,.
\end{aligned}
$$

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

Megoldás. Mivel

$$
\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int x^{-2} \cdot \ln x\, dx\,,
$$

így az egyik szorzótényező az x^{-2}, a másik az $\ln x$ függvény. Ilyenkor mindig a logaritmus függvényt deriváljuk, azaz az

$$
\begin{aligned}
f' &= x^{-2} & \qquad f &= -\frac{1}{x} \\
g &= \ln x & \qquad g' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

választással kapjuk meg az eredményt:

$$
\begin{aligned}
\int x^{-2} \cdot \ln x\, dx &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= -\frac{1}{x}\ln x + \int x^{-2}\, dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C\,.
\end{aligned}
$$

(g) $\displaystyle\int x\ln(2+3x)\ dx$

Megoldás. Legyen

$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= \ln(2+3x) & g' &= \frac{3}{2+3x}\,. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \int x\ln(2+3x)\ dx &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(2+3x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{2+3x}\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(2+3x) - \int \frac{3x^2}{4+6x}\ dx\,. \end{aligned}$$

Polinomosztással kapjuk, hogy

$$\frac{3x^2}{4+6x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4/3}{4+6x}\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} \int x\ln(2+3x)\ dx &= \frac{x^2}{2}\ln(2+3x) - \int\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4/3}{4+6x}\right)\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(2+3x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{4}{3}\frac{\ln|4+6x|}{6} + C\,. \end{aligned}$$

2. Feladat. Elemi törtekre bontás segítségével határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\ dx$

Megoldás. Ahogy az 1. Fejezetben tanultuk,

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}\,,$$

ahonnan

$$2x+1 = A(x-1)+B(x-3)\,.$$

Mivel most két ismeretlen és két különböző gyök van, ezért a gyökök behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &x=3 \quad \text{esetén} \qquad 7 = A\cdot 2\,, \quad \text{azaz} \quad A = 7/2\,, \\ &x=1 \quad \text{esetén} \qquad 3 = B\cdot(-2)\,, \quad \text{azaz} \quad B = -3/2\,. \end{aligned}$$

Azaz
$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{7/2}{x-3} + \frac{-3/2}{x-1}\,.$$
Innen
$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\,dx = \int \left(\frac{7/2}{x-3} - \frac{3/2}{x-1}\right) dx = \frac{7}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x-1| + C\,.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{5}{2x^2+5x-3}\,dx$

Megoldás. Mivel $2x^2+5x-3$ zérushelyei az $1/2$ és a -3, így a nevező gyöktényezős alakja:
$$2x^2+5x-3 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3)\,.$$
Tehát
$$\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{5}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}\,,$$
vagyis
$$\begin{array}{llll} \text{ha} \quad x=1/2, & \text{akkor} \qquad 5 = A\cdot(7/2)\,, & \text{azaz} & A = 10/7\,, \\ \text{ha} \quad x=-3, & \text{akkor} \qquad 5 = B\cdot(-7)\,, & \text{azaz} & B = -5/7\,. \end{array}$$
Azaz
$$\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{10/7}{2x-1} + \frac{-5/7}{x+3}\,.$$
Innen
$$\begin{aligned}\int \frac{5}{2x^2+5x-3}\,dx &= \int\left(\frac{10/7}{2x-1} - \frac{5/7}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{10}{7}\cdot\frac{\ln|2x-1|}{2} - \frac{5}{7}\cdot\ln|x+3| + C\,.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+4}\,dx$

Megoldás. A számlálóban lévő polinom fokszáma három, ez nem kisebb a nevező fokszámánál, ami kettő. Ezért osztással kell kezdeni:
$$\frac{x^3+1}{x^2-4x+4} = x+4+\frac{12x-15}{x^2-4x+4}\,.$$

Az így kapott törtfüggvény felbontása

$$\frac{12x-15}{x^2-4x+4} = \frac{12x-15}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\,.$$

Két ismeretlen, de csak egy (kétszeres) gyök van, ezért az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva,

$$12x-15 = Ax-2A+B$$

alapján $A=12$, $B=9$ adódik. Tehát

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+4}\,dx &= \int \left(x+4+\frac{12}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}\right) dx\\ &= \frac{x^2}{2}+4x+12\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}+C\,.\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2-x^3}\,dx$

Megoldás. A helyes felbontás:

$$\frac{1}{3x^2-x^3} = \frac{1}{x^2(3-x)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{3-x} = \frac{Ax(3-x)+B(3-x)+Cx^2}{x^2(3-x)}\,.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével,

$$1 = (C-A)x^2+(3A-B)x+3B$$

alapján kapjuk, hogy $B=1/3$, $A=1/9$, $C=1/9$. Ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x^2-x^3}\,dx &= \int \left(\frac{1/9}{x}+\frac{1/3}{x^2}+\frac{1/9}{3-x}\right) dx\\ &= \frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}\ln|3-x|+C\,.\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int \frac{2-3x}{x^2+1}\,dx$

Megoldás. A nevezőben lévő x^2+1 polinomnak nincs valós gyöke. A számlálóban található $2-3x$ polinom elsőfokú, így ez a kifejezés egy elemi tört. Ekkor két részre kell bontanunk a törtet úgy, hogy az egyik tört számlálójában a nevező deriváltjának számszorosa, a másik tört számlálójában csak szám legyen:

$$\frac{2-3x}{x^2+1} = \frac{-3x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\,.$$

Az első tört integrálját helyettesítéssel, $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$ alapján kapjuk meg:

$$\int \frac{-3x}{x^2+1}\, dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$
$$= -\frac{3}{2}\ln|u| + C = -\frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C \ ;$$

a második egy elemi integrál:

$$\int \frac{2}{x^2+1}\, dx = 2\,\mathrm{arctg}\, x + C \ .$$

Ezért

$$\int \frac{2-3x}{x^2+1}\, dx = -\frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C \ .$$

(f) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+5}dx$

Megoldás. Az $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ átalakítás alapján jól látható, hogy a nevezőnek nincs valós gyöke, és így az előző példához hasonlóan dolgozunk. Az $\left[x^2 - 4x + 5\right]' = 2x - 4$ összefüggés miatt a felbontás:

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+5} = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{5}{x^2-4x+5} \ .$$

Az első tört integrálját helyettesítéssel, $v = x^2 - 4x + 5$, $v' = 2x - 4$ alapján kapjuk meg; a második egy egyszerű integrál:

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\, dx = \int \frac{1}{v}\, dv = \ln|v| + C = \ln|x^2-4x+5| + C \ ;$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^2+1}\, dx = 5\,\mathrm{arctg}(x-2) + C \ .$$

Ezért

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+5}\, dx = \ln|x^2-4x+5| + 5\,\mathrm{arctg}(x-2) + C \ .$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$

Megoldás. Ekkor $x^3+x = x(x^2+1)$, és mert az x^2+1 polinomnak nincs valós gyöke, a helyes elemi törtekre bontás a következő:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\,.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével kapjuk, hogy $A=1$, $B=-1$ és $C=0$. Így

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,.$$

A második kifejezés integrálját helyettesítéssel, $y = x^2+1$, $y' = 2x$ alapján kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C\,.\end{aligned}$$

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int 3x\cos(1-2x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+6x}\ dx$

B csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^3}\ln x\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+6x+9}\ dx$

C csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int 2xe^{4-x}\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3+2x}{x^2+6x+10}\ dx$

D csoport

Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x-4}\ dx$

A csoport megoldása

(a)

$$f = 3x \qquad f' = 3$$
$$g' = \cos(1-2x) \qquad g = \frac{\sin(1-2x)}{-2}$$

alapján

$$\begin{aligned}\int 3x\cos(1-2x)\ dx &= 3x\cdot\frac{\sin(1-2x)}{-2} - \int 3\cdot\frac{\sin(1-2x)}{-2}\ dx\\ &= 3x\cdot\frac{\sin(1-2x)}{-2} + \frac{3}{2}\int \sin(1-2x)\ dx\\ &= 3x\cdot\frac{\sin(1-2x)}{-2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{-\cos(1-2x)}{-2} + C\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{3x+2}{x^2+6x} = \frac{3x+2}{x(x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+Bx}{x(x+6)}\,,$$

tehát

$$3x+2 = A(x+6) + Bx\,.$$

$$\begin{aligned} x=0 &\quad \text{esetén} \qquad 2 = A\cdot 6\,, \quad \text{azaz} \quad A = 1/3\,,\\ x=-6 &\quad \text{esetén} \qquad -16 = B\cdot(-6)\,, \quad \text{azaz} \quad B = 8/3\,.\end{aligned}$$

Így

$$\frac{3x+2}{x(x+6)} = \frac{1/3}{x} + \frac{8/3}{x+6}$$

alapján

$$\int \frac{3x+2}{x^2+6x}\ dx = \int\left(\frac{1/3}{x} + \frac{8/3}{x+6}\right)\ dx = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{8}{3}\ln|x+6| + C\,.$$

B csoport megoldása

(a)

$$f' = \sqrt{x^3} = x^{3/2} \qquad f = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5}x^{5/2}$$
$$g = \ln x \qquad g' = \frac{1}{x}$$

alapján

$$\int \sqrt{x^3}\ln x \; dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \int \frac{2}{5}x^{5/2}\cdot\frac{1}{x} \; dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \frac{2}{5}\int x^{3/2} \; dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2} + C\,.$$

(b)

$$\frac{3x+2}{x^2+6x+9} = \frac{3x+2}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}\,,$$

azaz

$$3x+2 = A(x+3)+B$$

$$\begin{aligned} x = -3 \quad \text{esetén} \qquad & -7 = B\,, \\ x = 0 \quad \text{esetén} \qquad & 2 = 3A + B = 3A - 7 \\ & 9 = 3A \\ & 3 = A\,. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{3x+2}{x^2+6x+9} = \frac{3}{x+3} - \frac{7}{(x+3)^2}$$

alapján

$$\int \frac{3x+2}{x^2+6x+9} \; dx = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{7}{(x+3)^2}\right) \; dx = \int \left(\frac{3}{x+3} - 7(x+3)^{-2}\right) \; dx$$
$$= 3\ln|x+3| - 7\cdot\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C\,.$$

C csoport megoldása

(a)

$$
\begin{aligned}
f &= 2x & f' &= 2 \\
g' &= e^{4-x} & g &= \frac{e^{4-x}}{-1} = -e^{4-x}
\end{aligned}
$$

alapján

$$
\begin{aligned}
\int 2xe^{4-x}\;dx &= 2x\cdot\left(-e^{4-x}\right) - \int 2\cdot\left(-e^{4-x}\right)\;dx = -2xe^{4-x} + 2\int e^{4-x}\;dx \\
&= -2xe^{4-x} - 2e^{4-x} + C\,.
\end{aligned}
$$

(b) Az $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ átalakítás alapján a nevezőnek nincs valós gyöke, továbbá $\left[x^2+6x+10\right]'=2x+6$ miatt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3+2x}{x^2+6x+10}\;dx &= \int \frac{2x+6-3}{x^2+6x+10}\;dx \\
&= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\;dx - \int \frac{3}{x^2+6x+10}\;dx\,.
\end{aligned}
$$

Ekkor $u=x^2+6x+10,\;\; du=(2x+6)\;dx$ alapján

$$
\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\;dx = \int \frac{1}{u}\;du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2+6x+10\right| + C
$$

és

$$
\int \frac{3}{x^2+6x+10}\;dx = 3\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\;dx = 3\operatorname{arctg}(x+3) + C\,.
$$

Így

$$
\int \frac{3+2x}{x^2+6x+10}\;dx = \ln\left|x^2+6x+10\right| - 3\operatorname{arctg}(x+3) + C\,.
$$

D csoport megoldása

(a)

$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= \operatorname{arctg} x & g' &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

alapján

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{array}{l} \quad (x^3+1) : (x-4) = x^2 + 4x + 16 \\ -(x^3 - 4x^2) \\ \qquad\quad 4x^2 + 1 \\ \qquad -(4x^2 - 16x) \\ \qquad\qquad\qquad 16x + 1 \\ \qquad\qquad\quad -(16x - 64) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 65 \end{array}$$

alapján

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x-4} \, dx &= \int \left(x^2 + 4x + 16 + \frac{65}{x-4}\right) \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 16x + 65 \ln|x-4| + C\,. \end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

1. Feladat. A parciális integrálás módszerével határozzuk meg a következő szorzatfüggvények integrálját.

(a) $\displaystyle\int 2x\sin 3x\ dx$

(b) $\displaystyle\int x\sin\frac{x}{2}\ dx$

(c) $\displaystyle\int (3x+1)\cos x\ dx$

(d) $\displaystyle\int (3-2x)e^{1+x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x}{e^{4x}}\ dx$

(f) $\displaystyle\int xe^{-px}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \sin x\cdot e^{-2x}\ dx$

(h) $\displaystyle\int x\ln x\ dx$

(i) $\displaystyle\int (1-3x)\ln 2x\ dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$

(k) $\displaystyle\int (x+1)^2\ln x\ dx$

(l) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\ dx$

(m) $\displaystyle\int x^2\operatorname{arctg} x\ dx$

2. Feladat. Elemi törtekre bontás segítségével határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{4-x^2}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+x-2}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{x^2+x-2}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+3x+1}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2+2x+1}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-6x^2+9x}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x}{x^2+1}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{5+2x}{4x^2+1}\ dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+9}\ dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+6x+10}\ dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1+3x}{x+x^3}\ dx$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $-2x \cdot \dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{2\sin 3x}{9} + C$

(b) $-2x\cos\dfrac{x}{2} + 4x\sin\dfrac{x}{2} + C$

(c) $(3x+1)\sin x + 3\cos x + C$

(d) $(3-2x)e^{1+x} + 2e^{1+x} + C$

(e) $-\dfrac{3}{4}xe^{-4x} - \dfrac{3}{16}e^{-4x} + C$

(f) $-x\dfrac{e^{-px}}{p} - \dfrac{e^{-px}}{p^2} + C$

(g) $-\dfrac{1}{5}e^{-2x}\cos x - \dfrac{2}{5}e^{-2x}\sin x + C$

(h) $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

(i) $\left(x - \dfrac{3}{2}x^2\right)\ln 2x - x + \dfrac{3}{4}x^2 + C$

(j) $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

(k) $\left(\dfrac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\ln x - \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{2} - x + C$

(l) $\dfrac{x^2}{2}\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + C$

(m) $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{1}{6}\ln|x^2+1| + C$

2. Feladat megoldása.

(a) $\dfrac{1}{2}\ln|2+x| - \dfrac{1}{2}\ln|2-x| + C$

(b) $\dfrac{2}{3}\ln|x-1| - \dfrac{5}{3}\ln|x+2| + C$

(c) $\dfrac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+2| - \ln|x-1| + C$

(d) $\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

(e) $3\ln|x+1| + \dfrac{7}{x+1} + C$

(f) $\dfrac{1}{9}\ln|x| - \dfrac{1}{9}\ln|x-3| - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-3} + C$

(g) $\dfrac{x^2}{2} - 2\ln|x^2+1| + C$

(h) $\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg} 2x + \dfrac{1}{4}\ln|4x^2+1| + C$

(i) $\ln|x^2+9| - \dfrac{4}{9}\dfrac{\operatorname{arctg}(x/3)}{1/3} + C$

(j) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 2\operatorname{arctg}(x+3) + C$

(k) $\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + 3\operatorname{arctg} x + C$

13. óra

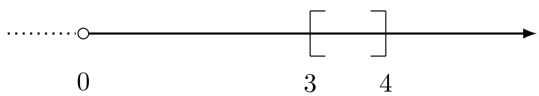
Határozott és improprius integrál

Házi feladatok

1. Feladat. Számoljuk ki a következő határozott integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = (0, \infty)$.
A függvény az integrálási tartományon, a $[3, 4]$ zárt intervallumon folytonos, ezért itt Riemann–integrálható.



A határozott integrál értékét a függvény egy tetszőleges primitív függvényének segítségével számítjuk ki. Ezért előbb határozatlan integrált számolunk.

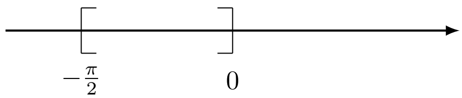
$$\int \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{3/2} - 2x^{1/2} + 3x^{-1/2}\right)\,dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + C\,.$$

A legegyszerűbb primitív függvényt a $C = 0$ választással kapjuk. Így a Newton–Leibniz tétel alapján

$$\int_3^4 \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2}\right]_3^4$$
$$= \frac{2}{5}\cdot 4^{5/2} - \frac{4}{3}\cdot 4^{3/2} + 6\cdot 4^{1/2}$$
$$- \left(\frac{2}{5}\cdot 3^{5/2} - \frac{4}{3}\cdot 3^{3/2} + 6\cdot 3^{1/2}\right)\,.$$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^0 x\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\,dx$

Megoldás. A függvény mindenütt értelmezett, $D_f = (-\infty, \infty)$.
A függvény az integrálási tartományon, a $[-\pi/2, 0]$ zárt intervallumon folytonos, ezért itt Riemann–integrálható.



A határozatlan integrált parciális integrálással,

$$f = x,\ f' = 1, \quad g' = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),\ g = \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

alapján kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\int x\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\ dx &= x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \int \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\ dx \\ &= x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{4} + C\,.\end{aligned}$$

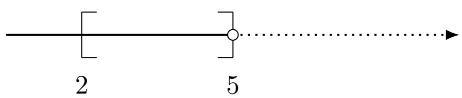
Így a Newton–Leibniz tétel szerint

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{0} x\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\ dx &= \left[x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{4}\right]_{-\pi/2}^{0} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

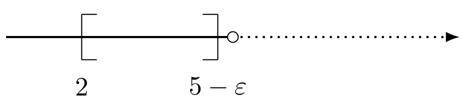
2. Feladat. Határozzuk meg a következő improprius integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\ dx$

Megoldás. Az értelmezési tartomány $D_f = (-\infty, 5)$.
Az integrálási tartomány, $[2, 5]$ jobb oldali végpontja "rossz" pont, $x = 5$ nem eleme D_f–nek. Ezért itt a függvény Riemann–szerint nem integrálható.



De a $[2, 5-\varepsilon]$ intervallumon a függvény folytonos, így itt integrálható ($\varepsilon > 0$),



ezért a $[2,5]$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_2^{5-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx\,.$$

A határozatlan integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx = \int (5-x)^{-1/2}\,dx = \frac{(5-x)^{1/2}}{(1/2)\cdot(-1)} + C = -2\sqrt{5-x} + C\,.$$

Így

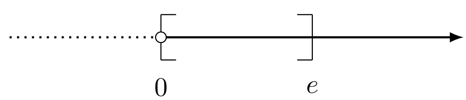
$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_2^{5-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-2\sqrt{5-x}\right]_2^{5-\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-2\sqrt{5-(5-\varepsilon)} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

A kapott határérték véges, így a függvény a $[2,5]$ intervallumon impropriusan integrálható és az improprius integrálja

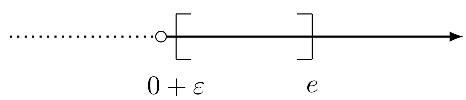
$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx = 2\sqrt{3}\,.$$

(b) $\displaystyle\int_0^e x^2 \ln x\,dx$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya: $(0,\infty)$.
Így a $[0,e]$ intervallumon nem definiált a Riemann–integrálja, a bal oldali végpont "rossz" pont.



De a függvény folytonos az értelmezési tartományán, ezért az $[\varepsilon, e]$ zárt intervallumon integrálható ($\varepsilon > 0$),



így az

$$\int_0^e x^2\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^e x^2\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^e x^2\ln x\,dx$$

improprius integrált számoljuk.
A határozatlan integrált parciális integrálással, $f' = x^2$, $f = x^3/3$, $g = \ln x$, $g' = 1/x$, kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \; dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \; dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\,.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^e x^2 \ln x \; dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_\varepsilon^e \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} - \frac{\varepsilon^3}{3} \cdot \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{9} \right)\,.\end{aligned}$$

A harmadig tag határértékét a L'Hospital–szabály segítségével számoljuk:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^3 \ln \varepsilon = {} & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{-3}} \\ & \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon^{-1}}{-3\varepsilon^{-4}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon^3}{-3} = 0\end{aligned}$$

alapján

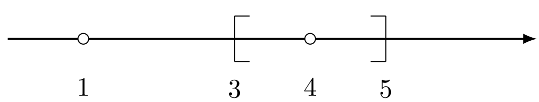
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^3 \ln \varepsilon = 0\,.$$

Ezért

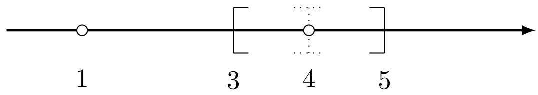
$$\int_0^e x^2 \ln x \; dx = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} = \frac{2}{9} e^3\,.$$

(c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1 - 2x}{x^2 - 5x + 4} \; dx$

Megoldás. Az értelmezési tartomány $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty)$.
A függvény folytonos D_f–en.



Most az intervallum belsejében van a "rossz" pont. Ekkor az intervallumot a "rossz" pontnál szét kell vágni, két improprius integrált kell számolni (csak az egyik végpont lehet "rossz"):



$$\int_3^5 \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx = \int_3^4 \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx + \int_4^5 \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx$$

A bal oldali improprius integrál akkor létezik, ha a jobb oldali integrálok mindegyike véges. Így amennyiben a jobb oldalon valamelyik integrál végtelen, akkor a többit már nem is kell meghatározni.
Elemi törtekre bontás

$$\frac{1-2x}{x^2-5x+4} = \frac{1-2x}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{7/3}{x-4}$$

után a határozatlan integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx &= \int \left(\frac{1/3}{x-1} - \frac{7/3}{x-4}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{7}{3}\ln|x-4| + C\ .\end{aligned}$$

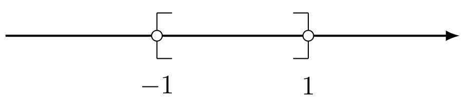
Így az első improprius integrál

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_3^{4-\varepsilon} \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{7}{3}\ln|x-4|\right]_3^{4-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{3}\ln|3-\varepsilon| - \frac{7}{3}\ln|\varepsilon| - \frac{1}{3}\ln 2\right) \\ &= \infty\,.\end{aligned}$$

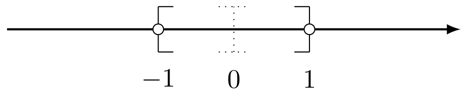
Ezért a második integrált már ki sem kell számolnunk, a függvény impropriusan sem integrálható a $[3,5]$ intervallumon.

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$

Megoldás. Az értelmezési tartomány $D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$.
A függvény folytonos D_f–en, de az integrálási tartomány, $[-1,1]$ mindkét végpontja "rossz" pont. Ezért improprius integrált számolunk.



De csak az egyik végpont lehet "rossz", ezért az intervallumot szét kell vágni. Ezt tetszőleges belső pontnál megtehetjük. Esetünkben ez legyen a 0 pont:



$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx\,.$$

Helyettesítéses integrálással, $u = 1 - x^2,\ du = -2x\ dx$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx &= -\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\, du = -\int u^{-1/3}\, du \\ &= -\frac{u^{2/3}}{2/3} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x^2)^2} + C\,. \end{aligned}$$

Így az első improprius integrál

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}\right]_{-1+\varepsilon}^{0} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-(-1+\varepsilon)^2)^2}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

és a második

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}\right]_{0}^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-(1-\varepsilon)^2)^2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

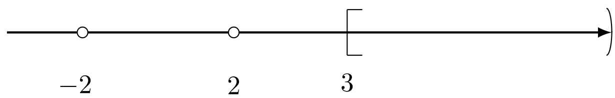
is véges. Ezért

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0\,.$$

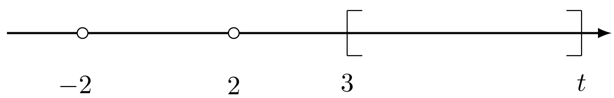
3. Feladat. Határozzuk meg a következő improprius integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2-4}\,dx$

Megoldás. Az értelmezési tartomány $D_f = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$.
Az integrálási tartomány, $[3,\infty)$ nem véges, ezért a függvény nem Riemann–integrálható ezen az intervallumon.



Ugyanakkor a függvény folytonos a $[3,t]$ intervallumon ($t>3$ tetszőleges), azaz itt integrálható,



ezért a következő improprius integrált számoljuk:

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2-4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{x^2-4}\,dx\,.$$

Elemi törtekre bontással kapjuk, hogy

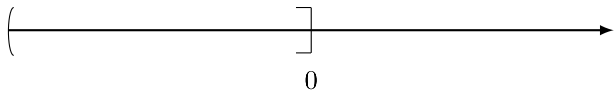
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-4}\,dx &= \int \frac{1/4}{x-2}-\frac{1/4}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C\,.\end{aligned}$$

Így

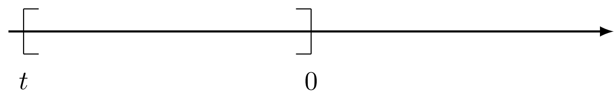
$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-2/t}{1+2/t}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{2x}}\,dx$

Megoldás. A függvény mindenütt értelmezett és folytonos, $D_f = (-\infty, \infty)$.
Az integrálási tartomány, $(-\infty, 0]$ nem véges, ezért itt a függvény nem Riemann–integrálható.



Ugyanakkor a függvény a $[t, 0]$ intervallumon integrálható ($t < 0$ tetszőleges),



ezért a következő improprius integrált számoljuk:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{x}{e^{2x}}\,dx\,.$$

Parciális integrálással, $f = x,\ f' = 1,\ \ g' = e^{-2x},\ g = -\frac{1}{2}xe^{-2x}$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx &= \int xe^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\ .\end{aligned}$$

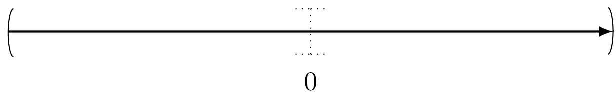
Így

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{2x}}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_t^0 \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right) \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{4} + e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \text{"}\infty\cdot(-\infty)\text{"} = -\infty\end{aligned}$$

miatt impropriusan sem integrálható.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

Megoldás. A függvény mindenütt értelmezett és folytonos. Az integrálási tartomány nem véges, mindkét "végpont" végtelen, ezért egy tetszőleges belső pontnál felbontjuk, legyen ez a 0 pont,



és a következő improprius integrált számoljuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx\,.$$

Helyettesítéses integrálással, $u = 1 + e^x,\ du = e^x\ dx$ alapján kapjuk, hogy

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|1+e^x| + C\,.$$

Így

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx &= \lim_{t\to-\infty} [\ \ln|1+e^x|\ ]_t^0 \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left(\ln|1+e^0| - \ln|1+e^t|\right) = \ln 2\,,\end{aligned}$$

ugyanakkor

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx &= \lim_{t\to\infty} [\ \ln|1+e^x|\ ]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\ln|1+e^t| - \ln|1+e^0|\right) = \infty\,.\end{aligned}$$

Így az improprius integrál nem létezik.

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$ integrált.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$ integrált.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^{2} \frac{3-x}{x^2-4}\, dx$ integrált.

D csoport

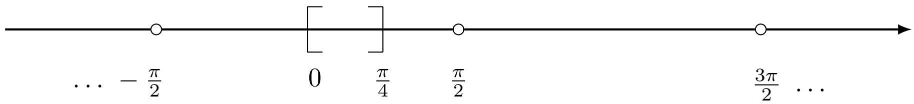
Feladat. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2+4x+5}\, dx$ integrált.

A csoport megoldása

Értelmezési tartomány:

$$\cos x \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

A függvény folytonos a $[0, \pi/4]$ intervallumon, így integrálható itt.



A határozatlan integrál

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x\ dx = \int (\cos x)^{-2} \cdot \sin x\ dx\,,$$

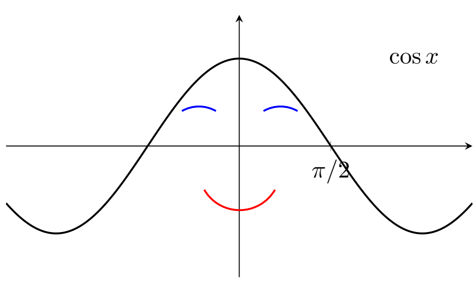
$$y = \cos x$$
$$dy = -\sin x\ dx$$
$$-dy = \sin x\ dx$$

alapján

$$= -\int y^{-2}\ dy = -\frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{y} + C = \frac{1}{\cos x} + C\,.$$

Így

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx\ dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{\cos(\pi/4)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1\,.$$

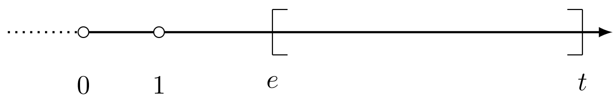


B csoport megoldása

Az értelmezési tartomány:

$$
\begin{aligned}
x \ln^2 x \neq 0 \qquad & \text{és} \qquad x > 0 \\
x \neq 0\,, \quad \ln x \neq 0 \qquad & \text{és} \qquad x > 0 \\
x \neq 0\,, \quad x \neq 1 \qquad & \text{és} \qquad x > 0\,.
\end{aligned}
$$

Az integrálási tartomány nem véges, így a függvény nem Riemann–integrálható itt.



De az $[e,t]$ halmazon $(t > e)$ a függvény folytonos, ezért ezen az intervallumon integrálható, tehát improprius integrált számolunk:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_e^t \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx\,.$$

A határozatlan integrál

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\, dx\,,$$

$$
\begin{aligned}
y &= \ln x \\
dy &= \frac{1}{x}\, dx
\end{aligned}
$$

alapján

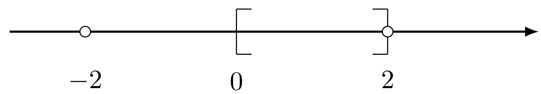
$$= \int y^{-2}\, dy = \frac{y^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{\ln x} + C\,.$$

Így

$$
\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln e}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + 1\right) = \text{„} - \frac{1}{\infty}\text{”} + 1 = 0 + 1 = 1\,.
\end{aligned}
$$

C csoport megoldása

A függvény értelmezési tartománya: $x \neq \pm 2$.
A függvény folytonos D_f–en.
Az integrálási tartomány jobb oldali végpontja "rossz" pont,



Így a függvény nem Riemann–integrálható, improprius integrált számolunk:

$$\int_0^2 \frac{3-x}{x^2-4}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{3-x}{x^2-4}\, dx\,.$$

Elemi törtekre bontva

$$\frac{3-x}{x^2-4} = \frac{3-x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}\,,$$

$$3-x = A(x+2) + B(x-2)\,,$$

$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\text{esetén} \qquad 1 = A \cdot 4\,, \quad \text{azaz} \quad A = 1/4\,, \\ x = -2 \quad &\text{esetén} \qquad 5 = B \cdot (-4)\,, \quad \text{azaz} \quad B = -5/4\,, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy a határozott integrál

$$\int \frac{3-x}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/4}{x-2} - \frac{5/4}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{5}{4} \ln|x+2| + C\,.$$

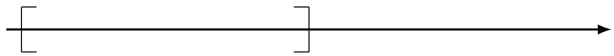
Így

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{3-x}{x^2-4}\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{5}{4} \ln|x+2| \right]_0^{2-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{4} \ln \varepsilon - \frac{5}{4} \ln(4-\varepsilon) - \left(\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{5}{4} \ln 2 \right) \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

miatt impropriusan sem integrálható.

D csoport megoldása

Ekkor $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$ alapján a függvény mindenütt értelmezett, és folytonos, de az integrálási tartomány nem véges, így a függvény nem Riemann–integrálható itt, improprius integrált számolunk:



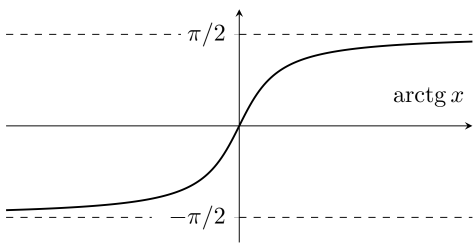
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2+4x+5} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{2}{x^2+4x+5}\, dx\,.$$

A határozatlan integrál

$$\int \frac{2}{x^2+4x+5}\, dx = 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\, dx = 2\operatorname{arctg}(x+2) + C\,.$$

Így

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2+4x+5}\, dx &= \lim_{t\to-\infty} \left[2\operatorname{arctg}(x+2)\right]_t^0 \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left(2\operatorname{arctg} 2 - 2\operatorname{arctg}(t+2)\right) \\ &= 2\operatorname{arctg} 2 - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{arctg} 2 + \pi\,.\end{aligned}$$



További gyakorló feladatok

1. Feladat. Számoljuk ki a következő határozott integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x}+3x^2-6}{\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^e \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$

(f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő improprius integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2x-1}{x^2-1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-1}{x^2-1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-2x}{x^2-5x+4}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő improprius integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{3x}{x^2-5x+4}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{2x^2+3x-2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{x}{2x^2+1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{e^2}^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x/3}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{1-x}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{1-x^2}\,dx$

Gyakorló feladatok megoldása

1. Feladat megoldása.

(a) $\sqrt{3} + \frac{27}{4} - 3\ln 3 - \sqrt{2} - 3 + 3\ln 2$

(b) $-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) -1

(d) $-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}$

(e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4} - \frac{9}{16}\sqrt[3]{e^4} + \frac{9}{16}$

(f) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$

2. Feladat megoldása.

(a) $\nexists$

(b) $-\frac{3}{2}$

(c) $\nexists$

(d) $\nexists$

(e) $\nexists$

(f) $\nexists$

(g) $\nexists$

(h) $\nexists$

(i) $-\frac{4}{9}\sqrt{e^3}$

(j) 2

(k) π

3. Feladat megoldása.

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $-\ln\frac{1}{4}$

(c) $\nexists$

(d) $\frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln\frac{3}{4}$

(e) $\frac{1}{2}\ln 3$

(f) $\nexists$

(g) $\nexists$

(h) 9

(i) e

(j) 0