æ

TOPOLÓGIA

A *topológia* szó a görög "toposz" és "logosz" szavakból alkotott szakkifejezés. Jelentése: *helytan.* Valójában inkább a folytonossági tulajdonságokat leíró struktúrák elméletét értjük alatta.

Emlékeztető. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a folytonosságot *környezetek* segítségével a következő módon definiálhatjuk. Egy $x \in \mathbb{R}$ pont környezetei azok az $U \subset \mathbb{R}$ halmazok, amelyek tartalmaznak $(x-\varepsilon\,,\, x+\varepsilon)$ alakú intervallumot valamilyen $\varepsilon > 0$-ra. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha

$$\forall\, V \in \mathcal{U}_{f(a)}\ \exists\, U \in \mathcal{U}_a \qquad f(U) \subset V\ ,$$

ahol $\mathcal{U}_x := \{x \,\text{környezetei}\}$.

Környezetrendszerek

Az egész fejezeten át legyen X egy tetszőlegesen rögzített nem-üres halmaz, és $\mathcal{U}$ egy

$$\mathcal{U} : x \mapsto \mathcal{U}_x \text{ nem-üres } \subset \{X \text{ részhalmazai}\} \qquad (x \in X)$$

leképezés.

Definíció. Az $X,\mathcal{U}$ pár *környezetrendszer*, ha teljesíti a következő axiómákat:

K1) $x \in U \qquad (U \in \mathcal{U}_x,\ x \in X)$
K2) $V \supset U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x \qquad (x \in X)$
K3) $U \cap V \in \mathcal{U}_x \qquad (U, V \in \mathcal{U}_x,\ x \in X)$

Megjegyzés. Az $X,\mathcal{U}$ környezetrendszerben az $\mathcal{U}_x$ halmazcsalád elemeit az x pont ($\mathcal{U}$-szerinti) környezeteinek fogjuk mondani. A K1, K2, K3 környezet-axiómák így a következőképpen interpretálhatók.

K1) Egy pont környezetei tartalmazzák az adott pontot.
K2) Környezetnél nagyobb halmaz is környezet.
K3) Környezetek metszete környezet.

Definíció. Legyenek $X,\mathcal{U}$, $Y,\mathcal{V}$ környezetrendszerek, $f : X \to Y$. Az f függvény $(\mathcal{U}\to\mathcal{V})$*-folytonos* az $x \in X$ pontnál, ha

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{f(x)}\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x \qquad f(U) \subset V\ .$$

Az f függvény $(\mathcal{U}\to\mathcal{V})$*-folytonos* (a teljes X téren), ha minden $x \in X$ pontnál $(\mathcal{U}\to\mathcal{V})$-folytonos.

Ha a kontextusból egyértelműen kiderül, hogy mely környezetrendszerek közötti folytonosságot tekintjük, egyszerűen *folytonos*at mondunk $(\mathcal{U} \to \mathcal{V})$-*folytonos* helyett.

Megjegyzés. K2 alapján $\quad f$ folytonos x-nél $\Leftrightarrow\ f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \quad (V \in \mathcal{V}_{f(x)})$.

Tétel. *Legyenek $X,\mathcal{U}$, $Y,\mathcal{V}$ ill. $Z,\mathcal{Z}$ környezetrendszerek, és $f : X \to Y$ ill. $g : Y \to Z$ függvények. Tegyük fel, hogy f folytonos x-nél és g folytonos $f(x)$-nél. Ekkor $g \circ f$ folytonos x-nél.*

Bizonyítás. Legyen $Z \in \mathcal{Z}_{g(f(x))}$ egy tetszőlegesen adott $g(f(x))$-környezet. Mivel $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$ és g folytonos $f(x)$-nél, $g^{-1}(Z) \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Másrészt f folytonos $g(x)$-nél, és így $f^{-1}(g^{-1}(Z)) \in \mathcal{U}_x$.

Definíció. Legyen $X,\mathcal{U}$ egy környezetrendszer és $A \subset X$. Definíció szerint egy $a \in A$ pont az A halmaznaknak *belső* pontja ($\mathcal{U}$ szerint), ha $A \in \mathcal{U}_a$.

A *belseje* $\quad A^{\mathrm{o}} := \{A \text{ belső pontjai}\}$,

A *külseje* $\quad := (X \setminus A)^{\mathrm{o}}$,

A *határa* $\quad \partial A := \{x \in X : \forall\, U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A,\ U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$.

Tétel. A^{o}, ∂A, $(X \setminus A)^{\mathrm{o}}$ *diszjunktak és* $A^{\mathrm{o}} \cup \partial A \cup (X \setminus A)^{\mathrm{o}} = X$.

Bizonyítás. 1) $A^{\mathrm{o}} \subset A$ és $(X \setminus A)^{\mathrm{o}} \subset X \setminus A$. Innen $A^{\mathrm{o}} \cap (X \setminus A)^{\mathrm{o}} = \emptyset$

2) Megmutatjuk, hogy $A^{\mathrm{o}} \cap \partial A = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $x \in A^{\mathrm{o}} \cap \partial A$. Most $x \in A^{\mathrm{o}}$, ahonnan $A^{\mathrm{o}} \in \mathcal{U}_x$. Minthogy $x \in \partial A$, innen $A^{\mathrm{o}} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, ami ellentmond $A^{\mathrm{o}} \cap (X \setminus A) \subset A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ -nak.

3) Hasonlóképpen fennáll $(X \setminus A)^{\mathrm{o}} \cap \partial A = \emptyset$. Ez rögtön következik 2)-ből és abból az észrevételből, hogy $\partial A = \partial(X \setminus A)$ a határ definiciójának szimmetriája miatt.

Definíció. Az $X,\mathcal{U}$ környezetrendszerben a $G \subset X$ halmaz *nyitott*, ha $G = G^{\mathrm{o}}$. Az $F(\subset X)$ alakzat *zárt*, ha $X \setminus F$ nyitott.

Tétel. 1) *Ha $\mathcal{G}$ nyitott halmazok egy családja (az $X,\mathcal{U}$ környezetrendszerben), akkor $\bigcup \mathcal{G}$ nyitott,*

2) *G_1, G_2 nyitott, $\Rightarrow G_1 \cap G_2$ nyitott,*

3) *$X, \emptyset$ mindig nyitott.*

Bizonyítás. 1) Legyen $U := \bigcup \mathcal{G}$ és tekintsünk egy tetszőleges $x \in U$ pontot. Ekkor valamely $G \in \mathcal{G}$-re $x \in G$. Mivel G nyitott, $G \in \mathcal{U}_x$. Minthogy $U \supset G$, a K2) axióma szerint $U \in \mathcal{U}_x$, ahonnan $x \in U^{\mathrm{o}}$.

2) Legyen $x \in G_1 \cap G_2$ tetszöleges. Mivel G_1, G_2 nyitott, $G_k = G_k^{\mathrm{o}}$ $(k = 1, 2)$. Így $x \in G_1^{\mathrm{o}}, G_2^{\mathrm{o}}$, ahonnan $G_1, G_2 \in \mathcal{U}_x$. A K3 axióma alapján $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}_x$, amiből $x \in (G_1 \cap G_2)^{\mathrm{o}}$.

3) Triviális.

Következmény. 1) $\mathcal{F} \subset \{X,\mathcal{U} - \textit{beli zártak}\} \ \Rightarrow\ \bigcap \mathcal{F}$ *zárt.* 2) F_1, F_2 *zárt* $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ *zárt,* 3) $X, \emptyset$ *zártak.*

Bizonyítás. Nyitott és zárt halmazok egymás komplementerei.

Topologikus terek

Definíció. Egy $X,\mathcal{U}$ környezetrendszer *topologikus tér* (vagy röviden *topológia*), ha teljesül a következő axióma:

K4) $\quad U^{\mathrm{o}} \in \mathcal{U}_x \quad (x \in X,\ U \in \mathcal{U}_x)$.

Azaz környezet belseje is környezet topologikus térben.

Megjegyzés. A környezetrendszerek definíciója még nem létesít kapcslatot különböző pontok környezetei között. A K4 axióma már nem ilyen. Jelentése az alapfogalmakra lefordítva

K4) $\quad \forall\, U \in \mathcal{U}_a \quad \exists\, V \in \mathcal{U}_a \ \forall\, x \in V \qquad U \in \mathcal{U}_x \qquad (a \in X)$.

Tétel. *Legyen $X,\mathcal{U}$ topologikus tér és $A \subset X$. Ekkor*

1) *A^{o} nyitott, sőt $\forall\, G$ nyitott$\subset A \quad G \subset A^{\mathrm{o}}$,*

2) $A\cup\partial A$ *zárt, sőt* $\forall F$ *zárt* $\supset A \quad F\supset A\cup\partial A$.
Azaz topologikus térben egy halmaz belseje a benne foglalt legnagyobb nyitott halmaz, a halmaz belsejének és határának egyesítése a halmazt tartalmazó legkisebb zárt halmaz.

Bizonyítás. 1) Elegendő látni, hogy $(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}} = A^{\mathrm{o}}$. Az $(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}} \subset A^{\mathrm{o}}$ tartalmazás triviális. Legyen $x\in A^{\mathrm{o}}$ tetszőleges. Ekkor $A\in\mathcal{U}_x$, ami a K4 axióma alapján azt jelenti, hogy $A^{\mathrm{o}}\in\mathcal{U}_x$, azaz $x\in(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$.

Ha G nyitott $\subset A$ és $x\in G$ tetszölegesen adott, akkor $G\in\mathcal{U}_x$, és a K2 axióma szerint $A\in\mathcal{U}_x$, azaz $x\in A^{\mathrm{o}}$.

2) A helyett $(X\setminus A)$-val az előző gondolatmenet.

Definíció. Az $X,\mathcal{U}$ környezetrendszerben az $A\subset X$ alakzat *lezártja* $\overline{A} := A^{\mathrm{o}}\cup\partial A$.

Észrevétel: $\overline{A}=\{x\in X:\ \forall\, U\in\mathcal{U}_x\ U\cap A\neq\emptyset\}$.

Topologikus térben $\overline{A}$ a legkisebb A-t tartalmazó zárt halmaz.

Tétel. *Legyenek* $X,\mathcal{U}$, $Y,\mathcal{V}$ *topologikus terek. Egy* $f:X\to Y$ *leképezés pontosan akkor folytonos, ha* $f^{-1}(V)$ *nyitott* $(V$ *nyitott* $\subset Y)$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen V nyitott $\subset Y$ és $x\in f^{-1}(V)$ tetszőlegesen adott. Ekkor $f(x)\in V$ és így $V\in\mathcal{V}_{f(x)}$. Mivel f folytonos, $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_x$, ahonnan $x\in f^{-1}(V)^{\mathrm{o}}$.

$\Leftarrow$: Legyen $x\in X$ és $V\in\mathcal{V}_{f(x)}$ adott. Belátandó, hogy $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_x$. Mivel $Y,\mathcal{V}$ topológia, V^{o} nyitott $\in\mathcal{V}_{f(x)}$. Feltevés szerint az $f^{-1}(V^o)$ halmaz nyitott X-ben. Másrészt $f(x)\in V^{\mathrm{o}}$, ahonnan $x\in f^{-1}(V^{\mathrm{o}})$, és így $f^{-1}(V^{\mathrm{o}})\in\mathcal{U}_x$, és K2-ből $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_x$.

Következmény. *f folytonos pontosan akkor, ha zárt halmazok teljes inverz képe zárt f-nél.*

Részhalmaz topológiája

Definíció. Legyen $X,\mathcal{U}$ egy környezetrendszer és $S\subset X$. Az

$$\mathcal{U}_x|S := \{U\cap S:\ U\in\mathcal{U}_x\}\qquad (x\in X)$$

rendszert az $\mathcal{U}$ környezetrendszer S-re való *megszorítottj*ának nevezzük.

Tétel. *Legyen* $X,\mathcal{U}$ *egy környezetrendszer és* $S\subset X$. *Ekkor*
1) $S,\mathcal{U}|S$ *környezetrendszer,*
2) *ha* $X,\mathcal{U}$ *topológia, akkor* $S,\mathcal{U}|S$ *szintén topológia.*

Bizonyítás. 1) Tekintsünk egy tetszőleges $x\in S$ pontot. Verifikáljuk a környezet-axiómákat az $S,\mathcal{U}|S$ rendszernél.

K1) Mivel $x\in U\ \ (U\in\mathcal{U}_x)$, fennáll $x\in U\cap S\ \ (U\in\mathcal{U}_x)$.

K2) Legyen $U\in\mathcal{U}_x|S$. Ekkor vehető $U'\in\mathcal{U}_x$, melyre $U=U'\cap S$. Tegyük fel, hogy $V\supset U$, $V\subset S$. Most a $V':=U'\cup V$ alakzat az $X,\mathcal{U}$-ra érvényes K2 axióma szerint x-környezet $\mathcal{U}$-ban. Így $V=V'\cap S\in\mathcal{U}_x|S$.

K3) Tegyük fel, hogy $U_1,U_2\in\mathcal{U}_x|S$. Ekkor létezik $U_1',U_2'\in\mathcal{U}_x$, hogy $U_k = U_k'\cap S\ \ (k=1,2)$. Ezzel $U_1\cap U_2=U_1'\cap U_2'\cap S$, ahol (az $X,\mathcal{U}$-ra érvényes) K3 alapján $U_1'\cap U_2'\in\mathcal{U}_x$.

2) Legyen $x \in S$ és $U \in \mathcal{U}_x|S$ adott. Belátandó: $U^{\circ|S} := \{y \in U : \ U \in \mathcal{U}_y|S\}$ is x-környezet $\mathcal{U}|S$ szerint. Itt

$$U^{\circ|S} = \{y \in U : \ \exists U^{(y)} \in \mathcal{U}_y \quad U^{(y)} \cap S \subset U\} .$$

Vehető mindegyik $U^{(y)}$ halmaz ($y \in U^{\circ|S}$) nyitottnak a fenti formulában [$U^{(y)}$ helyett U°-ra áttérve]. Most az

$$U' := \bigcup_{y \in U^{\circ|S}} U^{(y)}$$

halmaz nyitott és

$$(*) \qquad U' \cap S = U^{\circ|S} .$$

Tegyük fel, hogy $y \in U^{\circ|S}$. Ekkor $y \in U'$ nyitott $\subset X$, ahonnan $y \in U'^{\circ}$, azaz $U' \in \mathcal{U}_y$, és így $U' \cap S \in \mathcal{U}_y|S$

Következmény. $(*)$ *szerint* $\{S,\mathcal{U}|S$ *nyitott halmazai*$\}$=$\{G \cap S : G$ *nyitott* $\subset X\}$.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{U}$ topológia, $\mathcal{U}|S$ elnevezése, X *relatív topológiája* S-en. Általában, ha topologikus tér részhalmazaira mondunk ki egy tulajdonságot a topológiák nyelvén, akkor alatta a részhalmaz relatív topológiája megfelelő tulajdonságot szokás érteni.

Példa. Ha $X,\mathcal{U}$ topologikus tér és $S \subset X$, akkor az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az S halmazon, ha $f|S$ folytonos az $S, \mathcal{U}|S$ topológiára nézve.

Az előző következmény szerint a részhalmazokra megszorított topológiákban megfogalmazott tulajdonságok vizsgálata mindig visszavezethető topologikus terek vizsgálatára. (Tipikus példája ennek a következő alfejezet tételének a bizonyítása).

Összefüggőség

Definíció. Az $X,\mathcal{U}$ topologikus tér *széteső*, ha létezik $G_1, G_2 \neq \emptyset$ nyitott halmazpár X-ben, melyre $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ és $G_1 \cup G_2 = X$.

$S \subset X$ *széteső* : S széteső $\mathcal{U}|S$ szerint,

S *összefüggő* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ S nem széteső.

Tétel. *Folytonos leképezés összefüggő halmazt összefüggőbe visz. Azaz, ha* $X,\mathcal{U}$, $Y,\mathcal{V}$ *topologikus terek,* S *összefüggő* $\subset X$ *és* $f : X \to Y$ *folytonos, akkor* $f(S)$ *összefüggő* $\subset Y$.

Bizonyítás. A Részhalmaz topológiája c. alfejezet alapján vehető (az általánosság megszorítása nélkül) $S = X$ és $f(S) = Y$.

Tegyük fel, hogy Y széteső. Ekkor található lenne $\emptyset \neq G_1, G_2$ nyitott$\subset Y$, melyre $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ és $G_1 \cup G_2 = Y$. Mivel folytonos függvénynél nyitott halmaz inverz képe nyitott, $\emptyset \neq f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2)$ nyitott$\subset X$ és $f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) = X$, ami ellentmond X összefüggőségének.

Kompaktság

Definíció. Egy $X,\mathcal{U}$ topologikus tér *kompakt*, ha minden nyitott halmazokkal való lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés, azaz ha

$$\forall\, \mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\} \quad \bigcup \mathcal{G} = X \;\Rightarrow\; \exists\, \mathcal{F} \text{ véges} \subset \mathcal{G} \quad \bigcup \mathcal{F} = X \;.$$

Ennek megfelelően

S kompakt $\subset X$: S kompakt $\mathcal{U}|S$ szerint.

Mivel az S-beli nyitott halmazok X-beli nyitott halmazok S-sel való metszetei,

$$S \text{ kompakt} \subset X \Leftrightarrow \;\; \forall \mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\} \; \bigcup \mathcal{G} \supset S \Rightarrow \exists \mathcal{F} \text{ véges} \subset \mathcal{G} \;\; \bigcup \mathcal{F} \supset S .$$

Tétel. *Kompakt halmaz folytonos képe kompakt. Azaz*

$f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ *folytonos és* S *kompakt*$\subset X$, $\Rightarrow$ $f(S)$ *kompakt*$\subset Y$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H} \subset \{Y\text{-beli nyitottak}\}$ és $\bigcup \mathcal{H} \supset f(S)$. Legyen

$$G_H := f^{-1}(H) \qquad (H \in \mathcal{H})$$
$$\mathcal{G} := \{G_H : \; H \in \mathcal{H}\} \;.$$

Mivel f folytonos, $\mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\}$. Másrészt

$$f(\bigcup \mathcal{G}) = \bigcup \{f(G_H) : \; H \in \mathcal{H}\} = \bigcup \{H : \; H \in \mathcal{H}\} = \bigcup \mathcal{H} \supset f(S),$$
$$\bigcup \mathcal{G} \supset f^{-1}(f(S)) \supset S \;.$$

Mivel S kompakt$\subset X$, választható $\mathcal{F}$ véges$\subset \mathcal{G}$, melyre $\bigcup \mathcal{F} \supset S$. Szükségképpen $\mathcal{F} = \{G_{H_1}, \ldots, G_{H_n}\}$ alakú, ahonnan $\bigcup\{H_1, \ldots, H_n\} \supset f(S)$.

Hausdorff-tulajdonság

Definíció. Egy $X,\mathcal{U}$ környezetrendszer *Hausdorff-féle*, ha különböző pontoknak vannak diszjunkt környezetei, azaz ha

$$\forall\, x, y \in X \;\; x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y \;\; U \cap V = \emptyset.$$

A Hausdorff-féle topologikus tereket röviden *Hausdorff terek*nek szokás nevezni.

Tétel. *Ha* $X,\mathcal{U}$ *Hausdorff tér és* K *kompakt*$\subset X$, *akkor* K *zárt*$\subset X$.

Bizonyítás. Állítás: $X \setminus K$ nyitott. Bizonyítás: Legyen $y \in X \setminus K$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor minden $x \in K$ ponthoz választható olyan $U^{(x)}$, $V^{(x)}$ nyitott halmazpár, hogy

$$U^{(x)} \cap V^{(x)} = \emptyset \;\;, \quad U^{(x)} \in \mathcal{U}_x, \; V^{(x)} \in \mathcal{U}_y \;.$$

Tekintsük a

$$\mathcal{G} := \{U^{(x)} : x \in K\}$$

halmazcsaládot. Mivel $U\mathcal{G} \supset K$, létezik $x_1, \ldots, x_n \in K$, melyre

$$U^{(x_1)} \cup \ldots \cup U^{(x_n)} \supset K \;.$$

Most véges sok y-környezet metszete a

$$V := V^{(x_1)} \cap \ldots \cap V^{(x_n)} \in \mathcal{U}_y$$

halmaz. Vegyük észre, hogy

$$V \cap (U^{(x_1)} \cup \ldots \cup U^{(x_n)}) = \emptyset,$$

ahonnan $V \cap K = \emptyset$, azaz $V \subset X \setminus K$.

Lemma. *Ha $X,\mathcal{U}$ kompakt Hausdorff tér, és F zárt$\subset X$, akkor F kompakt$\subset X$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése F-nek, azaz

$$\mathcal{G} \subset \{\text{nyitottak}\} \qquad \bigcup \mathcal{G} \supset F .$$

Mivel F zárt, a $\mathcal{G}^* := \mathcal{G} \cup \{X \setminus F\}$ halmazrendszer egy nyitott lefedése az egész X térnek. Így $\exists G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G} \quad G_1 \cup \ldots G_n \cup (X \setminus F) = X$. Csakhogy ekkor $G_1 \cup \ldots \cup G_n \supset F$.

Tétel. *Ha $X,\mathcal{U}$ ill. $Y,\mathcal{V}$ kompakt Hausdorff terek és $f : X \leftrightarrow Y$ folytonos*, akkor az inverz f^{-1} függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $g := f^{-1}$-re $g^{-1}(F)$ zárt valahányszor F zárt$\subset X$. Legyen F zárt$\subset X$ tetszőleges. Ekkor az előző lemma szerint F kompakt$\subset X$. Így $f(F)$ kompakt$\subset Y$, ahonnan a tétel alapján $g^{-1}(F) = f(F)$ zárt.

Szorzattér

Definíció. Legyenek $X_k,\mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, n)$ környezetrendszerek.
Az $x := (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ ponthoz legyen

$$\mathcal{U}_x := \{U \subset X_1 \times \cdots \times X_n : \exists\, U_1 \in \mathcal{U}^{(1)}_{x_1}, \ldots, U_n \in \mathcal{U}^{(n)}_{x_n} \quad U_1 \times \cdots \times U_n \subset U\} .$$

Az $X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{U}$ rendszer triviálisan teljesíti a K1, K2, K3 környezet-axiómákat, azaz környezetrendszer. Elnevezése: Az $X_k,\mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, n)$ terek *szorzattere.*

Lemma. *Ha G_k nyitott $\subset X_k \quad (k = 1, \ldots, n)$, akkor $G_1 \times \cdots \times G_n$ nyitott$\subset X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_1, \ldots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$ adott tetszőlegesen. Mivel G_k nyitott, $G_k \in \mathcal{U}^{(k)}_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$. Innen $G_1 \times \cdots \times G_n \in \mathcal{U}_{(x_1, \ldots, x_n)}$.

Propozíció. *Ha $X_k,\mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, n)$ topológiák, akkor a $X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{U}$ szorzattér is topológia.*

Bizonyítás. A K4 axiómát kell verifikálnunk. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \quad U \in \mathcal{U}_x$. Vagyis $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$ valamely $U_1 \in \mathcal{U}^{(1)}_{x_1}, \ldots, U_n \in \mathcal{U}^{(n)}_{x_n}$-re. Mivel mindegyik $\mathcal{U}^{(k)}$ topológia,

$$U_k^{\circ} \text{ nyitott} \subset X_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

A lemma alapján, $x \in U_1^{\circ} \times \cdots \times U_n^{\circ}$ nyitott$\subset X_1 \times \cdots \times X_n$.

Lemma. *A $P_k : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$ koordináta-projekciók folytonos $X_1 \times \cdots \times X_n \to X_k$ leképezések.*

Bizonyítás. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és H egy x_k-környezet az X_k térben, akkor $P_k^{-1}(H) = X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times H \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n$ környezetek szorzata, ami x-környezet $X_1 \times \cdots \times X_n$-ben.

---

* *Azaz f kölcsönösen egyértelmű $(\mathcal{U} \to \mathcal{V})$-folytonos leképezése X-nek Y-ra.*

Propozíció. *Legyen* $Y, \mathcal{V}$ *topologikus tér és* $f : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ *leképezés környezetrendszerek egy szorzatterébe. Ekkor* f *folytonos* $\Leftrightarrow$ $f_k := P_k \circ f$ *folytonos mindegyik* P_k *koordináta-projekcióra.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: f_k folytonos leképezések kompoziciója az előző lemma szerint. $\Leftarrow$: Legyen $y \in Y$ és $U \in \mathcal{U}_{f(y)}$ tetszőlegesen rögzítve. Megmutatjuk, hogy létezik $V \in \mathcal{V}_y$ melyre $f(V) \subset U$. Bizonyítás: Találhatók $U_1 \in U^{(1)}_{f_1(y)}, \ldots, U_n \in \mathcal{U}^{(n)}_{f_n(y)}$ úgy, hogy $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. Feltevés szerint az f_k komponensfüggvények folytonosak, így

$$\exists V_k \in \mathcal{U}_y \quad f_k(V_k) \subset U_k \qquad (k = 1, \ldots, n)\ .$$

Vagyis a $V := \bigcap_{k=1}^n V_k$ választás megfelel.

Tétel. *Kompakt topologikus terek szorzata kompakt. Azaz*

$X_k, \mathcal{U}^{(k)}$ *kompakt* $(k = 1, \ldots, n)$, $\Rightarrow$ $X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{U}$ *kompakt*

Bizonyítás. Elég a tétel állítását csak $n = 2$-re igazolni. (Innen az általános eset azonnal adódik n-re való indukcióval.)

Legyenek tehát $X, \mathcal{U}$, $Y, \mathcal{V}$ kompakt terek és $\mathcal{G}$ egy nyitott halmazokból álló lefedése az $X \times Y$ szorzattérnek.

Állítás: $\exists \mathcal{F}$ véges$\subset \mathcal{G}$ $\quad \bigcup \mathcal{F} = X \times Y$.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy véve a

$$\mathcal{G}' := \{U \times V :\ U \text{ nyitott} \subset X,\ V \text{ nyitott} \subset Y,\ \ \exists G \in \mathcal{G}\ \ U \times V \subset G\}$$

nyitott halmazcsaládot, $\mathcal{G}'$ lefedése $X \times Y$-nak. Így elég látni, hogy

$$\exists \mathcal{F}' \text{ véges} \subset \mathcal{G}' \quad \bigcup \mathcal{F}' = X_1 \times X_2\,.$$

Mindegyik $(x, y) \in X \times Y$ ponthoz válasszunk egy $U^{(x,y)} \in \mathcal{U}_x$, $V^{(x,y)} \in \mathcal{V}_y$ nyitott halmazpárt, melyre $U \times V \in \mathcal{G}'$. Tekintsünk egy tetszőleges $y \in Y$ pontot. Mivel az X tér kompakt, létezik véges sok $x_1, \ldots, x_M \in X$ pont, melyre

$$\bigcup_{i=1}^M U^{(x_i,y)} = X\ .$$

Most a

$$V^y := \bigcap_{i=1}^M V^{(x_i,y)}$$

alakzat olyan nyitott y-környezet, melyre $X \times V^y \subset \bigcup_{i=1}^M U^{(x_i,y)} \times V^{(x_i,y)}$. Vagyis minden $y \in Y$-hoz megadható olyan V^y nyitott y-környezet, amelyre $X \times V^y$ *lefedhető véges sok* $\mathcal{G}$*-beli halmazzal.*

Tekintve, hogy az Y tér is kompakt, kiválasztható véges sok $y_1, \ldots, y_N \in Y$, hogy $\bigcup_{j=1}^N V^{y_j} = Y$. Ekkor $X \times Y = \bigcup_{j=1}^N X \times V^{y_j}$. Tehát lefedtük $X \times Y$-t véges sok olyan sávval, amelyek mindegyike lefedhető véges sok $\mathcal{G}$-be tartozó halmazzal.

$\mathbb{R}^N$ természetes (Archimédesi) topológiája

Definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}(:= \{1, 2, \ldots\})$. $\mathbb{R}^N$ természetes topológiáját a rajta levő $<$ rendezés adja meg:

$U \subset \mathbb{R}^N$ x-környezet $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}^N$ $a < x < b$ és $(a, b) \subset U$.

Emlékeztető. Az N-dimenziós $<$ ill. $\leq$ relációk a megfelelő 1-dimenziós rendezések hatványai. Tehát pl.

$(a_1, \ldots, a_N) < (b_1, \ldots, b_N)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, és $(a,b) := \{z : a < z < b\}$, $[a,b] := \{z : a \le z \le b\}$ a nyitott ill. zárt intervallumok $\mathbb{R}^N$-ben. Általában, az $I \subset \mathbb{R}^N$ alakzatot N-dimenziós *intervallum*nak nevezzük, ha

$$\big[(\min\{a_i, b_i\} : i = 1, \dots N), (\max\{a_i, b_i\} : i = 1, \dots N)\big] \subset I \qquad \forall\, a, b \in I\ .$$

Verifikáljuk, hogy ez a környezetfogalom valóban topológiához vezet.

Tétel. $\mathbb{R}^N$ *Hausdorff tér, topológiája megegyezik az* $\mathbb{R}$ *topológiájának* N*-ik hatványával.*

Bizonyítás. Az 1-dimenziós $\mathbb{R}$ térre a K1, K2 axiómák triviálisan teljesülnek. K3 áll, mivel $x \in (a_i, b_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén $x \in (\max_i a_i, \min_i b_i)$. K4 pedig abból az egyszerű megfigyelésből adódik, hogy a nyitott intervallumok $\mathbb{R}$-ben valóban az (a,b) alakúak. Mivel különböző pontok körülvehetők diszjunkt nyitott intervallumokkal, $\mathbb{R}$ topológiája Hausdorff.

Ha $a := (a_i : i = 1, \dots, N)$, $b := (b_i : i = 1, \dots, N)$ és $a < b$, akkor $(a,b) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$. Ezért a rendezéssel definiált $\mathbb{R}^N$-beli környezetek egybeesnek az $\mathbb{R}$ topologikus terének N-ik hatványa szerinti környezetekkel. Másrészt, általában is, Hausdorff terek szorzatai Hausdorff terek.

Lemma. *Az alapműveletek* $(+\,,\,\cdot)$ *folytonosak mint* 2*-változós* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvények.*

Bizonyítás. Észrevétel: az N-dimenziós (a,b) ill. (c,d) intervallumok $(a,\,b) + (c,\,d) := \{x + y :\ x \in (a,\,b),\ y \in (c,\,d)\}$ összege

$$(a,\,b) + (c,\,d) = (a + c,\, b + d)\ .$$

Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $V \subset \mathbb{R}$ egy környezete $x_1 + x_2$-nek, akkor valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett $(x_1 + x_2 - \varepsilon,\, x_1 + x_2 + \varepsilon) \subset V$. Ekkor tehát az $U_k := (x_k - \varepsilon/2,\, x_k + \varepsilon/2)$ $(k = 1, 2)$ környezeteire x_1-nek ill. x_2-nek $U_1 + U_2 \subset V$. Ez mutatja, hogy az összeadás mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés folytonos.

Az $M_c : x \mapsto cx$ és $Q : x \mapsto x^2$ függvények folytonosak $\mathbb{R}$-en. Bevezetve az $A(x,y) := x + y$ jelölést, mivel

$$x_1 x_2 = \tfrac{1}{4}\big((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\big)\ ,$$

a szorzás a folytonos $x \mapsto x/4$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x$ és $(x,y) \mapsto x + y$ műveletek véges összetétele.

Következmény. 1) *A vektori összeadás és konstanssal való szorzások folytonos* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *ill.* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *műveletek.*

2) *Az* 1*-változós elemi függvények és* 2*-változós alapműveletek összetételeiből képzett többváltozós elemi függvények az értelmezési tartományukon folytonosak.*

Tétel. 1) $\mathbb{R}$ *Hausdorff tér.*

2) $\mathbb{R}$ *nyitott részhalmazai megszámlálható sok páronként diszjunkt nyitott intervallum egyesítéséből adódnak.*

3) $\mathbb{R}$ *összefüggő részei az intervallumok.*

Bizonyítás. 2) Legyen G nyitott $\subset \mathbb{R}$. Mindegyik $x \in G$-re legyen

$$a_x := \inf\{a :\ (a, x] \subset G\}\ , \quad b_x := \sup\{b :\ [x, b) \subset G\}\ ..$$

Észrevétel: $(a_x, b_x) \subset G$ $(x \in G)$, másrészt $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \ne \emptyset$ csak úgy lehet, ha $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$. Mivel bármelyik intervallumban van racionális szám, és mert a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható, csak megszámlálható sok különböző (a_x, b_x) alakú intervallum lehet.

3) Tegyük fel, hogy S összefüggő$\subset \mathbb{R}$ és $a, b \in S$, $a < b$.

Állítás: $[a,b] \subset S$. (Innen S intervallum.)

Bizonyítás: Ha volna $x \in [a,b]$, melyre $x \notin S$, akkor $(-\infty, x)$ ill. (x, ∞) diszjunkt nyitott lefedését adnák S-nek. Ekkor $G := (-\infty, x) \cap S$ ill. $H := (x, \infty) \cap S$ diszjunkt nyitottak S-ben, $a \in G$, $b \in H$ és $G \cup H = S$ lenne.

Legyen most S egy intervallum. Tegyük fel, hogy $G, H \neq \emptyset$ nyitottak S-ben, és $G \cap H = \emptyset$. Tekintsünk egy $a \in G$, $b \in H$ pontpárt. Vehető $a < b$. Jegyezzük meg, hogy $[a,b] \subset S$. Legyen $x := \sup[G \cap (a,b)]$. Mivel G nyitott az S intervallumban, $x \notin G$. Ugyanakkor az $x \in H$ feltevés is ellentmond H S-beli nyitottságának. Tehát $G \cup H \not\supset S$, azaz S összefüggő.

Következmény. (Bolzano tétele). *Folytonos valós függvény intervallumot intervallumba visz. Speciálisan, ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) < 0 < f(b)$, akkor valamely $x \in (a,b)$-re $f(x) = 0$.*

Bizonyítás. Folytonos függvény összefüggő halmazt összefüggőbe visz.

Borel tétele

Kérdés: Melyek $\mathbb{R}^N$ kompakt részhalmazai?

Definíció. $\mathbb{R}$-beli intervallumok egy $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ sorozatát véges intervallumláncnak nevezzük, ha

$$a_i < a_{i+1} < b_i \qquad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Tétel. (Borel) *Legyen $[a,b]$ egy korlátos zárt intervallum $\mathbb{R}$-ben, amelyet lefed nyitott intervallumok egy $\mathcal{I}$ családja. Ekkor kiválasztható $\mathcal{I}$-ből egy $[a,b]$-t lefedő véges intervallumlánc.*

Bizonyítás. Észrevétel: Ha $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ véges intervallumlánc, akkor $\bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i) = (a_1, b_m)$ Így a

$$J := \left\{ x \geq a : \ \exists \mathcal{L} \text{ véges intv.lánc} \subset \mathcal{I} \quad \bigcup \mathcal{L} \supset [a, x] \right\}$$

halmaz a

$$J = [a, x^*) \qquad \text{ahol} \qquad x := \sup J \ .$$

intervallum. ($J \neq \emptyset$, mivel $\{a\}$ lefedhető egy $\mathcal{I}$-beli intervallummal. Másrészt J az észrevétel alapján $\{a\}$-t tartalmazó *nyitott* intervallumok uniójának metszete $[a, \infty)$-nel.)

Belátandó: $x^* > b$. Tegyük fel, hogy $x^* \leq b$, azaz $x^* \in [a,b]$. Mivel $\bigcup \mathcal{I} \supset [a,b]$, létezik $(c,d) \in \mathcal{I}$, amelyre $x^* \in (c,d)$. Csak $c \geq a$ lehet, hiszen $c < a$ esetén $(c,d) \supset [a, x^*]$ volna, amiből a $d \leq x^*$ ellentmondás következne. Így $c \in J$. Vehető tehát egy olyan $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ lánc $\mathcal{I}$-ből, hogy $a_1 < a$ és $b_m > c$. Legyen $k := \min\{i : \ b_i > c$. Ekkor $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k), (c, d)$ véges intervallumlánc, ahonnan megint a $d \leq x^*$ ellentmondás következne.

Következmény. *Az $[a,b]$ intervallum kompakt $\mathbb{R}$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése $[a,b]$-nek. Az előző tétel 2) állítása szerint az

$$\mathcal{I} := \{(x,y) : \ \exists G \in \mathcal{G} \quad (x,y) \subset G\}$$

intervallumcsalád szintén lefedi G-t. $\mathcal{I}$-ből egy véges $I_1,\ldots,I_m$ lánc lefedi $[a,b]$-t. Mindegyik I_i intervallumhoz választható $G_i \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $I_i \subset G_i \quad (i = 1,\ldots,m)$. Most $\bigcup_{i=1}^m G_i \supset [a,b]$.

Tétel. $\mathbb{R}^N$ *kompakt részehalmazai a korlátos zártak.*

Bizonyítás. Legyen K kompakt $\subset \mathbb{R}^N$. Mivel $\mathbb{R}^N$ Hausdorff tér, K szükségképpen zárt. A $\{(-n,n)^N : n = 1,2,\ldots\}$ nyitott intervallumcsalád lefedi a teljes $\mathbb{R}^N$ teret, így a K kompakt halmazt is. Ezért kiválasztható $n_1,\ldots,n_k$, úgy hogy $K \subset \bigcup_{i=1}^k (-n_i,n_i)^N = (-\max_i n_i, \max_i n_i)^N$. Azaz K korlátos is.

Legyen S korlátos zárt $\subset \mathbb{R}^N$. Ekkor S zárt $\subset [-M,M]^N$ valamely $M > 0$-ra. Borel tétele alapján a $[-M,M]$ intervallum kompakt, és így $[-M,M]^N$ kopakt $\subset \mathbb{R}^N$. Másrészt Hausdorff térben kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.

Következmény. (Weierstrass). *Kompakt téren (speciálisan korlátos zárt intervallumon) folytonos valós függvény felveszi minimumát.*

Bizonyítás. Ha $K,\mathcal{U}$ kompakt tér és $f : K \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor $f(K)$ kompakt $\subset \mathbb{R}$. Azaz $f(K)$ korlátos zárt része $\mathbb{R}$-nek. Emiatt $s := \inf f(K) > -\infty$. Mivel a $(-\infty, s)$ intervallum metszi az s szám minden környezetét, $s \in \partial f(K)$. Mivel pedig $f(K)$ zárt, $s \in f(K)$.

æ

METRIKUS TEREK

Definíció. Legyen X egy halmaz. A $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény *félmetrika* X-en, ha

$$\begin{array}{lll} \text{D1)} & d(x,y) = d(x,y) \geq 0 = d(x,x) & (x,y \in X) \\ \text{D2)} & d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) & (x,y,z \in X). \end{array}$$

A D1, D2 távolság-axiómákat teljesítő X, d pár *félmetrikus tér.*

Megjegyzés. Célszerű, bár az irodalomban kevésbé szokásos, olyan d függvényekkel is dolgozni, amelyek teljesítik a D1, D2 távolság-axiómákat, de a $+\infty$ értéket is felvehetik. Ezeket *kiterjesztett értékű* félmetrikának nevezzük.

Megjegyzés. D1-et *szimmetria*-axiómának, D2-t pedig *háromszög-egyenlőtlenség*-nek (rövidítve $\triangle$-*egyenlőtlenség*) nevezzük.

A $\triangle$-egyenlőtlenség iterálásával kapjuk a *legrövidebb út elvé*t:

Lemma. *Ha* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, *akkor* $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.

Definíció. Az X, d félmetrikus tér *metrikus tér* (és ilyenkor d elnevezése *metrika* vagy *távolság* X-en), ha teljesül a

$$\text{D3)} \quad d(x,y) > 0 \qquad (x \neq y \quad x,y \in X)$$

szeparáltság-axióma.

Topológia metrikus téren

Legyen X, d egy (tetszőlegesen rögzített) félmetrikus tér ebben az alfejezetben.

Definíció. $S^{(d)}(x,\rho) := \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$ az x körüli ρ sugarú *gömb*,

$$\mathcal{U}_x^{(d)} := \{U \subset X : \ \exists \varepsilon > 0 \ \ S^{(d)}(x,\varepsilon) \subset U\} \qquad (x \in X).$$

Megjegyzés. $S^{(d)}(x,\rho_1) \cap S^{(d)}(x,\rho_2) = S^{(d)}(x, \min\{\rho_1,\rho_2\})$, ahonnan rögtön következik, hogy $X, \mathcal{U}^{(d)}$ környezetrendszer.

Lemma. *Az* $S^{(d)}(x,\rho)$ *gömb nyitott (*$\mathcal{U}^{(d)}$ *szerint).*

Bizonyítás. Legyen $y \in S^{(d)}(x,\rho)$ tetszőleges. Jelöljük $\delta := d(x,y)$-val az y pont távolságát x-től. Ekkor $\delta < \rho$, és a $\triangle$-egyenletlőtlenség szerint

$$S^{(d)}(y, \rho - \delta) \subset S^{(d)}(x,\rho).$$

Következmény. $X, \mathcal{U}^{(d)}$ *topológia.*

Tétel. *Ha* X, d *metrikus tér, akkor* $\mathcal{U}^{(d)}$ *Hausdorff topológia.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in X$ két különböző pont, és legyen $\delta := d(x,y)$. Mivel d metrika, $\delta > 0$. Így a $\triangle$-egyenlőtlenség szerint $S^{(d)}(x,\delta/2) \cap S^{(d)}(y,\delta/2) = \emptyset$.

Lemma. *A* d *távolságfüggvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Bizonyitandó: $U := \{(x',y') : \ |d(x',y') - d(x,y)| < \varepsilon\}$ egy (x,y)-környezet $X \times X$-ben (a szorzattopológiában). Elegendő látni: $\exists\, \delta > 0 \ \ S^{(d)}(x,\delta) \times S^{(d)}(y,\delta) \subset U$ azaz

$$|d(x',y') - d(x,y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad d(x,x'),\, d(y,y') < \delta.$$

Ha $x,x',y,y'\in X$, az x',x,y,y' ill. x,x',y',y utakra a legrövidebb út elve szerint

$$\begin{aligned} d(x',y') &\le d(x,x')+d(x,y)+d(y,y') \\ d(x,y) &\le d(x,x')+d(x',y')+d(y,y')\ ,\Rightarrow \\ |d(x',y')-d(x,y)| &\le d(x,x')+d(y,y')\ . \end{aligned}$$

Így a $\delta:=\varepsilon/2$ választás megfelel.

Sorozatok

X,d egy tetszőlegesen rögzitett metrikus tér a fejezet végéig, és az $\mathcal{U}^{(d)}$ topológiában vett határt, lezárást ill. belsőt ∂, $^-$ ill. $^\circ$ jelöli.

Definíció. Legyen $\mathcal{N}$ végtelen$\subset \mathbb{N}$ és $(x_n:\ n\in\mathcal{N})$ egy sorozat X-ben* , továbbá $x\in X$. Az $(x_n:\ n\in\mathcal{N})$ sorozat *konvergál* az x ponthoz, azaz

$$x_n\to x\ \ (\mathcal{N}\ni n\to\infty)\quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\quad d(x_n,x)\to 0\ \ (\mathcal{N}\ni n\to\infty)\ .$$

Ha nem félrevezető, röviden "$x_n\to x$"-et írunk.

Lemma. *Metrikus térben a határérték egyértelmű. Azaz $x_n\to x,y\ \ (\mathcal{N}\ni n\to\infty)$ esetén $x=y$.*

Bizonyítás. Az x,x_n,y utakat becsülve,

$$0\le d(x,y)\le d(x,x_n)+d(x_n,y)\to 0\qquad (\mathcal{N}\ni n\to\infty)\ .$$

Definíció. Metrikus térben a határérték jelölése

$$\lim_{n\in\mathcal{N}} x_n := \big[x\in X:\ \lim_{n\in\mathcal{N}} d(x_n,x)=0\big].$$

Tétel. *Ha X,d és X',d' metrikus terek, akkor az $f:X\to Y$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha konvergens sorozatot konvergensbe visz, azaz ha*

$$\forall\ x,x_1,x_2,\ldots\in X\qquad x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to f(x).$$

Bizonyítás. Úgy, mint $\mathbb{R}$-ben a folytonosság Cauchy- és Heine-féle definícióinak ekvivalenciája.

Tétel. *Ha $A\subset X$, akkor $\overline{A}=\{x\in X:\ \exists\,(a_1,a_2,\ldots)\ A\text{-ban}\quad a_n\to x\}$.*

Bizonyítás. Tudjuk: $\overline{A}=A\cup\partial A=\{x\in X:\ \forall\,U\in\mathcal{U}_x^{(d)}\quad U\cap A\ne\emptyset\}$.
Tegyük fel, hogy $x\in\overline{A}$. Tekintsük az

$$U_n:=S^{(d)}(x,1/n)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

gömbi környezeteit x-nek. Mivel $A\cap U_n\ne\emptyset$ minden n-re, választható olyan $(a_1,a_2,\ldots)$ sorozat, hogy $a_n\in A\cap U_n\quad (n=1,2,\ldots)$. Most $a_n\to x$, mivel

$$d(a_n,x)<1/n\to 0\qquad (n\to\infty)\ .$$

Tegyük fel ezután, hogy $x\notin\overline{A}$. Mivel $X\setminus\overline{A}=X\setminus(A\cup\partial A)=(X\setminus A)^\circ$, fennáll $X\setminus A\in\mathcal{U}_x^{(d)}$. Tehát $\quad\exists\,\varepsilon>0\ \ S^{(d)}(x,\varepsilon)\subset X\setminus A$.

---

* *Sorozat* alatt a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának egy végtelen részhalmazán értelmezett függvényt értünk. A tradicionális jelölés azonban eltér a szokásostól. Szigorúan véve, x_n jelentése $x(n)\ \ (n\in\mathcal{N})$, ill. $(x_n:\ n\in\mathcal{N})$ jelöli azt, hogy a sorozat egy $x:\mathcal{N}\to X$ típusú függvény.

Ha $(a_1, a_2, \ldots)$ egy sorozat A-ban, akkor $d(x, a_n) \geq \varepsilon \; \forall n$, ahonnan $d(x, a_n) \not\to 0$.

Tétel. (Bolzano–Weierstrass). *Metrikus térbeli kompakt halmazban minden sorozatnak van konvergens részsorozata. Azaz ha* A kompakt$\subset X$ *és* $(a_1, a_2, \ldots)$ *egy sorozat* A*-ban, akkor* $\exists\, a \in A \; \exists \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \;\; a_n \to a \;\; (\mathcal{N} \ni n \to \infty)$.

Bizonyítás. Észrevétel: Egy $a \in X$ ponthoz pontosan akkor $\exists \mathcal{N}$ végtelen$\subset \mathbb{N}$ $a_n \to a \;\; (\mathcal{N} \ni n \to \infty)$, ha bármely n-re az $S^{(d)}(a, 1/n)$ gömbi környezetébe a-nak végtelen sok tagja esik az $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatnak, azaz ha minden U a-környezetre az $\{n \in \mathbb{N} : \; a_n \in U\}$ halmaz végtelen.

Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem teljesül. Az észrevételből következik ekkor, hogy mindegyik $a \in A$ ponthoz választható lenne U_a a-környezet, melyre $\{n : \; a_n \in U_a\}$ véges. Tekintsük most a

$$\mathcal{G} := \{U_a^o : a \in A\}$$

nyitott lefedését A-nak. Mivel A kompakt, létezik $a_1, \ldots, a_m \in A$ úgy, hogy

$$U_{a_1}^o \cup \ldots \cup U_{a_n}^o \supset A \; .$$

De így az

$$\mathbb{N} = \{n : \; a_n \in A\} = \textstyle\bigcup_{i=1}^m \{n : \; a_n \in U_{a_i}^o\} = \bigcup_{i=1}^m (\text{VÉGES}) = (\text{VÉGES})$$

ellentmondásra jutunk.

Szeparabilitás

Definíció. Az X, d metrikus tér *szeparábilis*, ha

$$\exists \, \{x_1, x_2, \ldots\} \text{ megszámlálható} \subset X \quad \{x_1, x_2, \ldots\}^- = X$$

(itt $^-$ az $\mathcal{U}^{(d)}$-szerinti lezárás). Standard jelölés: $\mathbb{Q} := \{\text{racionális számok}\}$.

Lemma. *Ha* X, d *szeparábilis és* $\{x_1, x_2, \ldots\}^- = X$, *akkor az* $x \in X$ *körüli* $\rho > 0$ *sugarú gömbre*

$$S^{(d)}(x, \rho) = \bigcup \{S^{(d)}(x_n, \delta) : \; d(x_n, x) + \delta < \rho, \; \delta \in \mathbb{Q} \; \} \; .$$

Bizonyítás. Legyen $y \in S^{(d)}(x, \rho)$ tetszőleges. Mivel $d(x, y) < \rho$, létezik olyan *racionális* δ is, melyre $0 < \delta < \frac{1}{2}[\rho - d(x, y)]$. Mivel $\{x_1, x_2, \ldots\}^- = X$, valamely n indexre $d(x_n, y) < \delta$. Ezzel az n indexszel $y \in S^{(d)}(x_n, \delta)$, és

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, x_n) + d(x_n, z) \\ &\leq d(x, y) + \delta + \delta < \rho \qquad \big(z \in S^{(d)}(x_n, \delta)\big) \; . \end{aligned}$$

Tétel. (Lindelöf). *Szeparábilis metrikus térben kiválasztható olyan megszámlálható nyitott gömbcsalád, amely tagjaiból az összes nyitott halmaz kirakható.*

Sőt, pontosabban, ha X, d *szeparábilis,* $\{x_1, x_2, \ldots\}^- = X$ *és*

$$\mathcal{T} := \{S^{(d)}(x_n, \delta) : \; \delta \in \mathbb{Q} \; , n = 1, 2, 3, \ldots\} \; ,$$

akkor

1) $\forall G$ *nyitott*$\subset X \;\; \exists T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{T} \quad G = \bigcup_{i=1}^\infty T_i$,
2) $\forall \mathcal{G} \subset \{\textit{nyitottak}\} \;\; \exists \mathcal{H}$ *megszámlálható*$\subset \mathcal{G} \quad G = \bigcup \mathcal{H}$.

Bizonyítás. 1) Ha G nyitott, akkor minden $x \in G$-hez választható $\rho_x > 0$ úgy, hogy $S^{(d)}(x, \rho_x) \subset G$. Így a lemma alapján

$$\begin{aligned} &S^{(d)}(x, \rho_x) = \bigcup \{T \in \mathcal{T} : T \subset S^{(d)}(x, \rho_x)\} \qquad (x \in G), \\ &G = \bigcup \{T \in \mathcal{T} : T \subset G\} \; . \end{aligned}$$

De a $\mathcal{T}$ gömbcsalád megszámlálható, és ezért $\{T \in \mathcal{T}:\ T \subset G\} = \{T_1, T_2, \ldots\}$ alakú.

2) Az előzőek szerint általában is

$$G = \bigcup \{T \in \mathcal{T}:\ T \subset G\} \qquad (G \in \mathcal{G})\ .$$

Ha tehát $\mathcal{G}$ egy nyitott halmazcsalád, akkor

$$\bigcup \mathcal{G} = \bigcup \{T \in \mathcal{T}:\ \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\}\ .$$

Mivel $\mathcal{T}$ megszámlálható, megint vehető

$$\{T \in \mathcal{T}:\ \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\} = \{T_1, T_2, \ldots\}\ .$$

Tekintve, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ indexre választható $G_i \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $T_i \subset G_i$,

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{G} &= \bigcup \{T \in \mathcal{T}:\ \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\} \\ &= T_1 \cup T_2 \cup \ldots \subset G_1 \cup G_2 \cup \ldots \subset \bigcup \mathcal{G}\ .\end{aligned}$$

Kompaktság és Bolzano–Weierstrass tulajdonság

Definíció. Az X, d metrikus tér *Bolzano–Weierstrass* (röviden *B–W*) *tulajdonságú*, ha minden X-beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat (d szerint), azaz ha

$$\forall\, (x_1, x_2, \ldots)\ \ \exists\, x \in X,\ \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \qquad x_n \to x \qquad (\mathcal{N} \ni n \to \infty)\,.$$

Definíció. Az $Y \subset X$ halmaz az X, d tér egy ε*-hálója* (a d metrika szerint), ha

$$d(x,y) \geq \varepsilon > 0 \qquad (x \neq y \ \ x, y \in Y)\,.$$

Lemma. *B–W tulajdonságú metrikus térben minden ε-háló véges.*

Bizonyítás. Legyen X, d egy B–W tulajdonságú metrikus tér. Tegyük fel, hogy Y ε-háló X, d-ben, és

$$y_1, y_2, \ldots \in Y\ , \qquad y_i \neq y_k \qquad (i \neq k).$$

A tér B–W tulajdonsága miatt létezik olyan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ és $y \in X$, hogy

$$y_n \to y \qquad (\mathcal{N} \ni n \to \infty)\ .$$

Speciálisan, létezik n_0, hogy $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ valahányszor $n_0 \leq n \in \mathcal{N}$. Ez a tény az

$$\varepsilon \leq d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y) + d(y, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n, m \in \mathcal{N} \ \ n > m \geq n_0)$$

ellentmondásra vezet.

Propozíció. *A B–W tulajdonságú metrikus terek szeparábilisak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X, d B–W tulajdonságú. Legyen $n = 1, 2, \ldots$-re Y_n maximális ${}^1/n$-háló X, d-ben. A lemma alapján ilyenek léteznek és végesek. Így az $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ halmaz megszámlálható.

Állítás: $\overline{Y} = X$. Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $x \in X \setminus \overline{Y}$. Mivel $X \setminus \overline{Y}$ nyitott X-ben, választható $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $S^{(d)}(x, \varepsilon) \subset X \setminus \overline{Y}$. Tekintsünk egy olyan n indexet, amelyre $1/n < \varepsilon$. Az Y_n $1/n$-háló maximalitása miatt valamelyik $y \in Y_n$ pontra $d(x,y) < 1/n < \varepsilon$, ami ellentmond ε választásának.

Tétel. *Metrikus térben a kompaktság ekvivalens a B–W tulajdonsággal.*

Bizonyítás. A már bizonyított Bolzano–Weierstrass tétel szerint a kompakt metrikus terek B–W tulajdonságúak.

Tegyük fel, hogy X,d B–W tulajdonságú, és legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése X-nek (azaz $\mathcal{G}\subset\{X\text{-beli nyitottak}\}$ és $\bigcup\mathcal{G}=X$). Belátandó: $\exists\,\mathcal{F}$ véges$\subset\mathcal{G}$ $\quad\bigcup\mathcal{F}=X$.

Mivel X,d B–W tulajdonságú, szeparábilis is. Lindelöf tétele szerint kiválasztható $G_1,G_2,\ldots\in\mathcal{G}$ úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^\infty G_i=X$. Állítás: Valamelyik N-re $X=G_1\cup\ldots\cup G_N$. (Vagyis $\mathcal{F}:=\{G_1,\ldots,G_n\}$ vétele megfelel.) Bizonyítás: Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor

$$\forall\, n\ \exists\, x_n\in X \qquad x_n\notin G_1\cup\ldots\cup G_n\,.$$

A tér B-W tulajdonsága alapján

$$\exists\,\mathcal{N}\ \text{végtelen}\subset \mathbb{N}\ \exists\, x\in X \qquad \lim\nolimits_{n\in\mathcal{N}} x_n=x\,.$$

Ekkor

$$x=\lim_{i\in\mathcal{N}} x_i\in X\setminus(G_1\cup\ldots\cup G_n) \qquad (n=1,2,\ldots)\ ,$$

mivel bármely rögzített n indexre $x_i\in X\setminus(G_1\cup\ldots\cup G_n)$ $\ (i\geq n)$ és mivel az $X\setminus(G_1\cup\ldots\cup G_n)$ halmazok zártak. Csakhogy így az

$$x\in\bigcap_{n=1}^\infty[X\setminus(G_1\cap\ldots\cap G_n)]=\emptyset$$

ellentmondásra jutunk.

Következmény. *Kompakt metrikus tér szeparábilis.*

Teljesség

Definíció. Az $(x_1,x_2,\ldots)$ sorozat X,d-ben *Cauchy sorozat*, ha

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, N\ \ \forall\, n,m\geq N \qquad d(x_n,x_m)<\varepsilon\,,$$

azaz ha $d(x_n,x_m)\to 0$ $\ (m,n\to\infty)$.

Az $(x_1,x_2,\ldots)$ sorozat X,d-ben *véges út*, ha $\sum_{i=1}^\infty d(x_i,x_{i+1})<\infty$.

Definíció. Az X,d metrikus tér *teljes*, ha benne a Cauchy sorozatok konvergensek, azaz ha

$$\forall\,(x_1,x_2,\ldots) \qquad \lim\nolimits_{m,n} d(x_n,x_m)=0\Rightarrow\exists\, x\in X \quad \lim\nolimits_n x_n=x\,.$$

Példa. A Cauchy-féle konvergenciai kritérium szerint $\mathbb{R}$ ellátva a $d(x,y):=|x-y|$ metrikával teljes. Mivel félmetrikák maximuma ill. összege (ugyanazon a halmazon) triviálisan félmetrika, innen következik, hogy $\mathbb{R}^N$ a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)&:=\max_{i=1}^N|x_i-y_i| \\ d_1(x,y)&:=\sum_{i=1}^N|x_i-y_i| \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x=(x_1,\ldots,x_N)\ , \\ y=(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{R}^N \end{pmatrix}$$

metrikákkal teljes.

Propozíció. (A véges utak elve). *X,d pontosan akkor teljes, ha benne a véges utak konvergensek.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy X,d teljes, és $\sum_{i=n}^\infty d(x_i,x_{i+1})<\infty$. Ekkor

$$d(x_n,x_m)\leq\sum_{i=n}^{m-1} d(x_i,x_{i+1})\to 0 \qquad (m>n\to\infty)\ .$$

Vagyis az $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat Cauchy, következésképpen konvergens.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy a véges utak konvergensek X, d-ben, és legyen $(x_1, x_2, \ldots)$ egy Cauchy sorozat. Most találhatunk egy olyan növő $N_1 \leq N_2 \leq \ldots$ indexsorozatot, amelyre

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k} \qquad (m, n \geq N_k \quad k = 1, 2, \ldots) .$$

Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$, az $(x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots)$ út véges X, d-ben. Tehát feltevés szerint létezik $x \in X$, melyre $x_{N_k} \to x \ (k \to \infty)$.

Állítás: $x_n \to x \ (n \to \infty)$. Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Belátandó: $\exists N \ \forall n \geq N \ \ d(x_n, x) < \varepsilon$. Mivel az $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozat Cauchy, rögzíthető olyan L, hogy

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m, n \geq L) .$$

Mivel $\lim_k x_{N_k} = x$, választható olyan K, hogy

$$d(x_{N_k}, x) =< \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k \geq K) .$$

Legyen $N := \max\{N_k, L\}$. Ha $n \geq N$, akkor

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{N_k}) + d(x_{N_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Tétel. *Ha X, d egy metrikus tér és S teljes$\subset X$ *, akkor S zárt$\subset X$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \overline{S}$ tetszőleges. Belátandó: $x \in S$. Mivel $x \in \overline{S}$, létezik $x_1, x_2, \ldots \in S$ úgy, hogy $x_n \to x \ (n \to \infty)$ Mivel a konvergens sorozatok triviálisan Cauchy sorozatok, az $S, d|S \times S$ tér teljessége miatt $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in S$.

Megjegyzés. A teljes metrikus tereknek az előbbi tételben bemutatott tulajdonságát *abszolút zártság*nak szokás nevezni.

Kontrakciós fixpont tétel

Definíció. Legyenek $X, d, \quad X', d'$ metrikus terek, $\alpha \geq 0$. Az $f : X \to X'$ leképezés *α-kontrakció*, ha

$$d'(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \qquad (x, y \in X) .$$

Lemma. *Kontrakció folytonos.*

Bizonyítás. Ha $f : X \to X'$ egy α-kontrakció, és X-ben $x_n \to x$, akkor

$$0 \leq d'(f(x_n), f(x)) \leq \alpha \cdot d(x_n, x) \to 0 .$$

Tétel. *Legyen X, d teljes metrikus tér és valamely $\alpha < 1$-re a $T : X \to X$ leképezés α-kontrakció. Ekkor*

1) *pontosan egy fixpontja van T-nek, azaz $\exists!\, x \in X \ \ T(x) = x$,*
2) *akármelyik $x_0 \in X$ pontból kiindulva, a*

$$T^n(x_0) := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}(x_0) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozat T fixpontjához konvergál.

---

* Vagyis az $S, d|S \times S$ metrikus tér teljes. (V.ö. Részhalmaz topológiája alfej.)

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőlegesen adott, és vezessük be az

$$x_n := T^n(x_0) \qquad (n = 1, 2, \dots) \ , \qquad \delta := d(x_0, x_1)$$

jelöléseket. Ekkor n-szerinti indukcióval

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \le \alpha \cdot d(x_0, x_1) = \alpha\delta \\ &\vdots \\ d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \le \alpha \cdot d(x_{n-1}, x_n) \le \alpha^n \delta \end{aligned}$$

látható $n = 2, 3, \dots$-ra. Vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n-1}, x_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}\delta = \frac{\delta}{1-\alpha} < \infty \ .$$

Tehát az $x_1, x_2, \dots$ sorozat egy véges út X, d-ben, és így konvergens, mondjuk $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Mivel a T kontrakció folytonos,

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & T(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = & T(x) \end{array} \qquad (n \to \infty) \ .$$

Azt kell még belátnunk, hogy T-nek nem lehet két különböző fixpontja. Tegyük fel, hogy $T(x) = x$ és $T(y) = y$. Ekkor

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x, y) \ ,$$

azaz $(1 - \alpha)d(x, y) \le 0$. Innen $\alpha < 1$ miatt $d(x, y) \le 0$, és így $x = y$ következik.

Átmérő, korlátosság

Definíció. Egy X, d metrikus térbeli $A \subset X$ halmaz *átmérője*

$$\mathrm{diam}\,(A) := \sup\{d(x, y) : \ x, y \in A\}$$

ha $A \ne \emptyset$, és $\mathrm{diam}\,(\emptyset) := 0$. Az $A \subset X$ halmaz *korlátos* (a d metrikában), ha belefoglalható egy d-gömbbe, azaz ha $\exists\, x \in X, \ \rho \in \mathbb{R}_+ \quad A \subset S^{(d)}(x, \rho)$.

Lemma. *A korlátos halmazok a véges átmérőjűek.*

Bizonyítás. Ha $A \subset S^{(d)}(x, \rho)$, akkor $\mathrm{diam}\,(A) \le \mathrm{diam}\,\big(S^{(d)}(x, \rho)\big) \le 2\rho$. Ha pedig $\mathrm{diam}\,(A) < \infty$ és $A \ne \emptyset$, akkor véve egy tetszőleges $x \in A$ pontot, $A \subset S^{(d)}(x, \mathrm{diam}\,(A))$.

Tétel. *A kompakt halmazok (metrikus térben) korlátosak, sőt van bennük legtávolabbi pontpár is.*

Bizonyítás. Legyen K egy kompakt halmaz az X, d metrikus térben. Tudjuk, hogy az $(x, y) \mapsto d(x, y)$ folytonos $K \times K \to \mathbb{R}$ leképezés. Másrészt most a $K \times K$ tér (az $\mathcal{U}^{(d)} \times \mathcal{U}^{(d)}$ topológiával) szintén kompakt. Ezért található $(x_0, y_0) \in K \times K$, melyre

$$d(x_0, y_0) = \max\{d(x, y) : \ (x, y) \in K \times K\} = \mathrm{diam}\,(K) \ .$$

Definíció. Egy metrikus térbe képező f függvény *korlátos*, ha $\mathrm{ran}(f)$ (az értékkészlete) korlátos.

Következmény. *Kompakt topológiát metrikus térbe folytonosan leképező függvény korlátos. Sőt, ha* $K,\mathcal{U}$ *kompakt topológia,* X, d *metrikus tér és* $f, g : K \to X$ *folytonos függvények, akkor*

$$\exists\ x_0 \in K \qquad d(f(x_0), g(x_0)) = \max\{d(f(x), g(x)) :\ x \in K\}\,.$$

Egyenletes folytonosság

Emlékeztető. Az X, d és X', d' metrikus terek közt ható f függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos, azaz ha

$$\forall\, x{\in}X\ \forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta(\varepsilon, x){>}0\ \forall\, y{\in}X\ \ d(x, y) \le \delta(\varepsilon, x) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon\,.$$

Definíció. Az X, d és X', d' metrikus terek közt ható f függvény *egyenletesen folytonos*, ha az előbbinél a $\delta(\varepsilon, x)$ határ az x pontoktól függetlenül is választható, azaz ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x, y \in X\ \ d(x, y) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon\,.$$

Lemma. *Az* f *függvény egyenletesen folytonos pontosan akkor, ha*

$$\lim_{\operatorname{diam}(A)\to 0} \operatorname{diam}(f(A)) = 0\ ,$$

azaz ha $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta{>}0\ \forall\, A \subset X \quad \operatorname{diam}(A) \le \delta \Rightarrow \operatorname{diam}(f(A)) \le \varepsilon\,.$

Bizonyítás. Definició szerint az f függvény pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x, y \in X \quad d(x, y) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon$. Most $\operatorname{diam}(f(A)) \le \varepsilon$ valahányszor $\operatorname{diam}(A) \le \delta(\varepsilon)$.

Tétel. *Kompakt metrikus tér folytonos leképezése metrikus térbe egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyenek X, d ill. X', d' metrikus terek, $f : X \to X'$. Tegyük fel, hogy X, d kompakt és f folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel a d' távolságfüggvény folytonos,

$$F_\varepsilon := \{(x, y) :\ d'(f(x), f(y)) \ge \varepsilon\}\ \text{zárt} \subset X \times X$$

a kompakt $(\mathcal{U}^{(d)})^2$ topológiában. Így F_ε kompakt$\subset X \times X$. A folytonos d függvény felveszi a $\delta(\varepsilon)$ minimumát F_ε-on. Mondjuk legyen $d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$. Mivel $d(F_\varepsilon) \ge \varepsilon > 0$, csak $x_\varepsilon \ne y_\varepsilon$ és így $\delta(\varepsilon) > 0$ lehet. Ha $x, y \in X$ és $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$, akkor a $\delta(\varepsilon) = \min d(F_\varepsilon)$ reláció szerint $(x, y) \ne F_\varepsilon$. Vagyis az F_ε alakzat definíciója alapján $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ valahányszor $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$.

Egyenletes konvergencia

Emlékeztető. Ha S egy halmaz és X, d metrikus tér, akkor az $f_1, f_2, \ldots : S \to X$ függvények pontonként konvergálnak az $f : S \to X$ függvényhez (jelölésben $f_n \to f$), ha

$$\forall\, s{\in}S\ \forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, N(\varepsilon, s)\ \forall\, n{\ge}N(\varepsilon, s) \qquad d(f_n(s), f(s)) < \varepsilon\,.$$

Definíció. Legyenek S egy halmaz, X, d egy metrikus tér és $f, f_1, f_2, \ldots : S \to X$ függvények. Az $(f_n :\ n = 1, 2, \ldots)$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N(\varepsilon)\ \ \forall\, n \ge N(\varepsilon)\ \ \forall\, s \in S \qquad d(f_n(s), f(s)) < \varepsilon\ .$$

Jelölés: $f_n \rightrightarrows f \quad (n \to \infty)$, vagy csak röviden $f_n \rightrightarrows f$. (Annak, hogy milyen metrika szerint, a kontextusból kell kiderülnie. Természetes módon kiterjeszthetjük a definiciót részsorozatokra is. Ilyenkor $f_n \rightrightarrows f \quad (\mathcal{N} \ni n \to \infty)$ típusú a célszerű jelölés.) Bevezetjük a

$$d^S(f,g) := \sup\{d(f(s),g(s)) : \ s \in S\} \quad , \quad d_*^S(f,g) := \min\{d(f,g),1\}$$

távolságokat az $f,g : S \to X$ függvények között.

Tétel. *Az egyenletes konvergencia metrizálható. Nevezetesen, ha S egy halmaz és X,d egy metrikus tér, akkor az $\mathcal{F} := \{S \to X$ függvények$\}$ téren d^S ill. d_*^S kiterjesztett értékű ill. valódi metrikák, és $\mathcal{F}$-ben a d távolsǵ szerint*

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Leftrightarrow \quad d^S(f_n,f) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_*^S(f_n,f) \to 0 \ .$$

Bizonyítás. A d távolságfüggvény szimmetriájából azonnal következik d^S ill. d_*^S szimmetriája. Ha $f \neq g$ $\mathcal{F}$-ben, akkor valamely $s \in S$ pontnál $f(s) \neq g(s)$, ahonnan $d^S(f,g) \geq d_*^S(f,g) \geq \min\{1, d(f(s),g(s))\} > 0$. A $\triangle$-egyenlőtlenség d^S- ill. d_*^S-re a következőképpen bizonyítható: Legyenek $f,g,h \in \mathcal{F}$. Most tetszőleges $s \in S$-re a $d_* := \min\{1,d\}$ jelöléssel

$$d(f(s),h(s)) \leq d(f(s),g(s)) + d(g(s),h(s)) \leq d^S(f,g) + d^S(g,h) \ ,$$
$$d_*(f(s),h(s)) \leq d_*(f(s),g(s)) + d_*(g(s),h(s)) \leq d_*^S(f,g) + d_*^S(g,h) \ ,$$

és itt a bal oldalak $\sup_{s \in S}$-e $d^S(f,h)$ ill. $d_*^S(f,h)$. Tehát a d^S és d_*^S függvények metrikák. Az $f_n \rightrightarrows f$ reláció ekvivalenciája $\sup_{s \in S} d(f_n(s),f(s)) \to 0$-val azonnal adódik. Másrészt $d^S(f_n,f) \to 0 \ \Leftrightarrow \ d_*^S(f_n,f) = \min\{1, d^S(f_n,f)\} \to 0$.

Teljesség és egyenletes konvergencia

Tétel. *Ha X,d teljes metrikus tér és S egy halmaz, akkor az $\mathcal{F} := \{S \to X$ függvények$\}$ tér ellátva a d_*^S (vagy a kiterjesztett értékű d^S) metrikával teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $f_1, f_2, \ldots$ egy véges út $\mathcal{F}$-ben. Azaz $\sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) < \infty$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n(s), f_{n+1}(s)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) < \infty \qquad (s \in S) \ .$$

Vagyis minden $s \in S$ mellett az $f_1(s), f_2(s), \ldots$ út X-ben véges (a d metrika szerint). Így az

$$f(s) := \lim_{n \to \infty} f_n(s) \qquad (s \in S)$$

függvény jól-definiált az X,d tér teljessége miatt. A távolságfüggvény folytonossága következtében

$$\begin{aligned} d(f_N(s), f(s)) &= \lim_{M \to \infty} d(f_N(s), f_M(s)) \\ &\leq \lim_{M \to \infty} \sum_{n=N}^{M-1} d(f_n(s), f_{n+1}(s)) = \sum_{n=N}^{\infty} d(f_n(s), f_{n+1}(s)) \\ &\leq \sum_{N}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) \qquad (s \in S \quad N = 1, 2, \ldots) \ . \end{aligned}$$

Véve a bal oldal sup-át S-en,

$$d^S(f_N, f) \leq \sum_N^\infty d^S(f_n, f_{n+1}) \to 0 \qquad (N \to \infty) \ ,$$

azaz $f_N \rightrightarrows f \quad (N \to \infty)$.

Folytonosság és egyenletes konvergencia

Definíció. Legyen $S,\mathcal{U}$ topologikus tér, X, d metrikus tér. Standard jelölés:

$$\mathcal{C}(S, X) := \{S \to X \quad \text{folytonos függvények}\} \ .$$

A $\mathcal{C}(S, X)$ függvénytér *természetes metrikája* az egyenletes konvergenciát leíró d^S kiterjesztett értékű távolság. Az $X = \mathbb{R}$ speciális esetben (a $d(x, y) := |x - y|$ metrikával) szokásos csak $\mathcal{C}(S)$-et írni $\mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ helyett.

Tétel. *Folytonos függvények egyenletes limese folytonos. Ha $S,\mathcal{U}$ topológia, X, d metrikus tér, az $f_1, f_2, \ldots : S \to X$ függvények folytonosak egy $s \in S$ pontban és $f_n \rightrightarrows f \quad$ (azaz $d^S(f_n, f) \to 0$), akkor az f limesfüggvény is folytonos s-nél.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor található N index, melyre

$$d^S(f_N, f) = \sup_{t \in S} d(f_N(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Az f_N függvény s-beli folytonossága miatt létezik $U \in \mathcal{U}_s$ környezet úgy, hogy

$$\operatorname{diam}(f_N(U)) < \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Most $t \in U$ esetén

$$\begin{aligned} d(f(t), f(s)) &\leq d(f(t), f_N(t)) + d(f_N(t), f_N(s)) + d(f_N(s), f(s)) \\ &\leq d^S(f_N, f) + \operatorname{diam}(f_N(U)) + d^S(f_N, f) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Következmény. *Ha X, d teljes metrikus tér és $K,\mathcal{U}$ kompakt topológia, akkor $\mathcal{C}(K, X), d^K$ teljes metrikus tér.*

æ

TOPOLOGIKUS ÉS NORMÁLT VEKTORTEREK

Általában is, egy algebrai struktúrát topologikusnak nevezünk, ha el van látva egy olyan topológiával, amelyre nézve a műveletei folytonosak.

Lineáris topológiák

Definíció. Legyen V egy (valós) vektortér és $\mathcal{V}$ egy topológia V-n. $\mathcal{V}$ *lineáris* topológia (V felett), ha a

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$

$(\lambda, v) \mapsto \lambda v \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

műveletek folytonos $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ill. $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ leképezések. Tehát a *topologikus vektorterek* a lineáris topológiával ellátott vektorterek.

Tétel. *A lineáris topológiát meghatározzák a* 0*-környezetei. Ha* $V, \mathcal{V}$ *topologikus vektortér, akkor*

1) $\mathcal{V}_a = a + \mathcal{V}_0 = \{a + U : U \in \mathcal{V}_0\} \qquad (a \in \mathcal{V})$,

2) $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} (A + U)$ *az* $A \subset V$ *alakzatok* $\mathcal{V}$*-lezárására.*

Bizonyítás. 1) Legyen $a \in V$. A $T_a : x \mapsto x + a$ eltolás folytonosan invertálható leképezése V-nek önmagára ($T_a^{-1} = T_{-a}$). Így környezetet környezetbe visz, azaz $U \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow T_a(U) \in \mathcal{V}_a$.

2) Definíció szerint $a \in \overline{A}$ akkor és csak akkor, ha $\forall U \in \mathcal{V}_a \;\; U \cap A \neq \emptyset$, ami 1) alapján azt jelenti, hogy minden $U \in \mathcal{V}_0$ környezetre $(a + U) \cap A \neq \emptyset$, azaz $a \in A - U$. Tehát $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_0} (A - U)$. Mivel az $M_{-1} : x \mapsto -x$ szorzás folytonos és idempotens, $-U \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow U \in \mathcal{V}_0$.

Lemma. *Topologikus vektortérben az origó lezártja egy altér, és minden* 0*-környezet tartalmaz* $W + \overline{\{0\}}$ *alakú* 0*-környezetet.*

Bizonyítás. Legyen $V, \mathcal{V}$ topologikus vektortér és

$$L := \overline{\{0\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_0} U .$$

Lévén folytonos műveletek, az összeadás és a konstanssal való szorzások nem vezetnek ki a $\{0\}$ halmaz lezártjából, L-ből (hiszen $0+0 = 0$ és $\mathbb{R} \cdot 0 = 0$). Vagyis L altere a V vektortérnek. Másrészt az összeadás folytonossága alapján $\forall U \in \mathcal{V}_0 \; \exists Z, W \in \mathcal{V}_0 \;\; Z + W \subset U$, és így $\forall U \in \mathcal{V}_0 \; \exists W \in \mathcal{V}_0 \;\; L + W \subset U$.

Következmény. *Ha a* $V, \mathcal{V}$ *topologikus vektortér pontjai topológiailag megkülönböztethetők, akkor a tér Hausdorff. Azaz, ha* $\mathcal{V}_a \neq \mathcal{V}_b \;\; (a \neq b,\; a, b \in V)$, *akkor* $V, \mathcal{V}$ *Hausdorff tér.*

Bizonyítás. Ha az $L := \overline{\{0\}}$ altér nem-triviális (azaz $L \neq \{0\}$), akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_x &= \{U \subset V : \exists W \in \mathcal{V}_0 \;\; x + W + L \subset U\} \\ &= \{U \subset V : \exists W \in \mathcal{V}_0 \;\; W + L \subset U\} = \mathcal{V}_0 \qquad (x \in L) . \end{aligned}$$

Tehát az L-beli pontok topológiailag megkülönböztetlenek.

Ha $L = \{0\}$ és $a \neq b$ V-ben, akkor $a - b \notin L$, és így valamely $U \in \mathcal{V}_0$ környezetre $a - b \notin U$. Mivel a kivonás is folytonos $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ operáció, található

$W,Z\in\mathcal{V}_0$, hogy $W-Z\subset U$. Most $a-b\notin W-Z$, ahonnan $(a+Z)\cap(b+W)=\emptyset$. Tehát a-nak és b-nek vannak diszjunkt környezetei. Azaz ilyenkor a $V,\mathcal{V}$ tér Hausdorff.

Véges dimenziós vektortér topológiája

Tétel. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér. Ekkor*

1) *pontosan egy lineáris Hausdorff topológia létezik V-n,*

2) *ha $\{e_1,\dots,e_N\}$ bázis $\subset V$ és $\mathcal{V}$ lineáris Hausdorff topológia V-n, akkor*

$$\mathcal{V}_a=\left\{U\subset V:\ \exists\,\varepsilon>0\quad \{a+\textstyle\sum_{i=1}^N\xi_ie_i:\ |\xi_1|,\dots|\xi_n|<\varepsilon\}\subset U\right\}\qquad (a\in V).$$

Bizonyítás. Észrevétel: 2) $\Rightarrow$ 1) [mert ilyen $\mathcal{V}$ topológia megfelelő is].

2) Legyen $\mathcal{V}$ egy lineáris Hausdorff topológia V-n. Legyenek $a\in V$ és $U\in\mathcal{V}_a$ tetszőlegesen adottak. Tekintsük a

$$T:(\xi_1,\dots,\xi_n)\to a+\textstyle\sum_{i=1}^N\xi_ie_i$$

leképezést. Mivel $\mathcal{V}$ lineáris, T $(\mathbb{R}^n\to\mathcal{V})$-folytonos. Ezért, minthogy $a=T(0)$, $T^{-1}(U)$ 0-körny $\mathbb{R}^n$-ben. Vagyis található $\varepsilon>0$, melyre

$$\{(\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_1|,\dots,|\xi_n|<\varepsilon\}\subset T^{-1}(U)\ .$$

Innen

$$(*)\qquad \{T(\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_1|,\dots,|\xi_n|<\varepsilon\}\subset U\ .$$

Fordítva: Tegyük fel, hogy $a\in V$, $U\subset V$ és az imént használt T leképezéssel $(*)$ teljesül. Belátandó: $U\in\mathcal{V}_a$.

Mivel $K:=\left\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\ :\ \max_{i=1}^n|\xi_i|=\varepsilon\right\}$ kompakt$\subset\mathbb{R}^n$, ennek a folytonos $T(K)$ képe kompakt V-ben (a $\mathcal{V}$ topológia szerint). Feltevés szerint $\mathcal{V}$ Hausdorff-féle, így $T(K)$ zárt, azaz a $V\setminus T(K)$ alakzat nyitott. Mivel $a\in V\setminus T(K)$, fennáll $V\setminus T(K)\in\mathcal{V}_a$. A $(\lambda,v)\mapsto a+\lambda v$ leképezés folytonossága miatt található $\delta>0$ és $Z\in\mathcal{V}_0$, úgy hogy

$$a+(-\delta,\delta)Z\subset V\setminus T(K)\ .$$

Észrevétel: összefüggőségi okokból

$$a+(-\delta,\delta)Z\subset\{T(\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_1|,\dots,|\xi_n|<\varepsilon\}\ .$$

[Bizonyítás: Ha az ellenkezője, azaz

$$\exists\, z\in Z,\ \delta'\in(-\delta,\delta)\qquad a+\delta'z\notin\{T(\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_1|,\dots,|\xi_n|<\varepsilon\}$$

volna, akkor valamely $(\xi_1',\dots,\xi_i')\in\mathbb{R}^n$-re

$$a+\delta'z=T(\xi_1',\dots,\xi_n')\qquad \max_{i=1}^n|\xi_i'|\geq\varepsilon$$

lenne, és az

$$a+\frac{\varepsilon\delta'}{\max_i|\xi_i'|}z\in T(K)\ ,\quad a+(-\delta,\delta)z$$

ellentmondásra jutnánk.] Mivel a $\mathcal{V}$ topológia lineáris, $a+(-\delta,\delta)Z\in\mathcal{V}_a$, ahonnan $\{T(\xi_1,\dots,\xi_n):\ |\xi_1|,\dots,|\xi_n|<1\}\in\mathcal{V}_a$, és így $U\in\mathcal{V}_a$.

Következmény. *Ha $V,\mathcal{V}$ Hausdorff topologikus vektortér, $\{e_1,\dots,e_N\}$ egy bázis V-ben, akkor a $(\xi_1,\dots,\xi_N)\mapsto\sum_{=1}^N\xi_ke_k$ folytonos és folytonosan invertálható $\mathbb{R}^N\leftrightarrow V$ leképezés.*

Következmény. *Véges dimenziós Hausdorff topologikus vektortér lineáris leképezései topologikus vektorterekbe folytonosak.*

Bizonyítás. Legyen $V_1, \mathcal{V}_1$ Hausdorff topologikus vektortér, $N := \dim(V_1) < \infty$ és $f : V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés egy $V_2, \mathcal{V}_2$ topologikus vektortérbe. Az előző következmény szerint az általánosság megszorítása nélkül vehető $V_1 = \mathbb{R}^N$ (a természetes topológiájával). Ugyanakkor

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k v_k \quad \text{ahol} \quad v_k := f(0, \ldots, 0, \underset{\breve{k}}{1}, 0, \ldots, 0) \quad (k = 1, \ldots, N),$$

ami az összeadások és szorzások folytonossága követekeztében folytonos.

Definíció. Egy véges dimenziós vektortéren értelmezhető egyedüli lineáris Hausdorff topológiát a tér *természetes topológiájá*nak nevezzük. A következőkben a véges dimenziós vektortereket (hacsak kimondottan másképpen nem rendelkezünk) automatikusan a természetes topológiájukkal ellátott topologikus vektortereknek tekintjük.

Norma, félnorma

Kérdés: Melyek a vektortérbeli műveletekkel *kompatibilis* metrikák?

Definíció. Legyen V egy vektortér. A $\nu : V \to \mathbb{R}$ függvény *félnorma* V-n, ha

N1) $\nu(\lambda v) = |\lambda| \cdot \nu(v) \geq 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ v \in V)$

N2) $\nu(v_1 + v_2) \leq \nu(v_1) + \nu(v_2) \qquad (v_1 + v_2 \in V)$

A ν félnorma *norma*, ha

N3) $\nu(v) \neq 0 \qquad (v \neq 0)$.

Az N1 norma-axiómában megadott tulajdonságot a ν függvény *homogenitás*ának, az N2 axióma tartalmát $\triangle$-*egyenlőtlenség*nek nevezzük, N3 a norma *definitás*a.

Propozíció. *Legyen V egy vektortér. Egy d metrika V-n kompatibilis a vektortér-műveletekkel, azaz*

$$d(x+a,\, y+a) = d(x,y)\ , \quad d(\lambda x,\, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y) \qquad (x, y, a \in V \quad \lambda \in \mathbb{R})\ ,$$

ha létezik ν norma, melyre

$$d(x,y) = \nu(x-y) \qquad (x, y \in V)\ .$$

Bizonyítás. Ha ν norma és $d(x,y) := \nu(x-y) \quad (x, y \in V)$, akkor

$$d(x+a,\, y+a) = \nu((x+a) - (y+a)) = \nu(x-y) = d(x,y),$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = \nu(\lambda x - \lambda y) = \nu(\lambda(x-y)) = |\lambda| \cdot \nu(x-y) = |\lambda| \cdot d(x,y).$$

Verifikáljuk a távolság-axiómákat:

D1) $d(y,x) = \nu(y-x) = \nu((-1)(x-y)) \overset{N1}{=} |-1| \nu(x-y) = \nu(x-y) = d(x,y) \geq 0.$

D2) $d(x,y) + d(y,z) = \nu(x-y) + \nu(y-z) \overset{N2}{\geq} \nu((x-y)+(y-z)) = \nu(x-z) = d(x,z).$

D3) $x \neq y, \Rightarrow d(x,y) = \nu(x-y) \overset{N3}{\neq} 0.$

Fordítva: Ha d kompatibilis a vektortér-műveletekkel, akkor a $\nu(z) := d(z,0)$ funkcionál norma a V vektortéren, amint az közvetlenül adódik a távolság-axiómákból.

Definíció. Egy V, ν *normált tér*hez (azaz normával ellátott vektortérhez) mindig társítjuk a a $d(x,y) := \nu(x-y) \quad (x,y \in V)$ ν*-távolság*ot és az eszerinti ν-*topológiá*t.

A távolságfüggvény folytonosságából azonnal adódik az alábbi.

Következmény. *A norma a természetes topológiájában folytonos.*

Megjegyzés. Szemléletesen, a norma a vektorok *hossz*át jelenti. Másrészt a norma az $\mathbb{R}$-beli *abszolút érték*kel analóg szerepet játszik. Szokásos jelölése ezért az $|\ |$-hez hasonló $\|\ \|$ zárójelezés (különböző indexekkel; pl. $\nu_1(v)$ helyett $\|v\|_1$).

Lemma. *Norma szerinti topológia lineáris.*

Bizonyítás. Mivel a normából származtatott metrika eltolás-invariáns és homogén, az összes $T_a : x \mapsto x+a$, $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ eltolások ill. szorzások folytonosak a norma topológiájában. A $\triangle$-egyenlőtlenség szerint az összeadás folytonos a 0-nál. Innen az eltolások folytonossága miatt az összeadás mindenütt való folytonossága is következik.

Folytonos lineáris leképezés normája

Tétel. *Legyenek V_1, ν_1 ill. V_2, ν_2 normált vektorterek és $A : V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

1) *A folytonos (a ν_1- ill. ν_2-szerinti topológiák között),*
2) $\exists\, \alpha \geq 0 \quad \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)$
3) $\exists\, \alpha \geq 0$ *A α-kontrakció.*

Bizonyítás. Jelölje d_k a ν_k-szerinti távolságot $(k = 1,2)$.

1) $\Rightarrow$ 2): Tegyük fel, hogy 2) nem áll. Ekkor

$$\forall\, n\ \exists\, x_n \in V_1 \qquad \nu_2(Ax_n) > n \cdot v_1(x_n)\ .$$

Tekintsük az

$$y_n := \frac{1}{\sqrt{n}\nu_1(x_n)} \cdot x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozatot. Vegyük észre, hogy

$$\nu_1(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}\nu_1(x_n)} \nu_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

Vagyis $d_1(y_n, 0) \to 0$. Ugyanakkor

$$\nu_2(Ay_n) = \nu_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\nu_1(x_n)} Ax_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n}v_1, x_n)} \nu_2(Ax_n)$$
$$> \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty \qquad (n \to \infty)\ ,$$

azaz $d_2(y_n, 0) \not\to 0$. Tehát ilyenkor A nem lehet folytonos 0-nál.

2) $\Rightarrow$ 3): Feltevés szerint minden $x, y \in V_1$-re

$$d_2(Ax, Ay) = \nu_2(Ax - Ay) = \nu_2(A(x-y)) \overset{2)}{\leq} \alpha \cdot \nu_1(x-y) = \alpha \cdot d_1(x,y)\ .$$

3) $\Rightarrow$ 1) Triviális (kontrakció mindig *egyenletesen* folytonos).

Definíció. A $V_1, \mathcal{V}_1$ ill. $V_2, \mathcal{V}_2$ topologikus vektortereknél

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) := \{\text{folyt. lin. } V_1 \to V_2 \text{ leképezések}\} .$$

Szokásos rövidítés: $\mathcal{L}(V_1) := \mathcal{L}(V_1, V_1)$. A konvencionális jelölés nem utal a vett topológiákra – ezeknek a kontextusból egyértelműen ki kell derülniök.

Ha V_1, ν_1 ill. V_2, ν_2 normált vektorterek, a folytonos lineáris operátorokra a következő $(\nu_1 \to \nu_2)$-*normát* alkalmazzuk

$$\nu(A) := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)\} \qquad \big(A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\big) .$$

Tétel. 1) *Az imént definiált* ν *funkcionál norma* $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ *fölött.*

2) $\nu(A) = \sup\limits_{\nu_1(x)=1} \nu_2(Ax) \qquad \big(A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\big)$.

Bizonyítás. Észrevétel: $\nu(A) = \min\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)\}$.
Bizonyítás: Ha $\nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x)$ $(x \in V_1)$ és $\beta \geq \alpha$, akkor $\nu_2(Ax) \leq \beta \cdot \nu_1(x)$ $(x \in V_1)$.
Innen

$$\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)\} = \Big[(\nu(A), \infty) \ \text{ vagy } \ [\nu(A), \infty)\Big] .$$

Speciálisan

$$\nu_2(Ax) \leq \nu(A)\nu_1(x) \qquad (x \in V_1) .$$

2) bizonyítása:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \min\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)\} = \\
&= \min\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2\big(A(\frac{1}{\nu_1(x)}x)\big) \leq \alpha \cdot \nu_1\big(\underbrace{\frac{1}{\nu_1(x)}x}_{\text{y}}\big) \quad (x \in V_1)\} = \\
&= \min\{\alpha \geq 0 : \ \nu_2(Ay) \leq \alpha \quad (y \in V_1, \ \nu_1(y) = 1)\} \overset{\text{sup def}}{=} \\
&= \sup\{\nu_2(Ay) : \ y \in V_1, \ \nu_1(y) = 1\} .
\end{aligned}$$

1) bizonyítása:

$$\nu(\lambda A) = \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(\lambda A y) = \sup_{\nu_1(y)=1} |\lambda| \nu_2(Ay) = |\lambda| \nu(A)$$

$$\begin{aligned}
\nu(A + B) &= \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2\big(\underbrace{(A + B)y}_{Ay+By}\big) \overset{\triangle-\text{egyenl.}}{\leq} \sup_{\nu_1(y)=1} [\nu_2(Ay) + \nu_2(By)] \leq \\
&\leq \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(Ay) + \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(By) = \nu(A) + \nu(B) .
\end{aligned}$$

Normák ekvivalenciája

Definíció. Egy V vektortéren két norma *ekvivalens*, ha ugyanazt a topológiát definiálják.

Tétel. *Legyenek* ν_1 *és* ν_2 *normák ugyanazon a* V *vektortéren. Ekkor*

1) ν_1 *ekvivalens* ν_2*-vel* $\Leftrightarrow$ 2) $\exists\, m, M > 0 \quad m\nu_1 \leq \nu_2 \leq M\nu_1$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Az $S := \{x : \ \nu_2(x) \leq 1\}$ gömb 0-környezet ν_2 topológiájában. Az 1) feltevés szerint S 0-környezet ν_1 topológiájában is. Ezért létezik $\varepsilon_1 > 0$, melyre $\{x :\ \nu_1(x) \le \varepsilon_1\} \subset S$. Ha $v \in V$, akkor az $u := \nu_1(x)^{-1}\varepsilon_1 v$ vektor ν_1-normája $= \varepsilon_1$, és így $u \in S$ azaz $\nu_2(u) \le 1$. Tehát

$$\frac{\varepsilon_1}{\nu_1(v)}\nu_2(v) = \nu_2(\frac{\varepsilon_1}{\nu_1(v)}v) \le 1 \qquad (v \in V)$$

$$\nu_2 \le \frac{1}{\varepsilon_1}\nu_1 \ .$$

Ugyanígy $\nu_1 \le (1/\varepsilon_2)\nu_2$ valamely $\varepsilon_2{>}0$-val. Most az $m{:=}\varepsilon_2$, $M{:=}\varepsilon_1^{-1}$ választás megfelel.

2) $\Rightarrow$ 1): Jelölje d_k a ν_k-szerinti távolságot $(k = 1, 2)$. Ha 2) áll, akkor

$$d_1(x_n, x) \to 0 \ \Rightarrow\ d_2(x_n, x) \to 0$$

minden $x, x_1, x_2, \dots$ sorozatra V-ben. Ez azt jelenti, hogy az $\mathrm{id}_V : v \mapsto v$ leképezés folytonos a ν_1 topológiájából a ν_2-ébe és viszont. Vagyis a két topológia egybeesik.

Következmény. *Véges dimenziós vektortéren bármely két ν_1, ν_2 norma esetén $m\nu_1 \le \nu_2 \le M\nu_1$ valamilyen (ν_1, ν_2-től függő) $m, M > 0$ konstanspárral.*

Bizonyítás. A normák topológiája lineáris Hausdorff topológia. Ilyen azonban pontosan csak egyféle van véges dimenziós vektortéren. Így véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^N$-en a leggyakrabban használt normák

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1}^{N} |x_k|$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2} \qquad \big(x := (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N\big)\ .$$

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{N} |x_k|$$

Kérdés: Mi emeli ki a többi közül a $\|\ \|_2$ euklideszi normát (vagy inkább a *skalárszorzatból* származó normákat) a többiek közül? Bizonyítás nélkül egy mélyebb ok: *a maximális szimmetriájuk.* Nevezetesen, ha ν egy norma $\mathbb{R}^N$-en és nincs olyan ν' norma, amelyikre $\{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) :\ \nu \circ L = \nu\} \subsetneq \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) :\ \nu' \circ L = \nu'\}$, akkor ν egy skalárszorzatból származó $\big(\nu(x) = \langle x, x\rangle^{1/2}$ alakú$\big)$ norma.

Konvexitás, Hahn–Banach tétel

Definíció. Egy V vektortérben egy K alakzat *konvex*, ha

$$\alpha x + \beta y \in K \qquad (\alpha, \beta \ge 0,\ \alpha + \beta = 1,\ x, y \in K).$$

Egy $f : K \to \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha a K értelmezési tartománya egy vektortér konvex részhalmaza és

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad (\alpha, \beta \ge 0,\ \alpha + \beta = 1,\ x, y \in K).$$

Lemma. *Legyen V vektortér, $p : V \to \mathbb{R}$ egy konvex függvény, L pedig V-nek egy altere. Tegyük fel, hogy $\phi : L \to \mathbb{R}$ egy lineáris funkcionál, amelyre $\phi \le p|L$, és e egy L-en kívüli vektor V-ben. Ekkor létezik ϕ-nek olyan $\widetilde{\phi}$ kiterjesztése az $\widetilde{L} := L + \mathbb{R}\cdot e$ altérre, amelyre továbbra is $\widetilde{\phi} \le p|\widetilde{L}$.*

Bizonyítás. Mivel az $\widetilde{L}$ altér elemei egyértelműen írhatók $\alpha e + v$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ v \in L)$ alakba, mindegyik $\lambda \in \mathbb{R}$ számhoz van pontosan egy olyan $\phi_\lambda : \widetilde{L} \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése ϕ-nek, amelyikre $\phi_\lambda(e) = \lambda$. Nevezetesen

$$\phi_\lambda :\ \alpha e + v \mapsto \alpha\lambda + \phi(v) \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ v \in V)\ .$$

Kérdés: $\exists ? \lambda \quad \phi_\lambda \le p$. Vegyük észre, hogy $\phi_\lambda \le p$ jelentése

$$\alpha\lambda + \phi(v) \le p(\alpha e + v) \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ v \in L)$$
$$\begin{cases} \lambda \le \alpha^{-1}\big[p(\alpha e + v) - \phi(v)\big] & (\alpha > 0) \\ -\lambda \le |\alpha|^{-1}\big[p(-|\alpha| e + v) - \phi(v)\big] & (\alpha < 0) \end{cases}$$
$$\sup_{\substack{\alpha_1 > 0 \\ v_1 \in L}} \frac{1}{\alpha_1}\big[\phi(v_1) - p(-\alpha_1 e + v_1)\big] \le \lambda \le \inf_{\substack{\alpha_2 > 0 \\ v_2 \in L}} \frac{1}{\alpha_2}\big[p(\alpha_2 e + v_1) - \phi(v_2)\big]\ .$$

A valós számok Dedekind axiómája szerint ilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor létezik, ha minden $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $v_1, v_2 \in L$-re

$$\frac{1}{\alpha_1}\big[\phi(v_1) - p(-\alpha_1 e + v_1)\big] \le \frac{1}{\alpha_2}\big[p(\alpha_2 e + v_1) - \phi(v_2)\big]$$
$$\frac{1}{\alpha_1}\phi(v_1) + \frac{1}{\alpha_2}\phi(v_2) \le \frac{1}{\alpha_1} p(v_1 - \alpha_1 e) + \frac{1}{\alpha_2} p(v_2 + \alpha_2 e) \qquad \Big| : \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}$$
$$\phi(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \le \beta_1 p(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2 p(v_2 + \alpha_2 e) \ \text{ ahol } \beta_k := \frac{1/\alpha_k}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}\ .$$

Az utolsó állítás azonban következik a p függvény konvexitásából: Mivel $\beta_1 + \beta_2 = 1$ és $\alpha_k \beta_k = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \phi(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &\le p(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = p\big(\beta_1(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2(v_2 + \alpha_2 e)\big) \\ &\le \beta_1 p(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2 p(v_2 + \alpha_2 e)\ , \end{aligned}$$

ami bizonyítja a lemmát.

Tétel. (Hahn–Banach). *Ha V egy vektortér, $p : V \to \mathbb{R}$ egy konvex függvény, V_0 altere V-nek és $\phi_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ egy lineáris funkcionál, melyre $\phi_0 \le p$, akkor ϕ_0-nak létezik lineáris p alatt maradó kiterjesztése az egész V-re.*

Bizonyítás. Csak a véges dimenziós esetre végezzük el. (Az általános bizonyítás ennek egy transzfinit változata).

Legyen $\dim(V) = \dim(V_0) + N < \infty$. Ekkor található olyan $\{e_1, \dots, e_N\}$ lineárisan független vektorrendszer, amellyel

$$V = V_0 + \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_N\ .$$

Legyen
$$L_k := V_0 + \sum_{i \le k} \mathbb{R} e_i \qquad (k = 0, \ldots, N) \ .$$

Mivel $L_{k+1} = L_k + \mathbb{R} e_{k+1} = \widetilde{L_k}$ $(k = 0, \ldots, N-1)$, a lemma segítségével egymás után konstruálhatunk $\phi_1 := \widetilde{\phi_0}, \ldots, \phi_N := \widetilde{\phi_{N-1}}$ lineáris kiterjesztéseit a ϕ_0 funkcionálnak az $L_1, \ldots, L_N$ alterekre, amelyek p alatt maradnak. Most a $\phi := \phi_N$ választás megfelel.

Következmény. *Ha $V, \| \ \|$ normált vektortér és $v \in V$, akkor olyan $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ lineáris funkcionál, amelyre $\|\phi\| = 1$ és $\phi(v) = \|v\|$.*

Bizonyítás. A norma konvex függvény. Így a $V_0 := \mathbb{R} v$ altéren a
$$\phi_0 : \lambda v \mapsto \lambda \|v\|$$
lineáris funkcionálra és a $p := \| \ \|$ függvényre alkalmazható a Hahn–Banach tétel. A kapott ϕ kiterjesztés megfelel.

æ

TÖBBVÁLTOZÓS DIFFERENCIÁLÁS

Emlékeztető. Egy $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az $x\in\mathbb{R}$ helyen differenciálható és deriváltja itt $f'(x)=a$, ha létezik olyan $\omega : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely a 0-nál folytonos és
$$f(x+h)=f(x)+ah+\omega(h)|h|\ ,\ \ \omega(0)=0 \qquad (h\in\mathbb{R}).$$

Differenciáhatóság

Propozíció. *Tegyük fel, hogy V_1, V_2 vektorterek,* $\dim V_k<\infty$ *és $\nu_k, \tilde\nu_k$ normák V_k-n $(k=1,2)$. Ekkor a $\mathcal{C}_{(0)}(V_1) := \{\omega(: V_1\to\mathbb{R}) :\ \omega$ folyt. 0-nál, $\omega(0)=0\}$ jelöléssel*
$$\begin{aligned}&\{g(: V_1\to V_2):\ \exists\,\omega\in\mathcal{C}_{(0)}(V_1)\ \ \nu_2(g(h))\le\nu_1(h)\cdot\omega(h)\ \ (h\in V_1)\}\\ =\ &\{g(: V_1\to V_2):\ \exists\,\tilde\omega\in\mathcal{C}_{(0)}(V_1)\ \ \tilde\nu_2(g(h))\le\tilde\nu_1(h)\cdot\tilde\omega(h)\ \ (h\in V_1)\}\ .\end{aligned}$$

Bizonyítás. $\subset$: Tegyük fel, hogy g az első függvénycsaládba tartozik, azaz $\nu_2(g)\le\nu_1\cdot\omega$. Mivel a V_1, V_2 terek véges dimenziósak,

$$\exists\, m, M>0\ \ m\nu_1\le\tilde\nu_1\le M\nu_1\ , \qquad m\nu_2\le\tilde\nu_2\le M\nu_2$$
$$\tilde\nu_2(g)\le M\nu_2(g)\le M\cdot\nu_1\cdot\omega\le M\cdot\frac{1}{m}\tilde\nu_1\cdot\omega\ .$$

Vagyis az $\tilde\omega := (M/m)\omega$ válsztásnál $\tilde\nu_2(g)\le\tilde\nu_1\cdot\tilde\omega$. Tehát g a második függvénycsaládba is beletartozik.

A fordított $\supset$ tartalmazás bizonyítása analóg módon történik.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 vektorterek, $\dim V_k<\infty \quad (k=1,2)$. A 0-nál *első rendben eltűnő* $V_1\to V_2$ függvények osztálya

$$o(V_1,V_2) := \Big\{g(: V_1\to V_2) : \forall\,\nu_1\ V_1\text{-norma},\ \nu_2\ V_2\text{-norma} \quad \exists\,\omega : V_1\to\mathbb{R}\\ \omega\text{ folytonos }0\text{-nál},\quad \omega(0)=0,\ \nu_2(g)\le\omega\nu_1\Big\}\ .$$

A Propozició szerint itt az első $\forall$ kvantor helyett $\exists$ is vehető.

Elnevezés: $o(V_1,V_2)$ neve *kis ordó* $V_1\to V_2$. Tagjait röviden 0-*sima* függvényeknek is mondjuk.

Megjegyzés. $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható x-nél $\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R}\ \ \big[h\mapsto f(x+h)-\big(f(x)+ah\big)\big]\in o(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Észrevétel: A $h\mapsto a\cdot h$ leképezés *lineáris* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek. Az $f : V_1\to V_2$ függvény *differenciálható* x-nél, ha
$$\exists A\in\mathcal{L}(V_1,V_2)\quad [h\mapsto f(x+h)-(f(x)+Ah)]\in o(V_1,V_2).$$

Megjegyzés. A jelölések egyszerűsítése végett ebben a fejezetben az egész téren értelmezett függvényekről fogunk beszélni. Ha egy függvény csak a tér egy részhalmazán van értelmezve, tekintsük helyette pl. a többi helyeken 0-val való kiterjesztettjét. Ha az eredetileg vett függvény egy pont egy egész környezetében definiálva volt, a kiterjesztés nem befolyásolja az ottani differenciálhatósági tulajdonságait. Azaz a differenciálhatóság *lokális* tulajdonság (akár a folytonosság).

A továbbiakban V, V_1, V_2 tetszőlegesen rögzített véges dimenziós vektorterek. Rajtuk a félreértés veszélye nélkül $\| \ \|$-val jelölünk egy-egy (tetszőlegesen rögzített) normát.

Tétel. *A differenciálhatóság maga után vonja a folytonosságot.*

Bizonyítás. Ha $f : V_1 \to V_2$ differenciálható x-nél, akkor alkalmas $f_1 \in o(V_1, V_2)$ függvény és $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ mellett

$$f(z) = f(x) + A(z-x) + \|z-x\| \cdot f_1(z-x) \qquad (z \in V_1).$$

Tudjuk: a norma folytonos, a 0-sima függvények a 0 helyen triviálisan folytonosak és a lineáris leképezések véges dimenziós vektorterek közt mind folytonosak. Így a fenti előállítás szerint f folytonos a z helyen.

Propozíció. *Ha* $f : V_1 \to V_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *és*

$$\big[h \mapsto f(x+h) - (f(x) + A_i h)\big] \in o(V_1, V_2) \qquad (i = 1, 2),$$

akkor $A_1 = A_2$.

Bizonyítás. Észrevétel: Ha $g_1, g_2 \in o(V_1, V_2)$ és $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in o(V_1, V_2)$. Ha tehát $g_i : h \mapsto f(x+h) - (f(x) + A_i h) \quad (i = 1, 2)$, akkor

$$A_1 - A_2 = g_1 - g_2 \in o(V_1, V_2) \ .$$

Vagyis véve egy tetszőleges $\| \ \|$ normákat V_1-en ill. V_2-n, található olyan a 0-nál folytonos ω függvény, melyre $\omega(0) = 0$ és

$$\|(A_1 - A_2)h\| \le \omega(h)\|h\| \qquad (h \in V_1) \ .$$

Legyen $h \neq 0$ rögzített tetszőlegesen. Ekkor

$$\begin{aligned} \|(A_1 - A_2)(\lambda h)\| &\le \omega(\lambda h)\|\lambda h\| \qquad\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ |\lambda| \cdot \|(A_1 - A_2)h\| &\le \omega(\lambda h)|\lambda| \cdot \|h\| \\ \|(A_1 - A_2)h\| &\le \omega(\lambda h)\|h\| \to 0 \qquad (\lambda \downarrow 0) \\ \|(A_1 - A_2)h\| &= 0 \qquad (h \in V_1), \ \Rightarrow \ A_1 - A_2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Definíció. $f : V_1 \to V_2$ *deriváltja* x-nél

$$f'(x) := \Big[A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) : \ [h \mapsto f(x+h) - f(x) - Ah] \in o(V_1, V_2)\Big] \ .$$

Az előző propozíció biztosítja a derivált unicitását.

Tétel. 1) *Ha* f_k *differenciálható* x*-nél* $(k = 1, 2)$, *akkor*

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)'(x) = \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

2) *Ha* g *differenciálható* x*-nél és* f *differenciálható* $g(x)$*-nél, akkor*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Bizonyítás. 1) Triviális. 2) Legyen

$$B := g'(x) \ , \quad A := f'(g(x)) \quad \text{ahol} \quad g : V_1 \to V_2 \ , \ \ f : V_2 \to V_3$$

(véges dimenziós vektorterek között). Ekkor találhatók $g_1 : V_1 \to V_2$, $f_1 : V_2 \to V_3$ függvények, amelyekkel

$$\begin{aligned} g(x+h) &= g(x) + Bh + \|h\| \cdot g_1(h) \qquad g_1(h) \to 0 \ (h \to 0) \\ f(g(x)+k) &= f(x) + Ak + \|k\| \cdot f_1(k) \qquad f_1(k) \to 0 \ (k \to 0) \ . \end{aligned}$$

Most a $k(h) := g(x+h) - g(x) = Bh + \|h\| g_1(h)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
f\big(g(x+h)\big) &= f\big(g(x)+k(h)\big) = f\big(g(x)\big) + Ak(h) + \|k(h)\| \cdot f_1\big(k(h)\big) \\
&= f\big(g(x)\big) + A\big[Bh + \|h\| \cdot g_1(h)\big] + \big\|Bh + \|h\| g_1(h)\big\| \cdot f_1\big(k(h)\big) \\
&= f\big(g(x)\big) + ABh + \|h\| \cdot \Big[\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{g_1(h)} + \big\| \underbrace{\underbrace{B\frac{h}{\|h\|}}_{\le \|B\|}}_{KORL} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{g_1(h)} \big\| \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{f_1\big(k(h)\big)}\Big]
\end{aligned}$$

mivel a g függvény x-beli folytonossága miatt $k(h) \to 0 \quad (h \to 0)$.

Irány szerinti derivált

Definíció. Legyen $f : V_1 \to V_2$ (két véges dimenziós vektortér között), és $x, v \in V_1$. Az f függvény *deriváltja v irányában* x-nél

$$f'_v(x) := \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \tau \neq 0}} \frac{1}{\tau}\big[f(x+\tau v) - f(x)\big] \ .$$

Lemma. $f'_{\lambda v} = \lambda f'_v \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Bizonyítás. A $\lambda = 0$ eset triviális. Ha $\lambda \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\lim_{0 \neq \tau \to 0} \frac{1}{\tau}\big[f(x+\lambda\tau v) - f(x)\big] &= \lambda \lim_{0 \neq \lambda\tau \to 0} \frac{1}{\lambda\tau}\big[f(x+\lambda\tau v) - f(x)\big] \\
&= \lim_{0 \neq \theta \to 0} \frac{1}{\theta}\big[f(x+\theta v) - f(x)\big]
\end{aligned}$$

abban az értelemben, hogy az összes limesek *egyszerre* léteznek.

Megjegyzés. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetben f hagyományos deriváltja $f'_{(1)}$.
Vektortérben nincs olyan kitüntetett elem, mint az 1.
Az f'_v derivált független a normák választásától.

Propozíció. *Ha $f : V_1 \to V_1$ differenciálható x-nél, akkor*
$f'_v(x) = f'(x)v \qquad (v \in V_1)$.

Bizonyítás. $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \|h\|\omega(h)$ írható ahol $\omega(h) \to 0 = \omega(0) \ (h \to 0)$.
Innen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\big[f(x)+\tau v) - f(x)\big] &= \frac{1}{\tau} f'(x)(\tau v) + \frac{1}{\tau}\|\tau v\| \cdot \omega(\tau v) \\
&= f'(x)v + \underbrace{\mathrm{sgn}\tau}_{\mathrm{KORL}} \cdot \|v\| \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\omega(\tau v)} \to f'(x)v + 0 \quad (\tau \to 0) \ .
\end{aligned}$$

Következmény. *Ha f' folytonos egy G halmazon, akkor $f'v$ is folytonos G-n minden rögzített $\in V_1$-re, sőt $(x,v) \mapsto f'(x)v$ is folytonos $G \times V_1$-en.*

Lagrange középérték skalár függvényre

Tétel. *Ha* $f : V \to \mathbb{R}$, *továbbá* $x, v \in V$ *és* f'_v *létezik az* $x + [0, \tau]v$ *szakasz fölött, akkor*

$$\exists \vartheta \in (0, \tau) \qquad (f(x + \tau v) - f(x) = f'_v(x + \vartheta v) \cdot \tau\,.$$

Bizonyítás. A $\varphi : \xi \mapsto f(x + \xi v)$ metszete az f függvénynek $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú. Mivel $\varphi(0) = f(x)$ és $\varphi(\tau) = f(x + \tau v)$, a Lagrange középérték tétel szerint

$$\begin{aligned} f(x+\tau v) - f(x) &= \varphi(\tau) - \varphi(0) = \underset{\nwarrow \text{hagyományos derivált}}{\varphi'_{(1)}}(\vartheta)\tau = \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\big[\varphi(\vartheta + \delta) - \varphi(\vartheta)\big] = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\big[f(x + (\vartheta + \delta)v) - f(x + \vartheta v)\big]\tau \\ &= f'_v(x + \vartheta v)\tau\ . \end{aligned}$$

Következmény. *Ha az* $f : V \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $[a, b] := a + [0, 1](b-a)$ *szakasz** *minden pontjánál, akkor*

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b - a) \qquad \exists\, z \in [a, b]\,.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a tételt $x := a$, $v := b - a$ és $\tau := 1$ mellett. Erre

$$f(b) - f(a) = f'_{b-a}(\underbrace{x + \vartheta v}_{z \in [a,b]} v) \cdot 1 = f'(z)v = f'(z)(b - a)\ .$$

Tétel. (Lagrange). *Legyen* $f : V \to \mathbb{R}$, *továbbá* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *bázis* $\subset V$ *és* $a \in V$. *Tegyük fel, hogy* $f'_{e_1}, \ldots, f'_{e_n}$, *folytonosak* a *körül (egy* a*-környezeten). Ekkor* f *differenciálható* a*-nál és*

$$f'(a)e_k = f'_{e_k}(a) \qquad (k = 1, \ldots, n)\ .$$

Bizonyítás. Legyen a $h \in V$ vektorok bázis-felbontása

$$h = \tau_1(h) \cdot e_1 + \ldots + \tau_n(h)e_n$$

(azaz $\tau_k(h) := e_k^*(h)$ a duális bázissal), és vezessük be az

$$a_k(h) := a + \tau_1(h)e_1 + \ldots + \tau_k(h)e_k \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

jelöléseket. Most

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{k=1} \big[f\big(a_k(h)\big) - f\big(a_{k-1}(h)\big)\big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f'_{e_k}\big(z_k(h)\big)\tau_k(h) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f'_{e_k}(a)\tau_k(h) + \sum_{k=1}^{n} \big[f'_{e_k}\big(\underbrace{z_k(h)}_{\downarrow a \quad (h \to 0)}\big) - f'_{e_k}(a)\big] \underbrace{\tau_k(h)}_{|\ |\le M\cdot\|h\|}\ . \end{aligned}$$

---

* Nem tévesztendő össze az $\mathbb{R}^n$ természetes topológiája c. alfejezetben hasonlóan jelölt tégla-intervallummal.

Mivel $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bázis$\subset V$, az

$$A:\delta_1 e_1+\ldots+\delta_n e_n \mapsto \sum_{k=1}^n f'_{e_k}(a)\cdot\delta_k$$

lineáris operátor jól-definiált, és

$$Ah=A(\tau_1(h)e_1+\ldots+\tau_n(h)e_n)=\sum_{k=1}^n f'_{e_k}(a)\tau_k(h) \qquad (h\in V)\ .$$

A $h\mapsto\tau_k(h)$ $(k=1,\ldots,n)$ funkcionálok mind lineárisak a véges dimenziós V fölött, és így található $M>0$ úgy, hogy

$$|\tau_k(h)|\le M\cdot\|h\| \qquad (k=1,\ldots,n \quad h\in V)\ .$$

Vagyis

$$f(a+h)=f(a)+Ah+\textstyle\sum_{k=1}^n\big[f'_{e_k}\big(z_k(h)\big)-f'e_k(a)\big]\tau_k(h)$$

írható, ahol a maradéktag $o(V,\mathbb{R})$-be tartozik, mert

$$\Big\|\sum_{k=1}^n\big[f'_{e_k}\big(z_k(h)\big)-f'_{e_k}(a)\big]\tau_k(h)\Big\|\le\sum_{k=1}^n\Big|f'_e\big(\underbrace{z_k(h)}_{\downarrow a}\big)\underset{(h\to 0)}{-}f'_{e_k}(a)\Big|\cdot M\cdot\|h\| \qquad (v\in V)\ .$$

Többdimenziós következmények

Következmény. *Ha* $f:V_1\to V_2$, $\quad a\in V_1$ *és* $\{e_1,\ldots,e_n\}$ *bázis*$\subset V_1$, *az* f'_{e_k} *deriváltak pedig folytonosak* a*-nál* $(k=1,\ldots,n)$, *akkor* f *differenciálható* a*-nál és* $f'(a)e_k=f'_{e_k}(a)$ $(k=1,\ldots,n)$.

Bizonyítás. Vegyünk fel egy $\{u_1,\ldots,u_m\}$ bázist V_2-ben. Ezzel komponensekre bonthatjuk az f függvényt

$$f=f_1\cdot u_1+\ldots+f_m\cdot u_m \qquad f_i:V_1\to\mathbb{R} \qquad (i=1,\ldots,m)\ .$$

Észrevétel: $f'_{e_k}=(f_1)'_{e_k}\cdot u_1+\ldots+(f_m)'_{e_k}\cdot u_n$. Lagrange tétele alapján

$$f(a+h)=\sum_{i=1}^m\big[f_i(a)+A_ih+\|h\|\cdot\omega_i(h)\big]u_i=f(a)+Ah+\|h\|\omega(h)$$

írható valamely $\omega_1,\ldots,\omega_n\in o(V_1,\mathbb{R})$ és az $\omega:=\sum_{i=1}^m\omega_i\cdot u_i\in o(V_1,V_2)$ függvényekkel.

Következmény. *Ha* $f:V_1\to V_2$ *és* G *nyitott*$\subset V_1$, *akkor ekvivalensek:*
1) f' *folytonos* G*-n*
2) f'_v *folytonos* G*-n minden* $v\in V_1$ *irányban*
3) $\exists\{e_1,\ldots,e_n\}$ *bázis*$\subset V_1$ $\quad f'_{e_1},\ldots,f'_{e_n}$ *folytonosak* G*-n.*

Lemma. *Legyen* $f_1,f_2,\ldots:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvények egy sorozata. Tegyük fel, hogy egy* $f,g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *függvénypárral*

$$f_n\rightrightarrows f \quad \text{és} \quad f'_n\rightrightarrows g \quad (n\to\infty)\,.$$

Ekkor az f *limesfüggvény folytonosan differenciálható és* $f'=g$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma \in (\alpha,\beta)$ tetszőlegesen rögzítve. Tudjuk: folytonos függvények egyenletes limese folytonos. Vagyis az f, g függvények folytonosak. Másrészt korlátos zárt intervallumon az integrálás és az egyenletes limes felcserélhetők. A Newton–Leibniz formula szerint így

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) - f_n(\gamma) = & \int_\gamma^x f_n' & \\ \downarrow & \downarrow & (n \to \infty)\ . \\ f(x) - f(\gamma) & \int_\gamma^x g & \end{array}$$

A Newton-Leibniz tétel azt is mutatja itt, hogy az $x \mapsto \int_\gamma^x g$ függvény differenciálható és ${}^{d}/_{dx} \int_\gamma^x g = g(x)$. Vagyis $x \mapsto f(x) - f(\gamma)$ differenciálható (α,β) fölött és $f' = [f - f(\gamma)]' = g$.

Tétel. *Tegyük fel, hogy V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, G nyitott$\subset V_1$ és $f, f_1, f_2, \ldots : G \to V_2$ folytonosan differenciálhatók, továbbá*

$$f_1, f_2, \ldots \rightrightarrows f\ , \qquad f_1', f_2', \ldots \rightrightarrows A\Big(: G \ni x \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\Big)\ .$$

Ekkor az f limesfüggvény folytonosan differenciálható és $f' = A$.

Bizonyítás. Írjunk $A_n := f_n'(: G \to \mathcal{L}(V_1, V_2))$-t. Mivel $A_1, A_2, \ldots$ folyt. $\rightrightarrows A$, az A limesfüggvény folytonos $G \to \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Másrészt

$$f_v'(x) = A_n(x)v \qquad (x \in G,\ v \in V_1)\ .$$

Tehát mivel minden rögzített $v \in V_1$ mellett az $x \mapsto A(x)v$ függvény folytonos, *elég belátni, hogy f_v' létezik és $f_v'(x) = A(x)v$ $(x \in G,\ v \in V_1)$.*

Legyenek $x \in G$, $v \in V_1$ tetszőlegesen rögzítve. Tekinsük a

$$\varphi_n : \tau \mapsto f_n(x + \tau v)\ , \qquad \varphi : \tau \mapsto f(x + \tau v)$$

metszet-függvényeket. Mivel $f_n \rightrightarrows f$, fennáll $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ $(n \to \infty)$. Feltevés szerint az f_n függvények differenciálhatók, innen az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\varphi_n'(\tau) = f_n'(x + \tau v)v = A_n(x + \tau v)v \qquad (n = 1, 2, \ldots)\ .$$

Tekintve, hogy $A_n \rightrightarrows A$, a $\psi : \tau \mapsto A(x + \tau v)v$ függvényre $\varphi_n \rightrightarrows \psi$ $(n \to \infty)$. A lemma alapján a φ limesfüggvény differenciálható és $\varphi' = \psi$. Tehát

$$A(x)v = \psi(0) = \varphi'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\big[f(x + \tau v) - f(x)\big] = f_v'(x)$$

jól-definiált.

Kontrakciós lemma

Lemma. *Legyen $f : V_1 \to V_2$ és K konvex$\subset V_1$. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható a K halmaz összes pontjánál és $\|f'\|\Big|K \leq \alpha$. Ekkor az f leképezés a K halmazon α-kontrakció.**

* Itt $\|f'\|\big|K := \sup_{x \in K} \|f'(x)\| = \sup_{x \in K} \sup_{v \in V_1} \|f'(x)v\| / \|v\|$ és a távolságokat a V_1 ill. V_2 tereken a vett $\|\ \|$ normák szerint kell venni.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in K$ tetszőleges. A Hahn–Banach tétel szerint vehetünk egy olyan $\phi \in V_2^*$ $(:= \mathcal{L}(V_2, \mathrm{I\!R})$ lineáris funkcionált, amelyre

$$\|\phi\| = 1 \quad \text{és} \quad \|f(x) - f(y)\| = \phi\big(f(x) - f(y)\big) \ .$$

Most a

$$\varphi : v \mapsto \phi(f(v) \ , \quad V_1 \to \mathrm{I\!R}$$

függvényre az összetett függvények differenciálási szabálya szerint

$$\varphi'(v) = \psi(f'(v)) \qquad (v \in K) \ .$$

Láttuk: $\exists\, z \in [x, y] \quad \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(z)(x - y)$. Ezzel a $z \in K$ ponttal

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \phi\big(f(x) - f(y)\big) = \varphi'(z)(x - y) \\ &= \phi\big(f'(z)\big)(x - y) \\ &\le \big\|\phi\big(f'(z)\big)\big\| \cdot \|x - y\| \le \alpha\|x - y\| \ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha speciális normákat használunk csak, akkor a Hahn–Banach tétel alkalmazása kikerülhető. Ha pl. $V_2 := \mathrm{I\!R}^M$ az eukideszi $\|\ \|_2$ normával, akkor a $\phi(v) := \big[\sum_{k=1}^M (f(x_k) - f(y_k))^2\big]^{-1/2} \sum_{k=1}^M (f(x_k) - f(y_k)) v_k$ funkcionál (és valójában csak ez) megfelelő.

Egy másik lehetöség a Hahn-Banach tétel megkerülésére a legrövidebb út elvének azon általánosítása, hogy

$$\|c(\beta) - c(\alpha)\| \le \int_\alpha^\beta \|c'(\tau)\| d\tau$$

valahányszor $\alpha, \beta \in \mathrm{I\!R}$ és $c : [\alpha, \beta] \to \mathcal{V}_2$ egy folytonosan differenciálható görbe.

Implicit függvény tétel

Tétel. *Legyenek X, Y, Z véges dimenziós vektorterek, $F : X \times Y \to Z$ és $(a, b) \in X \times Y$. Tegyük fel, hogy F' folyt (a, b) körül, $F(a, b) = 0$ és*

$$F'(a, b) : (x, y) \mapsto Ax + By \qquad B : Y \leftrightarrow Z$$

az $F'(a, b) \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ operátor $A \in \mathcal{L}(X, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ komponenseire (azaz B 1-1-leképezés és $B(Y) = Z$). Ekkor

$$\exists\, U \ a\text{-környezet} \subset X, \ V \ b\text{-környezet} \subset Y \ \exists\, g \in \mathcal{C}(U, Z)$$

$$\{(x, y) \in U \times V : \ F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : \ x \in U\} .$$

Bizonyítás. Vehető $a = 0, b = 0$ [F helyett $(x, y) \mapsto F(x + a, y + b)$-re áttérve]. Most

$$F(x, y) = Ax + By + H(x, y) \qquad H'(x, y) \to 0 \qquad \big((x, y) \to (0, 0)\big)$$

írható a $H(x, y) := F(x, y) - [Ax + By]$ perturbációval. Tehát

$$(*) \quad F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, y) \qquad \text{FIXPONT EGYENLET.}$$

Rögzítsünk az X, Y, Z tereken egy-egy egyszerűen $\|\ \|$-val jelölt normát. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ értéket úgy, hogy

$$\|B^{-1}H'(x,y)\| \le \frac{1}{2} \qquad (\|x\|,\|y\| \le \varepsilon)$$

legyen. Ez megtehető, mivel $\lim_{(x,y)\to 0} H'(x,y) = 0$ és mivel B^{-1} mint lineáris operátor véges dimenziós téren automatikusan folytonos. Tudjuk, hogy a

$$K := \{(x,y) \in X \times Y : \|x\|,\|y\| \le \varepsilon\}$$

zárt gömb $X \times Y$-ban (a $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|,\|y\|\}$ norma szerint) konvex (sőt kompakt is, de ezt nem kell kihasználnunk). A kontrakciós lemma alapján

$$\|B^{-1}H(x_1,y_1) - B^{-1}H(x_2,y_2)\| \le \frac{1}{2}\max\{\|x_1-x_2\|,\|y_1,y_2\|\}$$

valahányszor $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in K$. Válasszunk egy $\delta > 0$ értéket úgy, hogy

$$\|B^{-1}Ax\| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \big(\|x\| \le \delta\big)\ , \qquad \delta \le \varepsilon$$

legyen. A lineáris leképezések folytonossága miatt ez is megtehető. Legyen

$$U := \{x \in X : \|x\| < \delta\}\ , \qquad V := \{y \in Y : \|y\| \le \varepsilon\}\ .$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned} &T_x : V \ni y \mapsto -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x,y) \qquad (x \in U) \\ &T : \mathcal{C}(U,Z) \ni g \mapsto [x \mapsto -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x,g(x))] \end{aligned}$$

leképezéseket. Állítás:

$$T_x : V \to V \ \ \tfrac{1}{2}\text{-kontrakció} \qquad (x \in U)\ .$$

Bizonyítás: Legyen $x \in U$ tetszőlegesen rögzítve. Ha $y \in V$,

$$\|T_x(y)\| \le \|b^{-1}Ax\| + \|B^{-1}H(x,y)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \|B^{-1}H(x,y)\|\ .$$

Mivel $H(0,0) = 0$,

$$\|B^{-1}H(x,y)\| = \|B^{-1}\ H(x,y) - B^{-1}H(0,0)\| \le \frac{1}{2}\max\{\|x\|,\|y\|\} \le \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

ahonnan

$$\|T_x(y)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \ , \Rightarrow \ \ T_x(y) \in V\ .$$

Ha pedig $y_1, y_2 \in V$, akkor

$$\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| = \|B^{-1}H(x,y_2) - B^{-1}H(x,y_1)\| \le \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|\ .$$

Az imént bizonyított állításból azonnal következik, hogy

$$T : \mathcal{K} \to \mathcal{K} \ \ \tfrac{1}{2}\text{-kontrakció} \quad \text{ahol} \qquad \mathcal{K} := \{g \in C(U,Z) : \sup\|g\| \le \varepsilon\}$$

és a távolság $\mathcal{K}$-n a Z-beli norma szerinti egyenletes konvergencia d_Z^U metrikája.* A $\mathcal{K}$ alazat a $\mathcal{C}(U,Z), d_Z^U$ teljes metrikus tér egy zárt gömbje. Így a $\mathcal{K}$, $d_Z^U|\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ metrikus tér teljes. Tehát alkalmazható a kontrakciós fixpont tétel a $T|\mathcal{K}$ 1/2-kontrakcióra. Innen

1) $\exists!\, y \in V \quad T_x(y) = y \qquad (x \in V)$,
2) $\exists!\, g \in \mathcal{K} \quad T(g) = g$.

A $(*)$ fixpont egyenlet alapján $(x,y) \in U \times V$-re

$$F(x,y) = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ T_x(y) \ \overset{2)}{\Leftrightarrow} \ \ y = g(x)\ .$$

* Azaz $d_Z^U(f,g) := \sup\|f-g\| = \sup_{x\in U}\|f(x)-g(x)\|$.

Következmény. 1) *A tételbeli* $g : U \to V$ *függvény folytonosan differenciálható,* 2) $g'(a) = -B^{-1}A$ *áll a deriváltjára.*

Bizonyítás. 2) Vehető $a = 0,\ b = 0$, mint a tétel bizonyítása során. Most $g(0) = g(a) = b = 0$, és a bizonyítás jelöléseivel

$$\begin{aligned} g(x) &= T_x(g(x)) = -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, g(x)) \\ g(x) - [g(0) + B^{-1}Ax] &= -B^{-1}H(x, g(x)) \ . \end{aligned}$$

Belátandó: $\big\{$Az utóbbi egyenlet bal oldala$\big\} / \|x\| \to 0 \quad (x \to 0)$.

Tudjuk: $B^{-1}H'(x, y) \to 0 \qquad \big((x, y) \to (0, 0)\big)$, azaz

$\exists\, \omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 0-ban folytonos, $\omega(0) = 0$, $\|B^{-1}H'(x, y)\| \le \omega(\varepsilon) \quad (\|x\|, \|y\| \le \varepsilon)$.

A kontrakciós lemmát a $\quad K_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times Y :\ \|x\|, \|y\| \le \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$ gömbökre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|B^{-1}H(x, g(x)) &= \|B^{-1}H(x, g(x)) - B^{-1}H(0, 0)\| \\ &\le \omega(\varepsilon) \cdot \varepsilon \qquad \big((x, g(x)) \in K_\varepsilon\big) \ . \end{aligned}$$

Vagyis, ha $x \in U$, akkor ($\varepsilon := \max\{\|x\|, \|g(x)\|\}$-val)

$$\begin{aligned} \|B^{-1}H(x, g(x))\| / \|x\| &= \|B^{-1}H(x, y(x)) - B^{-1}H(0, 0)\| / \|x\| \\ &\le \omega\big(\max\{\|x\|, \|g(x)\|\}\big) \cdot \max\{1, \|2B^{-1}A\|\} \to 0 \quad (x \to 0), \end{aligned}$$

mivel $\|g(x)\| \le 2\|B^{-1}Ax\| \quad \big($uis itt $\|g(x) + B^{-1}Ax\| = \|T_x(g(x)) - T_x(0)\| \le \frac{1}{2}\|g(x) - 0\|\big)$.

1) Alkalmazzuk a 2)-beli formulát az (a, b) hely helyett az $U \times V$-be eső $F(x, y) = 0$-t teljesítő pontokra. Írható

$$F'(x, y) : (u, v) \mapsto A(x, y)u + B(x, y)v \ ,$$

ahol az $A : U \times V \to \mathcal{L}(X, Z)$ ill. $B : U \times V \to \mathcal{L}(Y, Z)$ leképezések folytonosak. Tehát 2)-be (a, b) helyett $(x, g(x))$-et téve

$$g'(x) = -B^{-1}(x, g(x))A(x, g(x)) \qquad (x \in U) \ ,$$

ami x-ben folytonos.

Tétel. (Inverz függvény tétel). *Ha* $f : Y \to X$, f' *folytonos* $a \in Y$ *körül és* $f'(a) : Y \leftrightarrow X$, *akkor*

$$\exists\, G\ f(a)\text{-környezet}\ \exists\, g \in \mathcal{C}(G, Y) \qquad f(g) = \mathrm{id}_G \, .$$

Bizonyítás. Az $F(x, y) := x - f(y)$ leképezésre kell csak alkalmaznunk az implicit függvény tételt.

Magasabb rendű deriváltak

Megjegyzés. Tekintsünk egy $f : V \to Z \quad \infty$-szer differenciálható függvényt (továbbra is, V, Z véges dimenziós vektorterek). Ekkor

$$\begin{aligned} &f' : V \to \mathcal{L}(V, Z) \ , \ f'' : V \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, Z)), \ f^{(3)} : V \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, Z))) \ , \ldots \\ &f^{(n)} : V \to \underbrace{\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \ldots, \mathcal{L}(V}_{n-\text{szer}}, Z) \cdots)) \ , \ \ldots \ . \end{aligned}$$

Mint várható, valójában ennél sokkal szimmetrikusabb leírás is adható a magasabb rendű deriváltakra.

Lemma. *Ha* $f : V \to Z$ *és* f' *differenciálható* a *-nál, akkor*

$$\underbrace{f''(a)(v_1)}_{\in \mathcal{L}(V,Z)}(v_2) = f'_{v_2}{}'_{v_1}(a) \qquad (v_1, v_2 \in V)\ .$$

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzített $v_1, v_2 \in V$-re

$$f''(a)v_1 = \left[f'\right]'_{v_1}(a) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[f'(a+\tau v_1) - f'(a)\right]\ ,$$

$$f''(a)(v_1)v_2 = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[f'(a+\tau v_1) - f'(a)\right]v_2 = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[f'_{v_2}(a+\tau v_1) - f'_{v_2}(a)\right] =$$
$$= \left[f'_{v_2}\right]'_{v_1}(a)\ .$$

Következmény. $f^{(n)}(a)(v_1)\cdots(v_n) = f'_{v_n}{}'_{v_{n-1}}{\overset{\cdots}{\cdots}}{}'_{v_1}(a)$, *ha az* f *függvény* n*-szer differenciálható* a*-nál.*

A $\mathcal{C}^n(G,Z)$ függvényosztályok

Definíció. Ha V, Z véges dimenziós vektorterek és G nyitott$\subset V$, akkor

$$\mathcal{C}^n(G,Z) := \left\{f(: G \to Z) :\ f^{(n)}\ \exists \text{ és folyt. } G \text{ fölött}\right\}$$

az n*-szer folytonosan differenciálható* függvények osztálya.

Propozíció. *Ha* G *nyitott*$\subset V$, $f : G \to Z$ *és* $\{e_1, \dots, e_N\}$ *bázis*$\subset V$, *akkor ekvivalensek:*

1) $f \in \mathcal{C}^n(G,Z)$,
2) $f'_{v_1}{\overset{\cdots}{\dots}}{}'_{v_n} \in \mathcal{C}(G,Z) \qquad \forall v_1, \dots v_n \in V$,
3) $f'_{e_{i_1}}{\overset{\cdots}{\dots}}{}'_{e_{i_n}} \in \mathcal{C}(G,Z) \qquad \forall (i_1, \dots i_n) \in \{1, \dots, N\}^n$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Legyen $v_1, \dots, v_n$ tetszőlegesen rögzítve. Mivel $f \in \mathcal{C}(G,Z)$, az $x \mapsto f^{(n)}(x)(v_n)\cdots(v_1) = f'_{v_1}{\overset{\cdots}{\dots}}{}'_{v_n}$ függvény folytonos $G \to Z$.
2) $\Rightarrow$ 3) triviális.
3) $\Rightarrow$ 1) közvetlenül következik Lagrange tételéből n szerinti indukcióval.

Schwarz tétele

Definíció. Legyenek V, Z vektorterek (itt nem is szükséges véges dimenziósnak lenniök), $v \in V$ és $f : V \to Z$. Az f függvény v*-differenciája* a

$$\triangle_v f : x \mapsto f(x+v) - f(x)$$

függvény. A Δ_v függvénytranszformáció neve: v*-differenciaoperátor.*

Megjegyzés. $f'_v = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \triangle_{\tau v} f$.

Alapvető jelentőségű a differenciaoperátorok *felcserélhetőség*e:

Lemma. *Ha* $f : V \to Z$ *és* $u, v \in V$, *akkor* $\triangle_u \triangle_v f = \triangle_v \triangle_u f$.

Bizonyítás. A $g := \triangle_v f$ függvénnyel $g(y) = f(y+v) - f(y)$ és

$\triangle_u\triangle_v f(x) = \triangle_u g(x) = g(x+u)-g(x) = f(x+u+v)-f(x+u)-f(x+v)+f(x)$.
Az $u \leftrightarrow v$ cserére itt a jobb oldal ugyanaz marad.

Következmény. *Ha $x \in V$ és az $f'_v(x)$, $f'_v(x+u)$ deriváltak léteznek, akkor*

$$\triangle_u(f'_v)(x) = (\triangle_u f)'_v(x)$$

Bizonyítás. $\triangle_u(f'_v)(x) = f'_v(x+u) - f'_v(x)$
$= \big[y \mapsto f(y+u) - f(y)\big]'_v(x) = (\triangle_u f)'_v(x)$.

Lemma. *Legyen $f : V \to \mathbb{R}$ egy skalár értékű függvény, $u, v \in V$ és G nyitott$\subset V$. Tegyük fel, hogy $x + [0,u] + [0,v] \subset G$ és $f \in \mathcal{C}^2(G, \mathbb{R})$. Ekkor*

$$\exists\, z \in x + [0,u] + [0,v] \qquad \triangle_u\triangle_v f(x) = f''_{uv}(z)\,.$$

Bizonyítás. Legyen megint $g := \triangle_v f$. A Lagrange középérték tétel szerint

$$\begin{aligned}\triangle_u\triangle_v f(x) &= g(x+u) - g(x)\\ &= g'_u(y) \qquad \exists\, y \in [x, x+u]\ .\end{aligned}$$

Ezzel az y ponttal

$$\begin{aligned}\triangle_u\triangle_v f(x) = g'_u(y) &= \big(\triangle_v f\big)'_u(y) = \triangle_v\big(f'_u\big)(y)\\ &= f'_u(y+v) - f'_u(y) = f''_{uv}(z) \qquad \exists\, z \in [y, y+v]\ .\end{aligned}$$

Tétel. (Schwarz). *Ha $f \in \mathcal{C}^2(G, Z)$, akkor $f''_{uv} = f''_{vu}$* $\qquad (u, v \in V)$.

Bizonyítás. Előállítjuk a 2-szeres irány szerinti deriváltat második differenciák limeseként. Legyenek $x \in G$, $u, v \in V$ adottak, és legyen $\phi \in Z^*$ egy tetszőlegesen rögzített lineáris funkcionál a Z vektortéren. Most

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau^2}\triangle_{\tau u}\triangle_{\tau v}\phi f(x) &= \frac{1}{\tau^2}\phi f'{}'_{\tau u \tau v}(x) \qquad \exists\, z_{\tau u, \tau v} \in x + [0, \tau u] + [0, \tau v]\\ &= \phi f''_{uv}(\underbrace{z_{\tau u,\tau v}}_{\downarrow x}) \to \phi f''_{uv}(x) \qquad (\tau \downarrow 0)\ .\end{aligned}$$

Az $u \leftrightarrow v$ cserével ugyanígy $\phi f''_{vu}(x) = \lim_{\tau\downarrow 0} \frac{1}{\tau^2}\triangle_{\tau v}\triangle_{\tau u}\phi f(x)$. Mivel a $\triangle_{\tau u}$ és $\triangle_{\tau u}$ operátorok felcserélhetők, innen

$$\phi f''_{vu}(x) = \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau^2}\triangle_{\tau v}\triangle_{\tau u}\phi f(x) = \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau^2}\triangle_{\tau u}\triangle_{\tau v}\phi f(x) = \phi f''_{uv}(x)\ .$$

A tétel állítása azonnal következik a $\psi \in Z^*$ funkcionál tetszőlegessége miatt.

Következmény. *Ha $f \in \mathcal{C}^n(G, Z)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ akkor az $\{1, \ldots, n\}$ indexhalmaz tetszőleges π permutációjára*

$$f'{}^{\cdots}{}'_{v_{\pi(1)}\ldots v_{\pi(n)}} = f'{}^{\cdots}{}'_{v_1\ldots v_n}\ .$$

Taylor formula

Lemma. *Ha $f : V_1 \to V_2$ és $x, v \in V_1$, akkor a $\varphi : \tau \mapsto f(x + \tau v)$ egyváltozós függvényre (ha az n-szer deriválható)* $d^n/d\tau^n\, \varphi(\tau) = f\underbrace{{}'{}^{\cdots}{}'_{v\ldots v}}_{n-szer}(x + \tau v)$.

Bizonyítás. Triviális.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, G nyitott$\subset V_1$. Ekkor egy $f \in \mathcal{C}^n(G, V_2)$ függvény n-ik *derivált tenzor*a az $x \in G$ pontnál az

$$f^{(n)}(x) : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f'^{\,\cdots\,\prime}_{v_1 \ldots v_n}(x)$$

n-lineáris leképezés.

Megjegyzés. Schwarz tételének a következménye szerint az $f^{(n)}(x)$ tenzor *szimmetrikus* n-lineáris leképezés $V_1^n \to V_2$.

Tétel. (Taylor formula). *Legyen V egy véges dimenziós vektortér, G nyitott$\subset V$ és $f \in \mathcal{C}^n(G, \mathbb{R})$. Ha az $[x, x+h]$ szakasz teljes egészében G-ben fekszik, akkor*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\underbrace{h, \ldots, h}_{k-\text{szor}}) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)(h, \ldots, h) \qquad \exists\, z \in [x, x+h] \ .$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\varphi : \tau \mapsto f(x + \tau h)$ segédfüggvényt. Az 1-változós Taylor formulát alkalmazva rá,

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\vartheta) \qquad \exists\, \vartheta \in [0,1] \ .$$

A lemma szerint, az imént talált $\vartheta \in [0,1]$ paraméterrel

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} f\underbrace{{}'^{\,\cdots\,\prime\,\prime}_{h \ldots h h}}_{k-\text{szor}}(x) \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} f\underbrace{{}'^{\,\cdots\,\prime\,\prime}_{h \ldots h h}}_{n-\text{szer}}(x + \vartheta v) \ .$$

Definíció. Ha V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, akkor

$$o_n(V_1, V_2) := \big\{ g :\ V_1 \to V_2 \text{ függvény, } \|g(x)\| / \|x\|^n \to 0 \quad (x \to 0 \big\}$$

az *n-edrendben eltűnő* $V_1 \to V_2$ függvények osztálya, ahol $\|\ \|$: tetszőleges normákat jelöl V_1 ill. V_2 fölött. A definiciónak a normáktól való függetlenségét ugyanúgy bizonyíthatjuk, mint a már a differenciálhatóság megalapozásához bevezetett $n = 1$ esetben.

Tétel. *Ha G nyitott$\subset V_1$, x egy rögzített G-beli pont és $f \in \mathcal{C}^n(G, V_2)$, akkor a*

$$P(h) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\underbrace{h, \ldots, h}_{k-\text{szor}})$$

Taylor polinomra

$$\big[h \mapsto f(x+h) - P(h)\big] \in o_n(V_1, V_2) \ .$$

Bizonyítás. Jelöljön (a félreértés veszélye nélkül) $\|\ \|$ egy-egy tetszőlegesen rögzített normát V_1-en ill. V_2-n. Mindegyik $h \in G - x$ vektorhoz válasszunk egy olyan $\phi_h \in V_2^*(:= \{$ lineáris $V_2 \to \mathbb{R}$ leképezések$\})$ funkcionált, amelyre*

$$\|\phi_h\| = 1 \ , \qquad \langle \phi_h, f(x+h) - P(h) \rangle = \|f(x+h) - P(h)\| \ .$$

A Hahn–Banach tétel grantálja, hogy ez mindig megtehető. A Taylor formula szerint

$$\phi_h f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_h f^{(k)}(x)(h, \ldots, h) \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \phi_h f^{(n)}(z_h)(h \ldots, h) \quad \exists\, z_h \in [x, x+h].$$

---

* Szokásosan $\langle \phi_h, z \rangle := \phi_h(z)$ és $\|\phi_h\| := \sup_{\|z\| \le 1} |\langle \phi_h, z \rangle|$.

A kapott z_h pontokkal

$$\langle \phi_h, f(x+h) - P(h) \rangle = \frac{1}{n!} \langle \phi_h, f^{(n)}(z_h)(h, \ldots, h) - f^{(n)}(x)(h, \ldots, h) \rangle \ .$$

Mivel mindig $\langle \phi_h, z \rangle \leq \|\phi_h\| \cdot \|z\|$, innen

$$\|f(x+h) - P(h)\| \leq \frac{1}{n!} \big\| \big[f^{(n)}(x) \big] (h, \ldots, h) \big\| \ .$$

Vegyünk egy $\{e_1, \ldots e_N\}$ bázist V_1-ben, és legyen ezzel a vektorok felbontása

$$h = \tau_1(h) e_1 + \ldots + \tau_n(h) e_n \qquad (h \in V_1) \ .$$

A derivált tenzor multilinearitása miatt

$$\begin{aligned} &\big[f^{(n)}(z_h) - f^{(n)}(x) \big] (h, \ldots, h) \\ &\qquad = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{N} \big[f'^{\cdots\prime}_{e_{i_1} \ldots e_{i_n}}(z_h) - f'^{\cdots\prime}_{e_{i_1} \ldots e_{i_n}}(x) \big] \tau_{i_1}(h) \ldots \tau_{i_n}(h) \end{aligned}$$

valahányszor $[x, x+h] \subset G$. Tudjuk: a $\tau_1, \ldots, \tau_N$ funkcionálok lineárisak, és így (mivel $\dim(V_1) < \infty$) folytonosak, azaz valamilyen M-re

$$\|\tau_i(h)\| \leq M \cdot \|h\| \ , \qquad (i = 1, \ldots, n \quad h \in V_1) \ .$$

Tehát

$$\|f(x+h) - P(h)\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{N} \underbrace{\big\| f'^{\cdots\prime}_{e_{i_1} \ldots e_{i_n}}(z_h) - f'^{\cdots\prime}_{e_{i_1} \ldots e_{i_n}}(x) \big\|}_{\downarrow 0 \quad (h \to 0)} \cdot M^n \|h\|^n$$

hiszen $z_h \to x \quad (h \to 0)$.

Szélsőérték

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy topologius tér. Az $f : X \to \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma* [*maximuma*] van az $x (\subset X)$ pontnál, ha

$$\exists\, U \ x\text{-környezet} \quad f(x) = \min f(U) \qquad [= \max f(U)] \ .$$

Propozíció. *Tegyük fel, hogy G nyitott halmaz egy V topologikus vektortérben, és az $f \in \mathcal{C}^1(G)$ függvénynek lokális minimuma van a-nál. Ekkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Vegyünk U a-környezetet, ahol $f(a) = \min f(U)$. Tekintsünk egy tetszőleges $v \in V$ vektort. Vegyük észre, hogy a

$$\varphi : \tau \mapsto f(a + \tau v)$$

valós változós függvényhez található olyan I 0-környezet, amelyre

$$u + Iv \subset U \qquad \text{és} \qquad \varphi(0) = \min \varphi(I) \ .$$

Azt, hogy $\varphi'(0) = 0$ már tudjuk (differenciálható 1-változós függvény lokális minimumhelyénél a derivált eltűnik). Innen

$$f'(a) v = f'_v(a) = \varphi'(0) = 0 \ .$$

Tétel. *Legyen G nyitott$\subset V$ egy véges dimenziós V vektortérben, és legyen $f \in \mathcal{C}^2(G)$, továbbá $a \in G$. Tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$ és az $f^{(2)}(a)$ derivált tenzor pozitív definit (azaz $f^{(2)}(a)(v,v) = f''_{vv}(a) > 0 \quad \forall\, v \neq 0$). Ekkor az f függvénynek lokális minimumhelye az a pont.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $\|\ \|$ normát a V téren. Tudjuk, hogy $V, \|\ \|$ topologikusan izomorf $\mathbb{R}^{\dim(V)}$-vel. A norma folytonossága miatt így az

$$S := \{v \in V : \|v\| = 1\}$$

gömbfelület korlátos és zárt, tehát kompakt. Feltevés szerint a $v \mapsto f^{(2)}(v,v)$ függvény folytonos. Mivel kompakt halmazon folytonos függvény felveszi a minimumát, létezik $w \in S$, ahol $\min_{v \in S} f^{(2)}(a)(v,v) = f^{(2)}(a)(w,w) > 0$. Tehát

$$\mu := \min_{\|v\|=1} f^{(2)}(a)(v,v) > 0 \ .$$

A Taylor formulát $n = 2$ rendben alkalmazva,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(h,h) + g(h) \cdot \|h\|^2 \qquad (h \in H)$$

írható, ahol H egy konvex 0-környezet a $G - a$ alakzaton belül, és g egy folytonos $H \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g(0) = 0$. Az $f^{(2)}(a)$ tenzor bilinearitása miatt mindig

$$f^{(2)}(a)(h,h) = f^{(2)}(a)(\|h\| \underbrace{\frac{h}{\|h\|}}_{\text{1 normájú}} \cdot \|h\| \frac{h}{\|h\|}) = \|h\|^2 f^{(2)}(a) \left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{|h\|} \right) \geq \mu \|h\|^2 \ .$$

Másrészt tudjuk, hogy $f'(a) = 0$. Ezért

$$f(a+h) \geq f(a) + \frac{1}{2} \big(\mu - |g(h)| \big) \cdot \|h\|^2 \qquad (h \in H) \ .$$

Mivel $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$, található olyan U 0-környezet$\subset H$, amelyre

$$|g(h)| < \mu \quad (h \in U) \ .$$

Vagyis $f(a+h) \geq f(a) \quad (h \in U)$.

Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy topologikus tér, és legyenek $f, c_1, \ldots, c_n : X \to \mathbb{R}$ függvények. Egy olyan $x \in X$ pontnál, amelyre $c_1(x) = \cdots = c_n(x) = 0$ az f függvénynek *lokális minimuma* [*max-a*] van a $c_1 = \ldots = c_n = 0$ *feltétellel*, ha

$$\exists\, U \ x\text{-környezet} \quad f(x) = \underset{[\max]}{\min}\ f\big(U \cap c_1^{-1}\{0\} \cap \cdots \cap c_n^{-1}\{0\}\big) \,.$$

Tétel. (Lagrange multiplikátorok). *Tegyük fel, hogy G nyitott$\subset V$ egy véges dimenziós V vektortérben, és $f, c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}^1(G)$, továbbá $a \in G$. Ha f-nek a-nál lokális minimuma van a $c_1 = \ldots c_n = 0$ feltételek mellett és $\{c'_1(a), \ldots, c'_n(a)\}$ lineárisan független $\subset V^*$, akkor*

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad f'(a) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\, c'_k(a) \ .$$

Bizonyítás. Tudjuk lineáris algebrából: a V fölötti lineáris funkcionálok V^* terében a $c_1'(a), \ldots, c_n'(a)$ elemek által kifeszített $\mathrm{Span}\{c_1'(a), \ldots, c_n'(a)\}$ altérre

$$\begin{aligned} & f'(a) \in \mathrm{Span}\{c_1'(a) \ldots, c_n'(a)\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{v \in V : \ f'(a)v = 0\} \supset \{v \subset V : \ c_1'(a)v = \ldots = c_n'(a)v = 0\} \ . \end{aligned}$$

(Ez a mátrixok rangszámtételének egyik –végtelen dimenzióban is alkalmazható– átfogalmazása). Mivel feltevés szerint $c_1'(a), \ldots, c_n'(a)$ lineárisan függetlenek,

$$\exists \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ lin. független } \subset V \quad c_k'(a)e_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \ .$$

Legyen $X := \{v \in V : c_1'(a)v = \cdots = c_n'(a)v = 0\}$ és $Y := \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Most

$$V = X + Y \ , \qquad X \cap Y = \{0\} \ .$$

Tekintsük az

$$F : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k(a + x + y)e_k$$

függvényt ($F : \{(x, y) \in X \times Y : \ a + x + y \in G\} \to Y$). Vegyük észre, hogy

$$F'(0, 0) : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k'(a)(x + y) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k'(a)x}_{0} + \sum_{k=1}^{n} c_k'(a)y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

mivel ha $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in Y$, akkor mindig $\sum_{k=1}^{n} c_k'(a)y = \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i c_k'(a)e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = y$. Tehát alkalmazhatjuk az implicit függvény tételt az F leképezésre a $(0, 0)$ pontnál. Ennek alapján

$$\begin{aligned} & \exists U \text{ 0-környezet} \subset X \quad \exists W \text{ 0-korny} \subset Y \quad \exists g \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ & \{(x, g(x)) : \ x \in U\} = \{(x, y) \in U \times W : \ F(x, y) = 0\} = \\ & \qquad = \{(x, y) \in U \times W : \ c_1(a+x+y) = \cdots = c_n(a+x+y) = 0\}. \end{aligned}$$

Azaz a fenti $U \subset X$ ill. $W \subset Y$ 0-környezetekkel

$$\{v \in \underbrace{a + U + W}_{a\text{-körny}\subset V} : \ c_1(v) = \ldots = c_n(v) = 0\}\{a + x + g(x) : x \in U\} \ .$$

Így a

$$\Phi : x \mapsto f(a + x + g(x))$$

függvénynek a $0 (\in X)$ lokális minimumhelye. Következésképpen

$$0 = \phi'(0) : x \mapsto f'(a)[x + \underbrace{g'(0)}_{0} x] \ ,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} & f'(a)X = 0 \Leftrightarrow f'(a)x = 0 \qquad (c_1'(a)x = \cdots = c_n'(a)x = 0) \\ & \qquad \Leftrightarrow f'(a) \in \mathrm{Span}\{c_1'(a), \ldots, c_n'(a)\} \ . \end{aligned}$$

Kvadratúra probléma

Probléma. Tegyük fel, hogy V egy vektortér, $\{e_1,\dots,e_N\}$ bázis$\subset V$ és adott N függvény $P_1,\dots,P_N\in\mathcal{C}(V)$. Milyen lokális feltételek mellett

$$\exists\, f\in\mathcal{C}^1(V) \qquad P_k=f'_{e_k} \quad (k=1,\dots,N)\ ?$$

Propozíció. *Ha G nyitott$\subset V$ és $f\in\mathcal{C}^1(G)$ egy olyan függvény, amelynél $P_k=f'_{e_k}$ $(k=1,\dots,N)$, akkor*

$$f(y)-f(x)=\int_0^1\sum_{k=1}^N P_k\big(g(t)\big)\,g_k'(t)\,dt$$

valahányszor $g:[0,1]\to G$ folytonos görbe, $g(0)=x$, $g(1)=y$, $g=\sum_{k=1}^n g_k\cdot e_k$, amelynek komponenseire $g_k\in\mathcal{C}^1((0,1),V)$ $(k=1,\dots,N)$.

Bizonyítás. Tekintsük a $\varphi:t\mapsto f(g(t))$ függvényt. Ennek deriváltja

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f'(g(t))\cdot g'(t)=f'(g(t))\sum_{k=1}^N g_k'(t)\,e_k\\&=\sum_{k=1}^N f'_{e_k}(g(t))\cdot g_k'(t)=\sum_{k=1}^N P_k(g(t))\,g_k'(t)\ .\end{aligned}$$

Másrészt a Newton–Leibniz formulából $f(y)-f(x)=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)\,dt$.

Lemma. *Tegyük fel, hogy $f\in C^2(G)$ és $P_k=f'_{e_k}$ $(k=1,\dots,N)$. Ekkor $(P_k)'_{e_i}=(P_i)'_{e_k}$ $\forall\, i,k$.*

Bizonyítás. Schwarz tétele alapján $f'_{e_k}{}'_{e_i}=f'_{e_i}{}'_{e_k}$ minden indexpárra.

Tétel. *Legyen K egy konvex nyitott alakzat és legyen $\{e_1,\dots,e_N\}$ bázis egy V (véges dimenziós) vektortérben. Ha $P_1,\dots,P_N\in C^1(K)$, akkor ekvivalensek:*

1) $\exists\, f\in C^2(K)$ $\qquad P_k=f'_{e_k}$ $\quad(k=1,\dots,N)$,

2) $P_k{}'_{e_i}=P_i{}'_{e_k}$ $\qquad(i,k=1,\dots,N)$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Láttuk.

2) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy 2) teljesül. Legyen egy $a\in K$ pont tetszőlegesen rögzítve, és tekintsük az

$$f(x):=\int_0^1\sum_{i=1}^N P_i(a+\tau(x-a))\cdot(x_i-a_i)\,d\tau \qquad (x\in K)$$

függvényt, ahol x_i az $x\in V$ vektor i-ik komponensét jelöli az $\{e_1,\dots,e_N\}$ bázisban (azaz $x=\sum_{i=1}^N x_ie_i$ $(x\in V)$). A K alakzat konvexitása miatt az f függvény jól-definiált. [Heurisztika: ha van olyan f függvény, amely teljesíti 1)-et, akkor a propozíciót a $g_x:\tau\mapsto a+\tau(x-a)$ görbékre alkalmazva látjuk, hogy csak $f(x)=f(a)+\int_0^1\sum_{i=1}^N P_i(a+\tau(x-a))\cdot(x_i-a_i)\,d\tau$ lehet.] Legyen a j index és az $x\in K$ pont tetszőlegesen adott. Verifikáljuk, hogy $f'_{e_j}(x)=P_j(x)$.

Az általánosság megszorítása nélkül vehető $a = 0$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
f'_{e_j}(x) &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}[f(x+se_j) - f(x)] \\
&= \lim_{s\downarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{N} \big[P_i(\tau x + s\tau e_j)\cdot(x+se_j)_i - P_i(\tau x)\cdot x_i\big]\, d\tau \\
&= \int_0^1 \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{N} \big[P_i(\tau x + s\tau e_j)\cdot(x+se_j)_i - P_i(\tau x)\cdot x_i\big]\, d\tau \\
&= \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{N} P'_{i\,e_j}(\tau x)\cdot\tau\cdot x_i + P_j(\tau x)\Big]\, d\tau \overset{2)}{=} \\
&= \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{N} P'_{j\,e_i}(\tau x)\cdot\tau\cdot x_i + P_j(\tau x)\Big]\, d\tau \\
&= \int_0^1 \Big[\tau\cdot\frac{d}{d\tau}P_j(\tau x)\Big]\, d\tau + \int_0^1 P_j(\tau x)\ d\tau \overset{\text{PARC INT}}{=} \\
&= \tau\cdot P_j(\tau x)\Big|_{\tau=0}^{1} - \int_0^1 P_j(\tau x)\ d\tau + \int_0^1 P_j(\tau x)\ d\tau \\
&= P_j(x)\ .
\end{aligned}
$$

Általánosítási lehetőségek végtelen dimenzióra

A véges dimenziós vektortereken való differenciálhatóság elmélete bemutatásakor abból a tényből indultunk ki, hogy ezeken csak egy természtes topológia van, amelyet tetszőleges normával definiálhattunk.

Kérdés: hogyan lehet tetszőleges topologikus vektortereken a differenciálhatóság elméletét kiépíteni? Ez sajnos már nem tehető meg maradéktalanul a becslésekre és numerikus manipulációkra oly alkalmas normák segítségével.

Definíció. Egy V vektortér $A, B \neq \emptyset$ részhalmazaira legyen (az $\inf\emptyset := \infty$ konvenció mellett)

$$B : A := \inf\{\lambda > 0 :\ \lambda B \supset A\}.$$

Megjegyzés. A következő alapvető eredményeket csak bizonyítás nélkül közöljük, jóllehet a bizonyításuk nem okoz különös nehézséget, illetve a bemutatott véges dimenziós gondolatmenetek elemzésén alapszik. Az érdekelt olvasónak jó gyakorlat ezeknek a hiányoknak a kitöltése.

Lemma. *Ha $\emptyset \neq A, B \subset V$ egy V vektortérben, akkor*
1) $B' : A' \geq B : A \qquad (B' \supset B,\ A' \subset A)$,
2) $(\alpha B) : (\alpha A) = B : A \qquad (\alpha \neq 0)$,
3) $(\alpha B) : A = \alpha(B : A),\ B : (\alpha A) = (1/\alpha)(B : A) \qquad (\alpha > 0)$,
4) *ha* K *konvex*$\subset V$, *akkor* $(A + B) : K \leq (A : K) + (B : K)$.

Definíció. Legyenek $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ topologikus vektorterek. Egy V_1-beli G 0-környezeten értelmezett $f : G \to V_2$ függvény *első rendben eltűnő*, ha

$$\forall\, U_2 \in \mathcal{V}_0^{(2)}\ \exists\, U_1 \in \mathcal{V}_0^{(1)} \quad \lim_{\delta\downarrow 0} f(\delta U_1) : (\delta U_2) = 0\ .$$

A lemma segítségével látható, hogy ez a (normákkal megadott) véges dimenziós első rendben való eltűnőség kiterjesztése. Tehát jogos a

$$o(V_1, V_2) := \{\text{első rendben eltűnő } V_1, \mathcal{V}^{(1)} \to V_2, \mathcal{V}^{(2)} \text{ függvények}\}$$

jelölés használata.

Propozíció. *Legyenek* $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ *topologikus vektorterek. Ekkor*

1) $f_1 + f_2 \in o(V_1, V_2) \qquad (f_1, f_2 \in o(V_1, V_2))$,
2) $Af \in o(V_1, V_3)$ *valahányszor* $f \in o(V_1, V_2)$ *és* $A \in \mathcal{L}(V_2, V_3)[:= \{$*folyt. lin.* $V_2 \to V_3$ *leképezések*$\}]$,
3) $g(B) \in o(V_1, V_3) \qquad f \in o(V_2, V_3),\ B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$,
4) $f(g) \in o(V_1, V_3) \qquad (f \in o(V_2, V_3),\ g \in o(V_1, V_2))$.

Definíció. Legyenek $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ topologikus vektorterek. Az $f : V_1 \to V_2$ függvény *differenciálható* x-nél, ha

$$\exists\, A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \quad [h \mapsto f(x + h) - (f(x) + Ah)] \in o(V_1, V_2)\,.$$

Az előző propozicióból azonnal következik, hogy a véges dimenziós differenciálhatósági alaptulajdonságok továbbra is állnak.

Tétel. *Differenciálható leképezések folytonosak, ilyenek lineáris kombinációja és összetétele is differenciálható. Ha* $f : V_1 \to V_2$ *differenciálható az* x *pontnál, akkor egyértelműen írható*

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f_1(h) \quad (f'(x) \in \mathcal{L}(V_1, V_2),\ f_1 \in o(V_1, V_2))$$

alakban. A differenciálhatóság maga után vonja a minden irányból való deriválhatóságot, és $f'(x)v = f'_v(x)$ *minden* v *vektorra. Ha* g *differenciálható az* x *pontban és* f *differenciálható* $g(x)$*-nél, akkor* $f(g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Megjegyzés. A mélyebb tételek már nem vihetők tovább változatlan formában. Az összes irány szerinti deriváltak folytonossága nem biztosítja a differenciálhatóságot, csak ha pl. az értelmezési tartomány véges dimenziós. (Ellenpélda: nem-folytonos lineáris funkcionál.) Ezzel szemben Schwarz tételét kevés többletfeltétellel lehet általánosítani: Ha $f \in \mathcal{C}^n(G, Z)$ és a Z vektortér topológiája szerinti folytonos lineáris funkcionálok elválasztják a pontokat (azaz $\forall\, z_1, z_2 \in Z\ \exists\, \phi \in Z^* \quad \phi(z_1) \neq \phi(z_2)$), akkor $f'_{v_{i_1}}{}^{\cdots\prime}_{\cdots v_{i_n}} = f'_{v_1}{}^{\cdots\prime}_{\cdots v_n}$ minden $(i_1, \ldots, i_n)$ indexpermutációra és $v_1, \ldots, v_n$ vektorokra. Az implicit függvény tétel bizonyítása a teljes metrikus terekben érvényes kontrakciós fixpont tételen alapult. Egy normált vektorteret *Banach tér*nek nevezünk, ha a norma metrikája teljes. Az alkalmazások szempontjából ez egy rendkívül fontos térkategória. Az implicit- és inverz függvény tételek továbbá az ezen alapuló Lagrange multiplikátor tétel is állnak Banach terekben. A derivált eltűnése a lokális szélsőérték helyeken nem kíván topológiai feltételeket. Ez utóbbi ténynek a variációs problémák kezelésében van különös érdekessége.

æ

DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

Koordináták

Definíció. Legyen S egy halmaz. Az $x_1, \dots, x_n : S \to \mathbb{R}$ függvényrendszer n-dimenziós *koordinátarendszer* S-en, ha megkülönbözteti S pontjait, azaz ha

$$\forall\, s, t \in S \quad s \neq t \;\Rightarrow\; \exists\, k \quad x_k(s) \neq x_k(t).$$

Megjegyzés. Összefoglalva az $x_1, \dots, x_n : S \to \mathbb{R}$ függvényeket egy közös $X : s \mapsto (x_1(s), \dots, x_n(s))$ leképezésbe,

$$x_1, \dots, x_n \text{ koordinátarendszer} \quad \Leftrightarrow \quad X : S \to \mathbb{R}^n \text{ injektív.}$$

Ilyenkor az X^{-1} inverz jól-definiált, nevezetesen

$$X^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \big[\text{ a } (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ koordinátájú pont } S\text{-ben}\big].$$

Példa. 1) $x_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_k \quad (k = 1, \dots, n)$ az alapkoordináták (Descartes-koordináták) $\mathbb{R}^n$-en.

2) Cantor-koordináta az egységnégyzeten:

$$P : (0,1)^2 \to \mathbb{R} \quad (0.a_1a_2 \dots\ ,\ 0.b_1b_2 \dots) \mapsto (0.a_1b_1a_2b_2 \dots)$$

ahol $0.a_1a_2 \dots$ ill. $0.b_1b_2 \dots$ a $(0,1)^2$beli pont Descates koordinátáinak *tizedestört-kifejtése* (amelyik nem tartalmaz egymás után végtelen sok 9-est). Figyelemre méltó, hogy egy "2-dimenziós"-nak tartott alakzatot "1-dimenziós"-nak koordinátázhattunk. Azonban ez a koordinátázás a természetes topologiák szerint nem is folytonos, sőt rendkívül "szétdobáló": a $P\big((0,1)^2\big)$ koordinátahalmaz nem is összefüggő.

Definíció. Az $X = (x_1, \dots, x_n) : S \to \mathbb{R}^n$ koordinátarendszer *nyitott*, ha $X(S)$ nyitott$\subset \mathbb{R}^n$.

Propozíció. *Legyenek*

$$X = (x_1, \dots, x_m) : S \leftrightarrow G(\subset \mathbb{R}^n) \qquad \textit{ill.} \qquad Y = (y_1, \dots, y_m) : S \leftrightarrow H(\subset \mathbb{R}^m)$$

nyitott koordinátázások. Ha $X \circ Y^{-1} \in C^1(H, \mathbb{R}^n)$ *és* $Y \circ X^{-1} \in C^1(G, R^m)$, *akkor szükségképpen* $m = n$ *(azaz ilyenkor a két koordinátarendszer már csak azonos dimenziójú lehet).*

Bizonyítás. Írjunk $f := X \circ Y^{-1}$-et ill. $g := Y \circ X^{-1}$-et. Ekkor $f \circ g = \mathrm{id}_G$ (a $\xi \mapsto \xi$ identitás leképezés G-n). Mivel mind f mind g differenciálható, tetszőleges $\xi \in G$ helyen

$$\underbrace{f'\big(g(\xi)\big)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \underbrace{g'(\xi)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \big(f \circ g\big)'(\xi) = \big(\mathrm{id}_G\big)'(\xi) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\ .$$

Innen azonnal következik $m = n$ és $f'\big(g(\xi)\big) = g'(\xi)^{-1}$.

Megjegyzés. Sard híres tételével be lehet bizonyítani: az $X \circ Y^{-1} \in C^1(H, \mathbb{R}^n)$ feltevés magában is elég az $m = n$ konklúzióhoz az előbbi propozícióban.

Definíció. Az $X, Y : S \to \mathbb{R}^n$ nyitott koordinátarendszerek $\mathcal{C}^k$*-kompatibilisek*, ha az $X \circ Y^{-1}$ és $Y \circ X^{-1}$ koordinátaáttérések $\mathcal{C}^k$-simák.

Parciális deriváltak

Definíció. Legyen $X = (x_1, \dots, x_n) : S \to \mathbb{R}^n$ egy nyitott koordinátarendszer és $f : S \to \mathbb{R}$ egy függvény. Az f függvény az X *koordinátarendszer szerint differenciálható* (röviden X*-differenciálható*), ha az $f \circ X^{-1}$ koordinátareprezentációja differenciálható (mint $\mathbb{R}^n$ nyitott részhalmazán értelmezett függvény). Ha $Y = (y_1, \dots, y_m)) : T \to \mathbb{R}$ szintén egy nyitott koordinátarendszer, akkor az $F : S \to T$ leképezés $(X \to Y)$*-differenciálható*, ha az $y_1(F), \dots, y_m(F)$ koordinátareprezentációi mind X-differenciálható függvények.

Az f függvénynek az x_k koordináta szerinti *parciális deriváltja* az S-en definiált

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \ s \mapsto \Big(f \circ X^{-1}\Big)'_{e_k} \big(X(s)\big)$$

függvény, ahol $e_k := (0, \dots, 0, \underset{\breve{k}}{1}, 0, \dots, 0)$ az $\mathbb{R}^n$ tér k-adik egységvektora.

Megjegyzés. $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$-nak csak egy *koordinátarendszeren belül* van értelme!

Tétel. *Legyen $X = (x_1, \dots, x_n) : S \to \mathbb{R}$ egy nyitott koordinátarendszer és $f : S \to \mathbb{R}$ egy X-differenciálható függvény az S halmazon. Tegyük fel, hogy $Y = (y_1, \dots, y_m) : T \to \mathbb{R}$ nyitott koordinátarendszer a T halmazon és $F : T \to S$ egy $(Y \to X)$-differenciálható leképezés. Ekkor az $f(F)$ összetett függvény Y-differenciálható és*

$$\frac{\partial f(F)}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(F) \cdot \frac{\partial x_k(F)}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \dots, m) \ .$$

Bizonyítás. Numerikus függvényekre faktorizálva

$$f(F) \circ Y^{-1} = f \circ F \circ Y^{-1} = (f \circ X^{-1}) \circ (X \circ F \circ Y^{-1}) \ .$$

Ha tehát $\eta \in Y(T)$, akkor

$$[f(F) \circ Y^{-1}]'(\eta) = \big[[f \circ X^{-1}]'(X \circ F \circ Y^{-1}(\eta))\big] \cdot \big[X \circ F \circ Y^{-1}\big]'(\eta) \ .$$

Speciálisan, ha $t \in T$ és $\eta := Y(t)$, akkor

$$\begin{aligned}
\big[f(F) \circ Y^{-1}\big]'_{e_i}\big(Y(t)\big) &= \big[[f \circ X^{-1}]'(X(F(t))\big] \cdot \big[X \circ F \circ Y^{-1}\big]'_{e_i}(Y(t)) \\
&= \big[[f \circ X^{-1}]'(\underbrace{X(F(t))}_{\text{HELY}})\big] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} x_k(F \circ Y^{-1})'_{e_i}(\underbrace{Y(t)}_{\text{HELY}}) \cdot e_k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [f \circ X^{-1}]'_{e_k}(\underbrace{X(F(t))}_{\text{HELY}}) x_k(F \circ Y^{-1})'_{e_i}(\underbrace{Y(t)}_{\text{HELY}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(F(t)\big) \frac{\partial x_k(F)}{\partial y_i}(t) \ .
\end{aligned}$$

Következmény. *Ha $X = (x_1, \dots, x_n)$ és $Y = (y_1, \dots, y_n)$ $\mathcal{C}^1$-kompatibilis koordinátarendszerek S-en és $f : S \to \mathbb{R}$ egy X-differenciálható függvény, akkor*

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \dots, n) \ .$$

Definíció. Legyenek $X : S \to \mathbb{R}^n$ ill. $Y : T \to \mathbb{R}^n$ (nyitott) koordinátarendszerek. Egy $F : T \to S$ $(Y \to X)$-differenciálható leképezés *derivált mátrixa* az $(Y \to X)$ koordinátázással

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(F)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1(F)}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1(F)}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(F)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n(F)}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial x_n(F)}{\partial y_m} \end{pmatrix} .$$

Jelölések: $X(F) := \begin{pmatrix} x_1(F) \\ \vdots \\ x_n(F) \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial}{\partial Y} := \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial y_m} \right)$,

ahonnan a deriváltmátrix $\dfrac{\partial X(F)}{\partial Y}$ vagy $\partial X(F)/\partial Y$.

Megjegyzés. Az összetett függvény deriváltjára vonatkozó tétel szerint

$$\frac{\partial}{\partial Z} X(F \circ G) = \frac{\partial X(F)}{\partial Y}(G) \cdot \frac{\partial Y(G)}{\partial Z} .$$

Atlaszok

Definíció. Legyen M egy halmaz és V egy vektortér $(\dim(V) < \infty)$. Az S halmazon értelmezett $X : S \to V$ függvény egy *lokális térképe* M-nek V-n, ha $S \subset M$ és X injektív S-en.

Definíció. Az X, Y lokális térképei M-nek $\mathcal{C}^k$*-kompatibilisek*, ha az $X \circ Y^{-1}$ ill. $Y \circ X^{-1}$ koordinátaáttérések V-nek nyitott halmazain értelmezett C^k-sima leképezések.

Definíció. Legyen M halmaz, V (véges dimenziós) vektortér és

$$\mathcal{A} \subset \big\{ M \text{ lokális térképei } V\text{-ben} \big\} .$$

Az $\mathcal{A}$ térképcsalád V-beli $\mathcal{C}^k$*-atlasz* M-en, ha*

1) $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} \mathrm{dom}(X) = M$, 2) X, Y $\mathcal{C}^k$-kompatibilis $(X, Y \in \mathcal{A})$.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{A}$ egy $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{C}^k$-atlasz, akkor benne minden lokális térkép triviálisan $\mathcal{C}^k$-kompatibilis önmagával, vagyis az $\mathcal{A}$ atlasz mindegyik X térképe nyitott koordinátarendszer $\big(\mathrm{dom}(X)$-en, nem feltétlenül az egész M-en$\big)$.

Példa. A speciális relativitás geometriája

Legyen M egy 1-dimenziós egyenesen az események tere. Esemény alatt hely- és időkoordinátával azonosítható jelenséget értünk. Legyen **O** egy kijelölt esemény (az *origó*) M-ben. A **O**-ban álló kezdőpontú rendszerből v egyenletes sebességűnek látszó *inerciarendszer* szerinti koordinátázás legyen

---

* $\mathrm{dom}(F)$ ill. $\mathrm{ran}(F)$ az F függvény *értelmezési tartomány*a ill. *értékkészlet*e. (A jelölés eredete az angol "domain" ill. "range" szavak.)

$$\begin{aligned} I_v : M &\to \mathbb{R}^2 \\ m &\mapsto \begin{pmatrix} t_v(m) \\ x_v(m) \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{IDŐ} \\ \text{TÉR} \ . \end{matrix} \end{aligned}$$

Megjegyzés. A 0 időpontban **O**-ból induló u egyenletes sebességű mozgás eseményeinek koordinátái a

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt alkotják egy inerciarendszerben.

Posztulátum. Az $I_u \circ I_v^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koordinátaáttérés mindig *lineáris transzformáció.* ($I_u \circ I_v^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jelentése: Hogyan számoljuk át a v sebességű rendszer adatait az u sebességűébe.)

Axiómák. 1) Az I_v rendszer origójában álló pont I_v-ben 0 sebességű, I_0-ban v sebességűnek látszik:

$$L_v \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tv \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

2*) *A FÉNYSEBESSÉG ÁLLANDÓ* c érték:

$$L_v \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tc \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tc \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

3) I_v-ből I_0-ba ugyanaz a transzformáció, mint I_0-ból I_{-v}-be:

$$L_{-v} = L_v^{-1} \quad .$$

4) Tükrözési elv:

$$L_{-v} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} .$$

5) A koordinátaáttérések folytonosak:

$$v \mapsto L_v \qquad \text{folytonos} \ .$$

Megjegyzés. A klasszikus mechanikai szemléletet kifejező

$$\tilde{L}_v : \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x + tv \end{pmatrix} \qquad \tilde{L}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

Galilei-transzformáció az 1) 3) 4) 5) axiómákat kielégíti, de ellentmond 2*)-nak.

Tétel. $L_v = \sqrt{1 - (v/c)^2} \begin{pmatrix} 1 & v/c^2 \\ v & 1 \end{pmatrix} \qquad (-c < v < c)$.

Bizonyítás. A 3) 4) axiómákból azonnal következik, hogy

$$L_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} .$$

A determinánsok szorzástétele szerint így $1/\det(L_v) = (-1)\det(L_v) \cdot (-1)$, ahonnan $\det(L_v) \in \{\pm 1\}$. A folytonossági 5) axiómából és abból az egyszerű tényből, hogy L_0 szükségképpen az egységmátrix, adódik most, hogy

$$\det(L_v) = 1 \qquad \forall\, v \ .$$

Legyen v tetszőlegesen rögzítve, és legyenek L_v komponensei $L_v := \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}$.

Ekkor

$$L_v^{-1} = \frac{1}{\det(L_v)} \begin{pmatrix} \ell_{22} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{22} & -ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} .$$

Következésképpen $\ell_{11} = \ell_{22}$ és $\ell_{11}^2 - \ell_{12}\ell_{21} = \det(L_v) = 1$. Az 1) axióma szerint létezik olyan κ együttható, amelyre

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} \\ \ell_{21} \end{pmatrix} = L_v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} , \qquad L_v = \begin{pmatrix} \kappa & \ell_{12} \\ \kappa v & \kappa \end{pmatrix} .$$

A 2*) axióma szerint

$$L_v \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \kappa' \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \qquad \exists\, \kappa'$$

$$\begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_{12} c \\ \kappa c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa' \\ \kappa' c \end{pmatrix} .$$

Szükségképpen $\kappa' = \kappa\big(1 + \frac{v}{c}\big)$ és $\ell_{12} = \frac{\kappa' - \kappa}{c} = \frac{v}{c^2}\kappa$. Mivel $\det(L_v) = \kappa^2 - \kappa^2 \frac{v^2}{c^2}$ $= 1$, adódik $\kappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Azaz mint v-nek a függvénye, $\kappa(v) \in \big\{\pm\big(1 - (v/c)^2\big)\big\}$. Csakhogy az 5) axióma alapján $\lim\limits_{v \to 0} \kappa(v) = 1$, ahonnan $\kappa(v) = \big(1 - (v/c)^2\big)$.

Sokaságok, vektorok

Definíció. Az $M, \mathcal{A}$ pár $\mathcal{C}^k$*-sokaság*, ha $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^k$-atlasz M-en.

Tétel. *Ha $M, \mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^k$-sokaság V-beli térképekkel, akkor $\mathcal{V}$-vel jelölve a V véges dimenziós vektortér természetes topológiáját,*

$\exists!\, \mathcal{U}$ *topológia* M*-en* $\forall X \in \mathcal{A}\quad X\ \big(\mathcal{U}|\mathrm{dom}(X) \to \mathcal{V}\big)$*-folytonos,*
$X^{-1}\ \big(\mathcal{V}|\mathrm{ran}(X) \to \mathcal{U}\big)$*-folyt.,* $\mathrm{dom}(X)$ $\mathcal{U}$*-nyitott* $\subset M$.

Bizonyítás. Unicitás: Bármely $p \in M$ pontra szükségképpen

$$\mathcal{U}_p = \big\{U \subset M :\ \exists X \in \mathcal{A}\ \ \exists G \text{ nyitott} \subset V \quad p \in X^{-1}(G) \subset U\big\} .$$

Egzisztencia: Definiáljuk a fenti módon az $\mathcal{U}$ környezetrendszert M-en. Ekkor, ha G_1, G_2 nyitott$\subset V$, az $U_i := X_i^{-1}(G_i)$ alakzatokra $U_i \in \mathcal{U}_p \quad (i = 1, 2)$ és

$$\begin{aligned} X_1(U_1 \cap U_2) &= X_1(X_1^{-1}(G_1) \cap X_2^{-1}(G_2)) \\ &= G_1 \cap X_1(X_2^{-1}(G_2)) \\ U_1 \cap U_2 &= X_1^{-1}\Big(\ \underbrace{G_1 \cap (X_1 \circ X_2^{-1})(G_2)}_{\text{nyitott} \Leftarrow X_2 \circ X_1^{-1} \text{ folyt}}\ \Big) . \end{aligned}$$

Tehát $\mathcal{U}$ topológia, amelynél minden $X \in \mathcal{A}$ térkép-leképezés folytonosan invertálható.

Definíció. A tételben bevezetett topológiát az $M, \mathcal{A}$ sokaság *természetes topológiájá*nak nevezzük. Mivel a véges dimenziós vektorterek természetes topológiája Hausdorff, a differenciálható sokaságok természetes topológiája szintén Hausdorff.

Lemma. *Legyen $M, \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^1$-sokaság, $p \in M$ és $c : \mathbb{R} \to M$ egy görbe M-ben, amelyre $c(0) = p$. Tegyük fel, hogy $X : S \leftrightarrow G$ ill. $Y : T \leftrightarrow H$ (nyitott$\subset V$) egy-egy p-t tartalmazó térkép (azaz $p \in \mathrm{dom}(X) \cap \mathrm{dom}(Y) = S \cap T$) az $\mathcal{A}$ atlaszból, amelyre a c görbe $X(c)$ képe 0-nál differenciálható. Ekkor $Y(c)$ szintén differenciálható 0-nál, és a $v := \frac{d}{dt}\Big|_0 X(c(t)) \in V$ vektorra*

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 Y(c(t)) = \left[\left(Y \circ X^{-1}\right)'\left(X(p)\right)\right] v \ .$$

Bizonyítás. Csak annyit kell észrevenni, hogy $Y \circ c = (Y \circ X^{-1}) \circ (X \circ c)$, majd az összetett függvény differenciálási láncszabályát kell alkalmazni.

A lemmából azonnal adódik a következő.

Tétel. *Ha $M, \mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^1$-sokaság, $p \in M$ és $c : \mathbb{R} \to M$ egy görbe, melynél $c(0) = p$, akkor*

1) *Az $X \circ c$ képgörbék egyszerre differenciálhatók vagy nem-differenciálhatók 0-nál minden $X \in \mathcal{A}_p (:= \{X \in \mathcal{A} : p \in \mathrm{dom}(X)\})$ térképen*
2) *A $\mathbf{v} : X \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 X\big(c(t)\big)$ olyan $\mathcal{A}_p \to V$ leképezés, hogy*

$$\mathbf{v}(Y) = \left(Y \circ X^{-1}\right)'\left(X(m)\right)\mathbf{v}(X) \qquad (X, Y \in \mathcal{A}_p) \ .$$

Definíció. Legyen $M, \mathcal{A}$ egy C^1-sokaság és p egy pont M-ben. Ekkor

$$\mathcal{A}_p := \{X \in \mathcal{A} : \ p \in \mathrm{dom}(X)\}$$

a *p-körüli térképek* családja, és

$$T_p(M) := \left\{\mathbf{v}(: \mathcal{A}_p \to V) : \ \left(Y \circ X^{-1}\right)'\left(X(p)\right)\mathbf{v}(X) = \mathbf{v}(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}_p\right\}$$

a *p-beli vektorok* tere az $M, \mathcal{A}$ sokaságnál, vagy más szóhasználattal $M, \mathcal{A}$ *érintőtere* a p pontnál. A $\mathbf{v} \in T_p(M)$ vektor *reprezentáns*a az $X \in \mathcal{A}_p$ térképen a

$$\mathbf{v}^X := \mathbf{v}(X) \ \in V$$

hagyományos vektor.

Tétel. *Ha $M, \mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^1$-sokaság, $p \in M$ és $X_0 \in \mathcal{A}_p$, akkor a*

$$v \mapsto \left[X \mapsto \left(X \circ X_0^{-1}\right)'\left(X_0(p)\right)v\right]$$

leképezés lineáris kölcsönösen egyértelmű $V \leftrightarrow T_p(M)$ megfeleltetés.

Bizonyítás. Legyen az $X \in \mathcal{A}_p$ térkép tetszőlegesen rögzített. Most a

$$v \mapsto \left(X \circ X_0^{-1}\right)'\left(X_0(p)\right)v$$

leképezés lineáris $V \leftrightarrow V$. Másrészt minden $X, Y \in \mathcal{A}_p$ térképpárra

$$\begin{aligned}
\left(Y \circ X_0^{-1}\right)'\left(X_0(p)\right) &= \left[Y \circ X^{-1} \circ X \circ X_0^{-1}\right]'\left(X_0, (p)\right) \\
&= \left[[Y \circ X^{-1}]'(X \circ X_0^{-1}(X_0(p))\right] \cdot \left(X \circ X_0^{-1}\right)\left(X_0(p)\right) \\
&= \left[\left(Y \circ X^{-1}\right)'\left(X(p)\right)\right] \cdot \left(X \circ X_0^{-1}\right)'\left(X_0(p)\right) \ .
\end{aligned}$$

Következésképpen a $v \mapsto \left[X \mapsto \left(X \circ X_0^{-1}\right)'\left(X(p)\right)v\right]$ megfeleltetés injektív és lineáris $V \to T_p(M)$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v} : \mathcal{A}_p \to V$ leképezésre $\mathbf{v} \in T_p(M)$. Ekkor a $v := \mathbf{v}^{X_0}$ reprezentánsra

$$\mathbf{v}^X = \mathbf{v}(X) = \left(X \circ X_0^{-1}\right)'\left(X_0(p)\right)v \qquad (X \in \mathcal{A}_p) \ .$$

Definíció. Az $M, \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^1$-sokaságnál

$$T(M) := \{(p, \mathbf{v}) :\ p \in M,\ \mathbf{v} \in T_p(M)\}$$

a sokaság *érintőnyalábja*. Egy $X \in \mathcal{A}$ lokális térképhez megalkotjuk TM-nek a

$$\begin{aligned} TX :&(p, \mathbf{v}) \mapsto (X(p), \mathbf{v}(X)) \\ &\{(p, v) :\ p \in dom(X),\ v \in T_p(M)\} \to V \times V \end{aligned}$$

lokális térképét. Legyen

$$T\mathcal{A} := \{TX :\ X \in \mathcal{A}\}.$$

Tétel. *Ha $M, \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^k$-sokaság, akkor $T(M), T\mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^{k-1}$-sokaság.*

Bizonyítás. Állítás: Minden $X \in \mathcal{A}$ térképnél a TX leképezés injektív és $\mathrm{ran}(TX) = \mathrm{ran}(X) \times V$. Bizonyítás: Ha $p \neq q$, akkor $X(p) \neq X(q)$, ahonnan $TX(p, \mathbf{v}) \neq TX(q, \mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$. Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$, akkor $\mathbf{v}(X) \neq \mathbf{u}(X)$, ahonnan $TX(p, \mathbf{v}) \neq TX(p, \mathbf{u})$ $\forall p\, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p(M)$. Tehát $\{TX(p, \mathbf{v}) :\ \mathbf{v} \in T_p(M)\} = V$ az előző tétel szerint.

Állítás: Ha $X, Y \in \mathcal{A}$, akkor a $(TY) \circ (TX)^{-1}$ áttérési leképezés $\mathcal{C}^{k-1}$-sima. Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} (TX)^{-1} &: (x, w) \mapsto \big(X^{-1}(x), \big[Z \mapsto \big(Z \circ X^{-1}\big)'(x) w\big]\big) \\ (TY) \circ (TX)^{-1} &: (x, w) \mapsto \Big(\underbrace{Y \circ X^{-1}}_{\mathcal{C}^k(\mathrm{ran}(X), V)}(x),\ \underbrace{\big(Y \circ X^{-1}\big)'(x)}_{\mathcal{C}^{k-1}(\mathrm{ran}(X), \mathcal{L}(V, V))}\ w \Big) . \end{aligned}$$

Leképezés deriváltjai

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$-sokaságok és $F : M \to M'$. Az F leképezés *differenciálható* az $p \in M$ helyen, ha minden $X \in \mathcal{A}_p$, $Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}$ térképpárra az

$$Y \circ F \circ X^{-1}$$

koordinátareprezentáció differenciálható az $X(p)$ helyen (a hagyományos értelemben, mint vektortér nyitott halmazán értelmezett és másik vektortérbe képező függvény).

Lemma. *Ha $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$-sokaságok és $F : M \to M'$ továbbá $p \in M$, akkor*

1) *F differenciálható a p pontban, ha található olyan $X \in \mathcal{A}_p$, $Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}$ térképpár, amelyben az $Y \circ F \circ X^{-1}$ reprezentáció differenciálható $X(p)$-nél,*

2) *ha F differenciálható a p helyen, akkor a $T_p(M)$-beli vektorokat $T_{F(p)}(M')$-beli vektorokba vivő*

$$(*) \qquad \mathbf{v} \mapsto \big[\mathbf{w} \in T_{F(p)} :\ \mathbf{w}^Y = \big(Y \circ F \circ X^{-1}\big)'_{X(p)} \mathbf{v}^X, \quad (X \in \mathcal{A}_p)\big]$$

leképezés jól-definiált és lineáris.

Bizonyítás. A koordinátacserék hatásának vizsgálatakor az összetett függvény deriváltjára vonatkozó láncszabály (illetve az a tény, hogy az inverz leképezés deriváltja a derivált inverze) egyenesen vezet az állításokhoz.

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$-sokaságok, $F : M \to M'$ egy a $p \in M$ pontban differenciálható leképezés. A $(*)$ lineáris $T_p(M) \to T_{F(p)}$ operátort az F leképezés *p pontbeli deriváltjá*nak nevezzük. Jelölése: $F'(p)$. Ha F mindenütt differenciálható M-en, a $TF : TM \ni (p, \mathbf{v}) \mapsto F'(p)\mathbf{v}$ függvény F-nek az M *sokaságbeli deriváltja.* (Ez utóbbi fogalomnak az az előnye, hogy újra sokaságból sokaságba vezet, így lehet képezni a $T^2F(:= TTF), T^3F(:= TTTF), \ldots, T^kF$ magasabb rendű deriváltakat, ha $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^k$-sokaságok).

Megjegyzés. Heurisztikusan, a lemma üzenete az is, hogy elegendő leképezések lokális vizsgálatához egyetlen (tetszőleges) térképpárt kiragadni, és az abban hagyományos technikával kapott eredmények egyszerűen interpretálhatók a differenciálható sokaságok kontextusában. Mivel irány szerinti deriváltakkal

$$[F'(p)\mathbf{v}]^Y = (Y \circ F \circ X^{-1})'_{\mathbf{v}^X} \qquad (X \in \mathcal{A}_p,\ Y \in \mathcal{A}'_{F(p)},\ \mathbf{v} \in T_pM),$$

Lagrange tétele alapján áll a következő.

Tétel. *Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^n$-sokaságok, $F : M \to M'$. A TF, $T^2F, \ldots, T^nF$ deriváltak mindegyike létezik és folytonos pontosan akkor, ha bármely $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{A}'$ térképpárra és $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorcsaládra (ahol az $\mathcal{A}$-beli térképek a V vektortérbe képeznek) az*

$$[Y \circ F \circ X^{-1}]'^{\cdots\prime}_{v_1 \ldots v_n}$$

deriváltak léteznek és folytonosak, azaz ha $Y \circ F \circ X^{-1} \in \mathcal{C}^n\big(\mathrm{dom}(Y \circ F \circ X^{-1}), Z\big)$ (ahol az $\mathcal{A}'$-beli térképek Z-be képeznek).

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^n$-sokaságok, a V ill. Z (véges dimenziós) vektorterekbe képező térképekkel. A vektortérbeli fogalmak természetes kiterjesztéseként értelmezzük a

$$\mathcal{C}^k(M, M') := \big\{F(: M \to M') :\ TF, T^2F, \ldots, T^nF \text{ jól-def. folyt.}\big\} \qquad (1 \le k \le n)$$

ill. $\mathcal{C}(M, M') = \mathcal{C}^0(M, M') := \big\{\text{folyt. } M \to M' \text{ fgv-ek}\big\}$ függvényosztályokat. Az előző tétel szerint jól-definiált a $\mathcal{C}^n$-sima $F : M \to M'$ leképezésekre az

$$F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) := \Big[\mathbf{w} \in T_{F(p)}M' :$$
$$\mathbf{w}^Y = \big[Y \circ F \circ X^{(-1)}\big]'^{\cdots\prime}_{\mathbf{v}_1^X \ldots \mathbf{v}_n^X}\big(X(p)\big) \qquad \big(X \in \mathcal{A}_p,\ Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}\big)\Big]$$

n-ik *derivált tenzor* minden $p \in M$ pontra és $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in T_pM$ vektor n-esre.

Tétel. *A derivált tenzorok szimmetrikusak és minden vektor-változójukban lineárisak. Nevezetesen, ha $F \in \mathcal{C}^n(M, M')$ és $(p, \mathbf{v}_1), \ldots, (p, \mathbf{v}_n) \in TM$, akkor minden $i_1, \ldots, i_n$ permutációjára az $1, \ldots, n$ indexeknek*

$$F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}) = F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\ .$$

Bizonyítás. Ez direkt következménye Schwarz tételének.

æ

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

σ-algebrák

Definíció. Legyen Ω egy (nem-üres) halmaz, $\mathcal{A} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád σ*-algebra* Ω fölött, vagy más szóhasználattal az $\Omega, \mathcal{A}$ pár σ-algebra, ha

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_1 \backslash A_2,\ \Omega \in \mathcal{A} \qquad (A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}) .$$

Lemma. *Legyen* $\mathcal{A} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. *Ekkor ekvivalensek:*

1) $\mathcal{A}$ σ*-algebra* Ω *fölött*
2) $\Omega,\ A \cap B \in \mathcal{A},\ \Omega \backslash C \in \mathcal{A}\ \ (A, B, C \in \mathcal{A})$ *és* $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{A} \quad (D_1, D_2, \ldots$ *diszjunkt* $\in \mathcal{A})$.*

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2) triviális.
2) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy 2) áll, és legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Most

a) $A_1 \backslash A_2 = A_1 \cup (\Omega \backslash A_2) \in \mathcal{A}$.

b) Tekintsük a $D_1 := A_1$ és $D_k := A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$ halmazokat. Észrevétel: $D_1, D_2, \ldots$ diszj $\in \mathcal{A}$ és $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} D_k\ \ (n = 1, 2, \ldots)$. Másrészt $D_k = (A_k \backslash A_1) \cap \cdots \cap (A_k \backslash A_{k-1})$, és a) alapján $A_k \backslash A_j \in \mathcal{A}\ \ (j < k)$. Így minden k indexre $D_k = [\text{véges sok } \mathcal{A}\text{-beli halmaz } \cap\text{-e}] \in \mathcal{A}$, és $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathcal{A}$.

c) A már belátott a)b) alapján $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n) \in \mathcal{A}$, és így $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\Omega \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash A_n)\big) \in \mathcal{A}$.

Következmény. *Ha* $\Omega, \mathcal{A}$ *egy* σ*-algebra, akkor*
1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$, 2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, \Rightarrow \exists\, D_1, D_2, \ldots$ *diszj* $\in \mathcal{A}\ \forall n\ \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.

Borel-halmazok

Propozíció. *Egy közös* Ω *halmaz feletti* σ*-algebrák akármilyen családjának közös tagjai* σ*-algebrát alkotnak* Ω *fölött.*

Bizonyítás. Legyen $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ σ-algebrák egy családja Ω fölött, és tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Legyen az i index tetszőlegesen rögzítve. Nyilván $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_i$. Tehát mivel $\mathcal{A}_i$ σ-algebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_1 \backslash A_2, \Omega \in \mathcal{A}_i$, azaz $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ és a megszámlálhatóan végtelen unió, metszet ill. a különbségképzés nem vezet ki $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$-ből.

Definíció. Ha $\mathcal{G} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$, a $\mathcal{G}$ halmazcsalád által *generált* σ*-algebra* (Ω fölött) a $\mathcal{G}$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebra, azaz a

$$\bigcap \{\mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra } \Omega\text{-n: } \ \mathcal{G} \subset \mathcal{A}\}$$

halmazcsalád (amely a propozíció szerint jól-definiált, hiszen $\Omega, \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$ is $\mathcal{G}$-t tartalmazó σ-algebra). A $\{[-\infty, \infty]^N\text{-beli intervallumok}\}$ generálta σ-algebra tagjai a $[-\infty, \infty]^N$-beli *Borel-halmazok.* (Emlékeztető: $[-\infty, \infty]^N$-ben az

---

* A következőkben a $D_1, D_2, \ldots$ diszjunkt $\in \mathcal{A}$ (röviden $D_1, D_2, \ldots$ diszj $\in \mathcal{A}$) típusú formula a "$D_1, D_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és $D_i \cap D_j = \emptyset$ valahányszor $i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots$" típusú kifejezést rövidíti.

I alakzat intervallum, ha $I = I_1 \times \cdots \times I_N$ alakú, ahol I_k intervallum$\subset \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, N)$.)

Lemma. *A nyitott ill. zárt halmazok $[-\infty, \infty]^N$-ben Borel-halmazok.*

Bizonyítás. Lindelöf tétele szerint bármelyik G nyitott$\subset [-\infty, \infty]^N$ felírható $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ alakban alkalmas $I_1, I_2, \ldots \subset [-\infty, \infty]^N$ intervallumsorozattal. Másrészt minden zárt halmaz egy nyitott komplementere.

Mérhetőség

Definíció. Legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ-algebra. Az $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ függvény $\mathcal{A}$-mérhető, ha

$$\forall I \text{ nyitott intervallum} \subset [-\infty, \infty] \quad f^{-1}(I)\big(:= \{x \in \Omega : \ f(x) \in I\}\big) \in \mathcal{A}.$$

Tétel. *f $\mathcal{A}$-mérhető $\Leftrightarrow$ $\forall B$ Borel$\subset [-\infty, \infty]$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Triviális.
$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy az f függvény $\mathcal{A}$-mérhető, és tekintsük a

$$\mathcal{B} := \{B \subset [-\infty, \infty] : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

halmazcsaládot. Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{B} \supset \{$nyitott intervallumok $[-\infty, \infty]$-ben$\}$. Legyen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$. Ekkor $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, ahonnan $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Hasonlóan $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$, ill. az $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$ reláció miatt $B_1 \backslash B_2 \in \mathcal{B}$. Vagyis $\Omega, \mathcal{B}$ σ-algebra. Következésképpen $\mathcal{B} \supset \{B : B$ Borel$\subset [-\infty, \infty]^N\}$.

Tétel. *Legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ-algebra, $f_1, \ldots, f_N$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények, és legyen $F : [-\infty, \infty)^N \to [-\infty, \infty]$ Borel mérhető. Ekkor az $F(f_1, \ldots, f_N)$ összetett függvény $\mathcal{A}$-mérhető.*

Bizonyítás. Feltevés szerint $F^{-1}(I)$ Borel$\subset [-\infty, \infty]^N$ valahányszor I intervallum $\subset [-\infty, \infty]^N$. Vezessük be a

$$\Phi : x \mapsto (f_1(x), f_N(x)) \ , \qquad \mathcal{B} := \{B \subset [-\infty, \infty]^N : \ \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

jelöléseket. Észrevétel: $\mathcal{B} \supset \{[-\infty, \infty]^N$ Borel részhalmazai$\}$. Bizonyítás: Ha $I_1 \times \ldots \times I_N$ intervallum$\subset [-\infty, \infty]^N$, akkor

$$\Phi^{-1}(I) = \bigcap_{n=1}^{N} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{A} \ ,$$

azaz $\mathcal{B} \supset \{N$-dimenziós intervallumok$\}$. Másrészről ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, verifikálhatjuk, hogy $\Omega, \mathcal{B}$ σ-algebra. Az észrevételből azonnal adódik, hogy $F(f_1, \ldots, f_N)^{-1}(I) \in \mathcal{A}$, ha I intervallum $\subset [-\infty, \infty]^N$.

Következmény. *Ha f, g $\mathcal{A}$-mérhető függvények, akkor $f+g, f-g, f \cdot g, \max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ is $\mathcal{A}$-mérhetők.* $\mathcal{A}$-mérhető függvények folytonos függvényei $\mathcal{A}$-mérhetők.*

Tétel. *Legyen $f_1, f_2, \ldots$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények egy sorozata. Ekkor a*

---

* Ha $f(x) = \infty$, $g(x) = -\infty$ vagy fordítva, akkor szokásosan $x \notin \mathrm{dom}(f \pm g)$. Azonban az $f^{(-1)}\{\infty\} \cap g^{(-1)}\{-\infty\}$ ill. $f^{(-1)}\{-\infty\} \cap g^{(-1)}\{\infty\}$ halmazok ilyenkor is $\mathcal{A}$-mérhetők. Hogy egyszerűen mindenütt értelmezett függvényekkel dolgozhassunk, bevezetjük a $-\infty + \infty := 0$ konvenciót.

$$\sup_n f_n\,,\ \inf_n f_n\,,\ \limsup_{n\to\infty} f_n\,,\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

függvények is $\mathcal{A}$-mérhetők.

Bizonyítás. Legyen (α,β) egy tetszőleges nyitott intervallum $[-\infty,\infty]$-ben. Ekkor

$$\begin{aligned}\{x\in\Omega:\ \sup_n f_n(x)\in(\alpha,\beta)\} &= \{x:\ \sup_n f_n(x)<\beta\}\cap\{x:\ \sup_n f_n(x)>\alpha\}\\ &=\{x:\ \exists\, m\ \forall\, n\ \ f_n(x)<\beta-\frac{1}{m}\}\cap\{x:\ \exists\, n\ \ f_n(x)>\alpha\}\\ &=\bigcup_m^\infty\bigcap_{n=1}^\infty f_n^{-1}(-\infty,\beta-\frac{1}{m})\cap\bigcup_{n=1}^\infty f_n^{-1}(\alpha,\infty)\ .\end{aligned}$$

Feltevés szerint az $f_n^{-1}(-\infty,\beta-1/m)$ ill. $f_n^{-1}(\alpha,\infty)$ alakú halmazok mind $\mathcal{A}$-mérhetők. Így a $\sup_n f_n$ függvény $\mathcal{A}$-mérhető. Az $\inf_n f_n$ alsó burkoló $\mathcal{A}$-mérhetősége most következik az $\inf_n f_n=-\sup(-f_n)$ relációból. A $\liminf$ ill. $\limsup$ opeációk pedig visszavezethetők $\sup$- és $\inf$-képzésre:

$$\limsup_{n\to\infty} f_n=\inf_k\sup_{n\ge k} f_n\ ,\qquad \limsup_{n\to\infty} f_n=\inf_k\sup_{n\ge k} f_n\ .$$

Mérték, σ-lépcsős függvények

Definíció. Legyen $\Omega,\mathcal{A}$ egy σ-algebra. A $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ függvény *mérték*, ha

$$\mu(\emptyset)=0 \text{ és } \mu(\bigcup_{n=1}^\infty D_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu(D_n)\qquad(D_1,D_2,\ldots\text{diszj}\in\mathcal{A})\ .$$

Az $\Omega,\mathcal{A},\mu$ tripletet *mértéktér*nek mondjuk, ha $\Omega,\mathcal{A}$ egy σ-algebra és μ mérték $\mathcal{A}$-n. A továbbiakban az egész fejezeten át $\Omega,\mathcal{A},\mu$ egy tetszőlegesen rögzített mértéktér.

Lemma. *Ha $B,A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{A}$ és $B\subset\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, akkor $\mu(B)\le\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)$.*

Bizonyítás. Legyen $D_1:=A_1$, $D_n:=A_n\setminus\bigcup_{k<n}A_k$ $(n=1,2,\ldots)$. Most a $B_n:=B\cap D_n$ halmazokra $B_1,B_2,\ldots$ diszj $\in\mathcal{A}$, továbbá $B=B\cap\bigcup_{n=1}^\infty A_n=B\cap\bigcup_{n=1}^\infty D_n=\bigcup_{n=1}^\infty B_n$ és $B_n\subset D_n\subset A_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Innen

$$\mu(B)=\sum_{n=1}^\infty\mu(B_n)\le\sum_{n=1}^\infty\mu(D_n)\le\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)\ .$$

Definíció. A $\varphi:\Omega\to[-\infty,\infty]$ függvény *μ-lépcsős függvény*, ha

$$\begin{gathered}\exists\, A_1,A_2,\ldots\text{diszj}\in\mathcal{A}\ \ \exists\,\alpha_1,\alpha_2\ldots\in[-\infty,\infty]\\ \varphi=\sum_{n=1}^\infty\alpha_n 1_{A_n}\ ,\qquad\sum_{n=1}^\infty|\alpha_n|\mu(A_n)<\infty\ .\end{gathered}$$

Megjegyzés. Konvenció: $\pm\infty\cdot 0:=0$.

$1_A(x):=\big[1 \text{ ha } x\in A,\ 0 \text{ ha } x\notin A\big]$ az A halmaz *indikátorfüggvénye*.

Ha $A_1, A_2, \ldots$ diszj$\in\mathcal{A}$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n}$ alakú függvényösszegek minden $x\in\Omega$ helyen jól-definiáltak, mivel bennük legfeljebb egy kivételével minden tag $=0$.

Lemma. *Tegyük fel, hogy* $A_1, A_2, \ldots$ *diszj* $\in \mathcal{A}$, $B_1, B_2, \ldots$ *diszj* $\in \mathcal{A}$ *továbbá* $\sum_n |\alpha_n| \mu(A_n)$, $\sum_n |\beta_n| \mu(B_n) < \infty$. *Ekkor*

$$\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \le \sum_m \beta_m 1_{B_m} \;\Rightarrow\; \sum_n \alpha_n \mu(A_n) \le \sum_m \beta_m \mu(B_m) \ .$$

Bizonyítás. Tekintsük a $D_{n,m} := A_n \cap B_m$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ halmazokat. Ezek páronként diszjunktan fedik le az Ω teret. Így az összes indexekre

$$\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{n,m}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D_{n,m}) \quad , \quad \mu(B_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_{n,m}) \ .$$

Legyen $\alpha_{n,m} := \alpha_n$, $\beta_{n,m} := \beta_m$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$. Tegyük fel, hogy $\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \le \sum_m \beta_m 1_{B_m}$. Észrevétel:

$$\alpha_{n,m} \le \beta_{n,m} \qquad \forall\, n, m$$

mivel

$$\sum_{n,m} \alpha_{n,m} 1_{D_{n,m}} = \sum_n \alpha_n 1_{A_n} \le \sum_m \beta_m 1_{B_m} = \sum_{n,m} \beta_{n,m} 1_{D_{n,m}} .$$

Másfelől

$$\sum_{m,n} |\alpha_{n,m}| \mu(D_{n,m}) = \sum_n \Big(\sum_m |\underbrace{\alpha_{n,m}}_{\alpha_n}| \mu(D_{n,m})\Big) = \sum_n |\alpha_n| \sum_m \mu(D_{n,m})$$
$$= \sum_n |\alpha_n| \mu(A_n) < \infty$$

és hasonlóan

$$\sum_{m,n} |\beta_{n,m}| \mu(D_{n,m}) = \sum_m |\beta_m| \mu(B_m) < \infty \ .$$

Abszolút konvergenciájuk következtében a $\sum_{m,n} \alpha_{n,m} \mu(D_{n,m})$ ill. $\sum_{m,n} \beta_{n,m} \mu(D_{n,m})$ összegek tetszőlegesen csoportosíthatók. Ezért

$$\sum_m \beta_m \mu(B_m) - \sum_n \alpha_n \mu(A_n) = \sum_{m,n} \beta_{n,m} \mu(D_{n,m}) - \sum_n \alpha_{n,m} \mu(D_{n,m})$$
$$= \sum_{n,m} \underbrace{\big(\beta_{n,m} - \alpha_{n,m}\big)}_{\ge 0} \mu(D_{n,m}) \ge 0 \ .$$

Definíció. A φ μ-lépcsős fgv μ-*integrál*ja

$$\int \varphi\, d\mu := \Big[\sum_n \alpha_n \mu(A_n) : \ A_1, A_2, \ldots \text{diszj} \in \mathcal{A},\ \sum_n |\alpha_n| \mu(A_n) < \infty,\ \varphi = \sum_n \alpha_n 1_{A_n}\Big].$$

Megjegyzés. A lemma mutatja, hogy az $\int d\mu$ operáció jól-definiált minden μ-lépcsős függvényre, sőt $\int \varphi\, d\mu \ge \int \psi\, d\mu$ $(\varphi \ge \psi)$.

Lemma. *A* $\varphi \mapsto \int \varphi\, d\mu$ *leképezés lineáris, azaz* μ*-lépcsős függvények lineáris kombinációi* μ*-lépcsősök, és*

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int \varphi\, d\mu + \beta \int \psi\, d\mu \qquad (\varphi, \psi \ \ \mu\text{-lépcsős}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. 1) Tegyük fel, hogy φ, ψ μ-lépcsős függvények. Az előző lemma bizonyításából látszik, hogy

$$\exists\, D_1, D_2, \ldots \text{diszj} \in \mathcal{A} \ \ \exists\, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots \quad \varphi = \sum_n \alpha_n 1_{D_n}, \ \psi = \sum_n \beta_n 1_{D_n}$$

$$\sum_n |\alpha_n| \mu(D_n), \sum_n |\beta_n| \mu(D_n) < \infty \ ,$$

$$\int \varphi\, d\mu = \sum_n \alpha_n \mu(D_n) \ , \quad \int \psi\, d\mu = \sum_n \beta_n \mu(D_n) \ .$$

Ekkor

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_n (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) 1_{D_n} \ , \quad \sum_n \overbrace{|\alpha\alpha_n + \beta\beta_n|}^{\le |\alpha| \cdot |\alpha_n| + |\beta| \cdot |\beta_n|} \mu(D_n) \le |\alpha| \sum_n |\alpha_n| \mu(D_n) +$$

$$+ |\beta| \sum_n |\beta_n| \mu(D_n) < \infty,$$

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \sum_n (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \mu(D_n)$$

$$= \alpha \sum_n \alpha_n \mu(D_n) + \beta \sum_n \beta_n \mu(D_n) = \alpha \int \varphi\, d\mu + \beta \int \psi\, d\mu \ .$$

Alsó, felső integrál

Definíció. $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *alsó* ill. *felső* μ*-integrálja*

$$\underline{\int} f d\mu := \sup\left\{ \int \varphi\, d\mu : \ \varphi \ \mu\text{-lépcsős} \le f \right\} \ ,$$

$$\overline{\int} f d\mu := \inf\left\{ \int \psi\, d\mu : \ \psi \ \mu\text{-lépcsős} \ge f \right\} \ .$$

Megjegyzés. Konvenció: $\inf \emptyset := \infty$, $\quad \sup \emptyset := -\infty$.

$$\underline{\int} \varphi\, d\mu = \overline{\int} \varphi\, d\mu, \ \text{ ha } \varphi \ \ \mu\text{-lépcsős függvény.}$$

Tétel. *Ha* f, f_1, f_2 *tetszőleges* $\Omega \to [-\infty, \infty]$ *függvények, akkor*

1) $\underline{\int} (\alpha f) d\mu = \alpha \underline{\int} f d\mu \qquad (\alpha \ge 0)$

2) $\underline{\int} (f_1 + f_2) d\mu \ge \underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu$ *valahányszor* $(\underline{\int} f_1 d\mu, \underline{\int} f_2 d\mu) \ne (-\infty, \infty)$ *vagy* $(\infty, -\infty)$.

Bizonyítás. 1) Az $\alpha = 0$ eset triviális. Ha pedig $\alpha > 0$, akkor

$$\{\alpha \cdot \varphi \ \mu\text{-lépcsős} : \ \varphi \le f\} = \{\varphi \ \mu\text{-lépcsős} : \ \varphi \le \alpha f\}.$$

2) Az $\underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu = -\infty$ eset triviális. Tegyük fel, $\underline{\int} f_k d\mu > -\infty$ $(k = 1, 2)$. Most $\{\varphi \ \mu\text{-lépcsős} : \ \varphi \le f_k\} \ne \emptyset$ $(k = 1, 2)$. Legyen $\gamma \in \left(-\infty, \underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu\right)$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor

$$\exists \varphi_1, \varphi_2 \ \mu\text{-lépcsős} \quad \varphi_k \le f_k \ \ (k = 1, 2) \ , \quad \gamma < \textstyle\sum_{k=1}^2 \underline{\int} \varphi_k\, d\mu \ .$$

Mivel ilyenkor $\varphi_1 + \varphi_2$ μ-lépcsős$\leq f_1 + f_2$,

$$\gamma < \sup\Big\{\underline{\int}\varphi\, d\mu :\ \varphi\ \mu\text{-lépcsős} \leq f_1 + f_2\Big\} = \underline{\int}(f_1 + f_2)\, d\mu\ .$$

Lemma. $\overline{\int} f d\mu = -\underline{\int}(-f) d\mu$.

Bizonyítás. Általában is: $\inf(Z) = -\sup(-Z) \qquad (Z \subset [-\infty, \infty])$.

Következmény. 1′) $\overline{\int}(\alpha f) d\mu = \alpha \overline{\int} f d\mu \qquad (\alpha \geq 0)$.
2′) $\overline{\int}(f_1 + f_2) d\mu \leq \overline{\int} f_1 d\mu + \overline{\int} f_2 d\mu$ *ha* $\big(\overline{\int} f_1 d\mu, \overline{\int} f_2 d\mu\big) \neq (-\infty, \infty)$ *vagy* $(\infty, -\infty)$.

Integrál

Definíció. Az $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ függvény *μ-integrálható*, ha

$$-\infty < \underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu < \infty .$$

f integrálja μ szerint

$$\int f d\mu := \underline{\int} f d\mu \qquad \text{ha} \quad \underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu .$$

Megjegyzés. Az $\underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu$ reláció akkor is előfordulhat, ha $\underline{\int} f d\mu = \infty$ vagy $\overline{\int} f d\mu = -\infty$. Ilyenkor azonban nem lehet μ-lépcsős függvényt találni, amely $\geq f$ ill. $\leq f$. Ezzel szemben, (az $\underline{\int}, \overline{\int}$ integrálok definícióját kifejtve) f pontosan akkor μ-integrálható, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \varphi, \psi\ \mu\text{-lépcsős} \quad \varphi \leq f \leq \psi, \quad \int \psi\, d\mu - \int \varphi\, d\mu < \varepsilon\ .$$

Propozíció. *Az integrál lineáris operáció, azaz ha f_k μ-integrálható és $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$, akkor $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k$ μ-integrálható és*

$$\int \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k d\mu = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \int f_k d\mu\ .$$

Bizonyítás. Legyenek f_1, f_2 μ-integrálhatók. Ekkor

$$\underline{\int} \alpha_k f_k\, d\mu = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_k \underline{\int} f_k\, d\mu & (\alpha_k \geq 0) \\ \underline{\int}\big(-|\alpha_k| f_k\big) d\mu = -|\alpha_k| \overline{\int} f_k\, d\mu & (\alpha_k < 0) \end{array} \right\} = \alpha_k \int f_k\, d\mu\ .$$

Hasonlóan $\overline{\int} \alpha_k f_k\, d\mu = \alpha_k \int f_k\, d\mu$. Következésképpen az $\alpha_k f_k$ függvények μ-integrálhatók, és $\int \alpha_k f_k\, d\mu = \alpha_k \int f_k\, d\mu$ $(k = 1, 2)$. Most

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_k \int f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^{2} \underline{\int} \alpha_k f_k\, d\mu \leq \underline{\int} \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k\, d\mu\ .$$

Ugyanígy $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k \int f_k\, d\mu \geq \overline{\int} \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k\, d\mu$. Azonban az alsó integrál mindig $\leq$ a felsőnél, így $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k \int f_k\, d\mu = \overline{\int} \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k\, d\mu = \underline{\int} \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f_k\, d\mu$.

Null-halmazok

Definíció. Az $\Omega, \mathcal{A}, \mu$ mértéktér $S \subset \Omega$ részhalmaza *μ-0-halmaz*, ha

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \text{ és } S \subset A .$$

Egy $T:\Omega \to \{\text{IGAZ, HAMIS}\}$ tulajdonság *μ-majdnem mindenütt* (rövidítve *μ-mm.*) teljesül, ha $\{x\in\Omega:\ T(x)=\text{HAMIS}\}$ μ-0-halmaz.

Lemma. *Ha $\overline{\int} f d\mu < \infty$, akkor $f<\infty$ μ-mm.** [$\underline{\int} f d\mu > -\infty$, $\Rightarrow$ $f > -\infty$ μ-mm.].*

Bizonyítás. Legyen $S := \{x:\ f(x)=\infty\}$. Valamilyen μ-lépcsős ψ függvényre $f\le\psi$. Felírva ezt

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n 1_{B_n} \qquad B_1,B_2,\ldots\ \text{diszj}\in\mathcal{A}\ , \qquad \beta_1,\beta_2,\ldots\in[-\infty,\infty]$$

alakban, $S\subset\{x:\psi(x)=\infty\}=\bigcup_{n:\beta_n=\infty}B_n$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n)\mu(B_n)<\infty$, minden olyan n indexre, ahol $|\beta_n|=\infty$ szükségképpen $\mu(B_n)=0$. Innen $\mu\{x:\ \psi(x)=\infty\}=\sum_{n:\beta_n=\infty}\mu(B_n)=0$.

Lemma. *Ha $f,g=\Omega\to[-\infty,\infty]$ és $f=g$ μ-mm., akkor*

$$\underline{\int} f d\mu=\underline{\int} g\, d\mu,\quad \overline{\int} f d\mu=\overline{\int} g\, d\mu .$$

Bizonyítás. Legyen f és g két μ-mm. egybeeső függvény Ω-n. Állítás:
Ha φ μ-lépcsős $\le f$, akkor $\int\varphi\, d\mu\le\underline{\int} g\, d\mu$. Bizonyítás: Vehetünk egy olyan $A\in\mathcal{A}$ halmazt, amelyre

$$\mu(A)=0 \ \text{ és }\ A\supset\{x:\ f(x)\ne g(x)\}\ .$$

Másrészről

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n 1_{A_n} \qquad A_1,A_2,\ldots\ \text{diszj}\in\mathcal{A} \qquad \alpha_1,\alpha_2,\ldots\in[-\infty,\infty]$$

írható. Ekkor a

$$\tilde\varphi := \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n 1_{\tilde A_n} \ \text{ ahol }\ \alpha_0:=-\infty,\ \tilde A_0:=A,\ \ \tilde A_n:=A_n\setminus A \qquad (n=1,2,\ldots)$$

függvény μ-lépcsős, és

$$\tilde\varphi\le g\ , \qquad \int\tilde\varphi_n d\mu=\int\varphi\, d\mu\ .$$

Az állításból azonnal következik, hogy

$$\underline{\int} g\, d\mu\ge\sup\Big\{\int\varphi\, d\mu:\ \varphi\ \mu\text{-lépcsős}\le f\Big\}=\underline{\int} f d\mu\ .$$

Innen $f\leftrightarrow g$ cserével kapjuk, hogy $\underline{\int} g\, d\mu\le\underline{\int} f d\mu$ is. A gondolatmenet $\overline{\int}$-ra analóg.

Definíció. Kiterjesztjük a μ-integrál fogalmát a μ-majdnem mindenütt értelmezett függvényekre: Ha f μ-mm. definiált, akkor

$$\underline{\int} f d\mu:=\underline{\int}\widetilde{f} d\mu\ ,\ \overline{\int} f d\mu:=\overline{\int}\widetilde{f} d\mu\ ,\ \int f d\mu:=\int\widetilde{f} d\mu$$

ahol $\widetilde{f}:x\to\big[f(x)$ ha $x\in\mathrm{dom}(f),\ 0$ ha $x\notin\mathrm{dom}(f)\big]$.

Következmény. *Egy μ-0-halmazon megváltoztatva egy μ-majdnem mindenütt értelmezett függvényt, annak μ-integrálhatósága és μ-integrálja nem változik.*

Tétel. *Egy f függvény μ-integrálható $\Leftrightarrow \exists\, g:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mérhető μ-integrálható $f=g$ μ-mm.*

---

* Részletesebben: $f(x)<\infty$ μ-majdnem minden $x\in\Omega$-ra, azaz $\{x\in\Omega:\ f(x)<\infty\}$ egy μ-0-halmaz.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Az előző lemma.
$\Rightarrow$: Legyen $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ egy μ-integrálható függvény. Ekkor találhatunk olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ill. $\psi_1, \psi_2, \ldots$ μ-lépcsős függvényeket, amelyekkel

$$\varphi_n \le f \le \psi_n \quad , \quad \int \varphi_n d\mu \, , \int \psi_n d\mu \to \int f d\mu \qquad (n \to \infty) \; .$$

Sőt itt vehető

$$\varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \; , \qquad \psi_1 \ge \psi_2 \ge \cdots$$

is, [φ_n ill ψ_n helyett a $\max_{k=1}^n \varphi_k$ ill. $\min_{k=1}^n \psi_k$ μ-lépcsős függvényekre áttérve]. Tekintsük az

$$\underline{f} := \sup_n \varphi_n \; , \quad \overline{f} := \inf_n \psi_n$$

függvénypárt. Tudjuk, hogy $\underline{f}, \overline{f}$ $\mathcal{A}$-mérhetők és $\underline{f} \le f \le \overline{f}$. Az első lemmát φ_1, ψ_1-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\exists\, A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \; , \quad A \supset \{x : \; \varphi_1(x) = -\infty\} \cup \{x : \; \psi_1(x) = \infty\} \; .$$

Véve egy ilyen A halmazt, tekintsük a

$$h := 1_{\Omega \setminus A} \overline{f} - 1_{\Omega \setminus A} \underline{f}$$

$\mathcal{A}$-mérhető függvényt. Erre

$$(1_{\Omega \setminus A} \psi_n) - (1_{\Omega \setminus A} \varphi_n) \ge h \ge 0$$

$$0 \le \overline{\int} h \, d\mu \le \int \psi_n d\mu - \int \varphi_n d\mu \downarrow 0 \qquad (n \to \infty) \; .$$

Tehát a $h \ge 0$ függvény μ-integrálható és $\int h \, d\mu = 0$. Az $A_n := \{x : \; h(x) \ge \frac{1}{n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazok a h függvény $\mathcal{A}$-mérhetősége miatt $\mathcal{A}$-beliek. Mivel $\frac{1}{n} 1_{A_n} \le h$,

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) = \int \frac{1}{n} 1_{A_n} d\mu \le \int h \, d\mu = 0 \; ,$$

azaz $\mu(A_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Innen $\mu\{x : \; h(x) \ne 0\} = \mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = 0$, vagyis $h = 0$ μ-mm. Következésképpen $1_{\Omega \setminus A} \underline{f} = f = 1_{\Omega \setminus A} \overline{f}$ μ-mm.

Átrendezési lemma

Lemma. *Legyen $\phi : \Omega \to [0, \infty)$ egy olyan $\mathcal{A}$-mérhető függvény, amelynek értékkészlete 0-n kívül egy kétirányú sorozat, nevezetesen*

$$\mathrm{ran}(\phi) = \{y_k : \; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \; , \; \textit{ahol } y_{k+1} > y_k \to 0 \quad (k \to -\infty) \; .$$

Ekkor

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \, \mu\{x : \; \phi(x) \ge y_k\} \; .$$

Bizonyítás. Az $A_n := \{x : f(x) = y_n\}$ halmazok $\mathcal{A}$-mérhetők és páronként diszjunktak. Ezért, és mivel $y_n > 0 \; \forall n$,

$$\underline{\int} \phi \, d\mu = \overline{\int} \phi \, d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mu(A_n) \; .$$

Mivel $\lim_{k \to -\infty} y_k = 0$, teleszkopikus összegként

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{n} (y_k - y_{k-1}) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \; .$$

Vagyis

$$\begin{aligned}\int \phi\, d\mu &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k\le n} (y_k - y_{k-1})\mu(A_n) = \sum_{(n,k):k\le n} (y_k - y_{k-1})\mu(A_n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n\ge k} (y_k - y_{k-1})\mu(A_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{n\ge k} \mu(A_n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1})\mu(\underbrace{\bigcup_{n\ge k} A_n}_{\{x: f(x)\ge y_k\}}) \ .\end{aligned}$$

Integrálhatósági kritériumok

Lemma. *Ha f μ-integrálható, akkor f^+ is* μ-integrálható.*

Bizonyítás. Legyen egy $\Omega \to [-\infty,\infty]$ μ-integrálható függvény és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor találhatók olyan φ,ψ μ-lépcsős függvények, hogy

$$\varphi \le f \le \psi \ , \quad \int \psi\, d\mu - \varepsilon \le \int f d\mu \le \int \varphi\, d\mu + \varepsilon \ .$$

Észrevétel: φ^+,ψ^+ μ-lépcsős függvények (ugyanis ha pl. $\varphi = \sum_n \alpha_n 1_{A_n}$ ahol $A_1, A_2, \ldots$ diszj $\in \mathcal{A}$, akkor $\varphi^+ = \sum_{n:\alpha_n>0} \alpha_n 1_{A_n}$ és $\sum_{n:\alpha_n>0} |\alpha_n|\mu A_n < \sum_n |\alpha_n|\mu A_n < \infty$). Mivel az $y \mapsto y^+$ függvény növő, $0 \le \varphi^+ \le f^+ \le \psi^+$. Így

$$\overline{\int} f^+ d\mu \le \int \psi^+ d\mu < \infty \ , \quad \underline{\int} f^+ d\mu \ge \int \varphi^+ d\mu > -\infty \ .$$

A $\beta^+ - \alpha^+ \le \beta - \alpha$ $(\beta \ge \alpha)$ egyenlőtlenség alapján pedig

$$\overline{\int} f^+ d\mu - \underline{\int} f^+ d\mu \le \int (\psi^+ - p^+)\, d\mu \le \int (\psi - \varphi)\, d\mu \le 2\varepsilon \ .$$

Az $\varepsilon > 0$ választásának tetszőlegessége miatt innen $\overline{\int} f^+ d\mu = \underline{\int} f^+ d\mu$.

Tétel. *Legyen f egy $\mathcal{A}$-mérhető függvény. Ekkor ekvivalensek*

1) *f μ-integrálható,*
2) *$\exists\, g$ $\mathcal{A}$-mérhető μ-integrálható $|f| \le g$,*
3) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : \ |f(x)| > 2^k\} < \infty$.

Bizonyítás. Ha $\mu\{x : \ |f(x)| = \infty\} \ne 0$, akkor az 1)2)3) tulajdonságok triviálisan nem teljesülnek. Mivel pedig egy függvényt μ-0-halmazon megváltoztatva annak integrálhatósági tulajdonságai nem változnak, feltehetjük a továbbiakban, hogy $|f|, g : \Omega \to [0,\infty)$.

1)$\Rightarrow$2): A lemma szerint $|f| = f^+ + (-f)^+$ μ-integrálható, ha f μ-integrálható.

2)$\Rightarrow$3): Tekintsük a

$$\begin{aligned}&\phi : x \mapsto \big[2^n \text{ ha } 2^n < g(x) \le 2^{n+1} \ (n \in \mathbb{Z}), \ \ 0 \text{ ha } g(x) = 0\big] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n 1_{\{x:\ 2^n < g(x) \le 2^{n+1}\}}\end{aligned}$$

* A *pozitiv rész* $z^+ := \big[z \text{ ha } z \ge 0, \ 0 \text{ ha } z < 0\big]$, a *negativ rész* $z^- := (-z)^+$.

függvényt. Mivel $g : \Omega \to [0,\infty)$ $\mathcal{A}$-mérhető, a ϕ függvény jól-definiált, $\mathcal{A}$-mérhető és $\phi \le g$. Feltevés szerint g μ-integrálható, így

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu\{x : 2^n < g(x) \le 2^{n+1}\} = \int \phi d\mu \le \int g d\mu < \infty \ ,$$

Az átrendezési lemma szerint

$$\begin{aligned}\int \phi\, d\mu &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^k - 2^{k-1})\, \mu\{x : \phi(x) \ge 2^k\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\mu\{x : \phi(x) \ge 2^k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\mu\{x : \phi(x) > 2^{k-1}\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\mu\{x : g(x) > 2^{k-1}\} \ge \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\mu\{x : |f(x)| > 2^{k-1}\} \ .\end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 1): Vehető $f \ge 0$, mivel 3) pontosan akkor teljesül f-re, amikor f^+-re és f^--re. Az összes $q > 1$ együtthatóra vezessük be a

$$\varphi_q := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{\{x:\ q^n < f(x) \le q^{n+1}\}} \ , \quad \psi_q := q \cdot \varphi_q \qquad (q > 1)$$

lépcsős függvényeket. Hasonlóan, mint imént a ϕ függvényét, láthatjuk ezek jól-definiáltságát. Mivel $\varphi_q(x) = q^n < f(x) \le q^{n+1} = \psi_q(x)$ valahányszor $f(x) \in (q^n, q^{n+1}]$ valamilyen n-re, $\varphi_q \le f \le \psi_q$ minden $q > 1$ mellett. Sőt

$$\varphi_2 \le \varphi_{\sqrt{2}} \le \varphi_{\sqrt[4]{2}} \le \cdots \quad \le f \quad \le \cdots \le \psi_{\sqrt[4]{2}} \le \psi_{\sqrt{2}} \le \psi_2 \ .$$

Ha 3) áll, akkor az átrendezési lemma szerint

$$\textstyle\int \varphi_2\, d\mu < \infty \ , \quad \int \psi_2\, d\mu = \int 2\, \varphi_2\, d\mu < \infty \ .$$

Tehát ilyenkor

$$\int (\psi_{\sqrt[2^n]{2}} - \varphi_{\sqrt[2^n]{2}}) d\mu = \big(\sqrt[2^n]{2} - 1\big) \int \varphi_{\sqrt[2^n]{2}} d\mu \le \big(\sqrt[2^n]{2} - 1\big) \int \psi_2 d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

azaz az f felett és alatt elhelyezkedő μ-lépcsős függvények integrálkülönbsége tetszőlegesen kicsiny lehet.

Következmény. *Ha $f \ge 0$ egy $\mathcal{A}$-mérhető μ-integrálható függvény, akkor*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x :\ f(x) > 2^k\} \le \int f\, d\mu \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1}\mu\{x :\ f(x) > 2^k\} \ .$$

Diszkrét Lebesgue tétel

A következő tétel (amely az integrálszámítás alaptételének speciális esete) tisztán sorelméleti, azonban egyszerűsége ellenére ebben a formában ritkán szerepel a sorelméleti bevezetőkben.

Legyenek $n = 1, 2, \ldots$-re $a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + \cdots$ abszolút konvergens sorok, amelyek tagonként is konvergálnak: $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots \to a_i$ minden rögzített i indexre. Azaz

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1^{(1)} & + & a_2^{(1)} & + & a_3^{(1)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} \\
a_1^{(2)} & + & a_2^{(2)} & + & a_3^{(2)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_1^{(n)} & + & a_2^{(n)} & + & a_3^{(n)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & = & ?
\end{array}$$

Tétel. *Ha létezik olyan* $c_1, c_2, \ldots \geq 0$ *sorozat, amelyre*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty \quad , \qquad \sup_n |a_i^{(n)}| \leq c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \; ,$$

akkor

$$\sum_i a_i^{(n)} \to \sum_i a_i \qquad (n \to \infty).$$

Bizonyítás. Mivel $|a_i| = \lim_n |a_i^{(n)}| \leq c_i$ minden i-re, $\sum_i |a_i| < \infty$ és így akármilyen I indexnél felbontva

$$\begin{aligned}
|\sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i| \leq \sum_i |a_i^{(n)} - a_i| &= \sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} |a_i^{(n)} - a_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i \qquad (n = 1, 2, \ldots) \; .
\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel $\sum_i c_i < \infty$, választható I úgy, hogy

$$\sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Mivel pedig most $\lim_n (a_i^{(n)} - a_i) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, I)$, található olyan N küszöb, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > N) \; .$$

Ekkor $\left|\sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i\right| < \varepsilon$ minden $n > N$ indexű sorra.

Következmény. *Ha minden* i *indexre* $0 \leq a_i^{(n)} \uparrow a_i \quad (n \to \infty)$, *akkor* $\sum_i a_i = \lim_n \sum_i a_i^{(n)}$.

Bizonyítás. Ha $\sum_i a_i < \infty$, akkor a tételt alkamazhatjuk $c_i := a_i \;\; (i = 1, 2, \ldots)$ mellett. Ha $\sum_i a_i = \infty$, akkor minden I-re $\lim_n \sum_i a_i^{(n)} \geq \lim_n \sum_{i=1}^{I} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{I} a_i$. Itt a jobb oldal $\to \infty$ ha $I \to \infty$.

Markov egyenlőtlenség

Lemma. *Ha* $f \geq 0$ *egy* $\mathcal{A}$*-mérhető* μ*-integrálható függvény, akkor bármely* $y > 0$ *számra*

$$\mu\{x: \ f(x) \geq y\} \leq \frac{1}{y} \int f \, d\mu \ .$$

Bizonyítás. Az $A := \{x: \ f(x) \geq y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: \ f(x) > y - 1/n\}$ halmaz $\mathcal{A}$-mérhető, és

$$y \cdot 1_A \leq f \quad .$$

A 2) integrálhatósági kritérium szerint az $y \cdot 1_A$ függvény μ-lépcsős. Így

$$y \cdot \mu(A) = \int y \cdot 1_A \, d\mu \leq \int f \, d\mu \ .$$

Fatou lemma

Lemma. *Tegyük fel, hogy* $g_1 \geq g_2 \geq \cdots$ μ*-integrálható* $\mathcal{A}$*-mérhető függvények, amelyekre* $g_n \downarrow 0 \quad (n \to \infty)$. *Ekkor* $\int g_n \, d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Bizonyítás. Tekintsük az integrálhatósági kritériumok 3) $\Rightarrow$ 1) implikációjában használt ψ_2-nek megfelelő függvényeit $g_1, g_2, \ldots$-nek:

$$\psi_{2,n} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \cdot 1_{\{x: \ 2^k < g(x) \leq 2^{k+1}\}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ .$$

Tudjuk: $\psi_{2,n}$ μ-lépcsős $\geq g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Észrevétel: Minden rögzített $k \in \mathbb{Z}$ indexre

$$\{x: \ g_1(x) > 2^k\} \supset \{x: \ g_2(x) > 2^k\} \supset \cdots$$

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: \ g_n(x) > 2^k\} \qquad (\Leftarrow g_n \downarrow 0)$$

$$\mu\{x: \ g_n(x) > 2^k\} \searrow \mu(\emptyset) = 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Tehát az átrendezési lemmát majd a diszkrét Lebesgue tételt alkalmazva

$$0 \leq \int g_n \, d\mu \leq \int \psi_{2,n} \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \mu\{x: \ g_n(x) > 2^k\}$$

$$\to \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \cdot 0 = 0 \ .$$

Beppo Levi tétel

Lemma. *Ha* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *és* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, *akkor* $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_k)$.

Bizonyítás. Találhatók $D_1, D_2, \ldots$ diszj $\in \mathcal{A}$, amelyekre $A_n = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$. Ekkor

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(D_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N) \ .$$

Tétel. *Ha* $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ $\mathcal{A}$*-mérhető* μ*-integrálható függvények és* $\sup_n \int f_n\,d\mu < \infty$*, akkor a* $\sup_n f_n$ *felső burkoló függvény* μ*-integrálható és*

$$\int \sup_n f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \ .$$

Bizonyítás. Legyen $I := \sup_n \int f_n\,d\mu (= \lim_n \int f_n\,d\mu)$ és $f := \sup_n f_n$. Tudjuk: f $\mathcal{A}$-mérhető. A Integrálhatósági kritériumok c. alfejezetbeli következmény szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x:\ f_n(x) > 2^k\} \le \int f_n\,d\mu \le I \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ .$$

Egy tetszőlegesen rögzített k indexre

$$\{x:\ f_1(x) > 2^k\} \subset \{x:\ f_2(x) > 2^k\} \subset \cdots \ ,$$

$$\{x:\ f(x) > 2^k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x:\ f(x) > 2^k\} \ .$$

A lemma alapján

$$\mu\{x:\ f_n(x) > 2^k\} \nearrow \mu\{x\ : f(x) > 2^k\} \qquad (n \to \infty) \ .$$

A diszkrét Lebesgue tétel következménye szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : f_n(x) > 2^k\} \nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x:\ f(x) > 2^k\} \qquad (n \to \infty)$$

$$\le I \ < \ \infty \ .$$

Így a 3) kritérium szerint az f függvény μ-integrálható. Minthogy $f - f_n \downarrow 0$, a Fatou lemma alapján $\int f d\mu - \int f_n\,d\mu \to 0$.

Következmény. *Ha* $f_1, f_2, \ldots$ μ*-integrálható függvények növő vagy csökkenő sorozata és* $\{\int f_n\,d\mu :\ n = 1, 2, \ldots\}$ *korlátos*$\subset \mathbb{R}$*, akkor az* $f := \lim_n f_n$ *függvény* μ*-integrálható és* $\int f d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu$.

Bizonyítás. Egy μ-0-halmazon való változtatás után vehetjük, hogy az összes $f, f_1, f_2, \ldots$ függvények $\mathcal{A}$-mérhetők. Alkalmazzuk a növő esetben a $0 = f_1 - f_1 \le f_2 - f_1 \le f_3 - f_1 \le \cdots$, a csökkenő esetben a $0 = f_1 - f_1 \le f_1 - f_2 \le f_1 - f_3 \le \cdot$ függvénysorozatra a tételt.

Lebesgue tétel

Tétel. *Legyenek* $f_1, f_2, \ldots$ μ*-integrálható függvények és*

$$f_n \to f \ \ \mu\text{-mm.} \quad (n \to \infty).$$

Tegyük fel, hogy van olyan μ*-integrálható* g *függvény, amelyre*

$$|f_n| \le g \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor $f, f_1, f_2, \ldots$ μ*-integrálhatók és*

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu \qquad (n \to \infty).$$

Bizonyítás. Egy μ-0-halmazon való változtatás után feltehetjük, hogy az összes $f, f_1, f_2, \dots$ függvények $\mathcal{A}$-mérhetők, és $f_n \to f$ mindenütt Ω-n. Legyen

$$g_N := \sup_{n \geq N} f_n \qquad (N = 1, 2, \dots).$$

Tudjuk: $f, g_1, g_2, \dots$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények és $g_n \downarrow f \quad (N \to \infty)$. A 2) integrálhatósági kritérium szerint $f, g_1, g_2, \dots$ μ-integrálhatók. A Fatou lemmát $g_1 - f, g_2 - f, \dots$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\int (g_N - f)\, d\mu \searrow 0$, azaz

$$\int g_N \, d\mu \searrow \int f d\mu \qquad (N \to \infty) .$$

Mivel $g_N \geq f_N$ minden N indexre,

$$\int f d\mu = \lim_{N \to \infty} \int g_N \, d\mu \geq \limsup_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu .$$

A gondalatmenetet f_n helyett $-f_n$-re alkalmazva, $\limsup_{N \to \infty} \int (-f_N)\, d\mu \leq - \int f d\mu$, azaz

$$\int f d\mu \leq \liminf_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu$$

(hiszen általában is, $\limsup_{N \to \infty} (-a_N) = - \liminf_{N \to \infty} a_N$ a számsorozatokra). Vagyis

$$\limsup_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{N \to \infty} \int f_N d\mu .$$

Ugyanakkor itt a $\limsup_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu \geq \liminf_{N \to \infty} \int f_N \, d\mu$ egyenlőtlenség triviális.

Következmény. *Ha $f_1, f_2, \dots$ μ-integrálhatók, $f_n \to f$ μ-mm. továbbá*

$$\sup_N \int \max_{k=1}^N f_k \, d\mu < \infty \quad \textit{és} \quad \inf_N \int \min_{k=1}^N f_k \, d\mu > -\infty$$

(vagy egyszerre $\sup_N \int \max_{k=1}^N |f_k| \, d\mu < \infty$), akkor az f limes μ-integrálható és

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu .$$

Bizonyítás. Jegyezzük meg mindenek előtt, hogy egy μ-0-halmazon való változtatással feltehető az összes szereplő függvények $\mathcal{A}$-mérhetősége. Mivel pedig

$$-|f_1| - \dots - |f_N| \leq \min_{k=1}^N \leq \max_{k=1}^N f_k \leq |f_1| + \dots + |f_n| ,$$

a 2) integrálhatósági kritérium szerint a $\max_{k=1}^N f_k$ ill. $\min_{k=1}^N f_k$ függvények mind μ-integrálhatók. A Beppo Levi tétel értelmében a

$$h_1 := \sup_n f_n = \sup_N \max_{k=1}^N f_k \quad , \quad h_2 := \sup_n f_n = \sup_N \min_{k=1}^N f_k$$

felső ill. alsó burkoló függvények μ-integrálhatók. Most a $g := h_1 + h_2$ függvénnyel alkalmazhatjuk a tételt.

æ

MÉRTÉK KONSTRUKCIÓJA

Legyen az egész fejezeten keresztül tetszőlegesen rögzítve az $\Omega \neq \emptyset$ halmaz, és legyen

$$\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty] \qquad \text{ahol} \quad \emptyset \neq \mathcal{T} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\} \ .$$

Lefedési kiterjesztés

Definíció. A τ halmazfüggvény *lefedési kiterjesztés*e a

$$\overline{\tau}(X) := \inf\{\textstyle\sum_{T\in\mathcal{F}} \tau(T) : \ \mathcal{F} \text{ megszáml}\subset \mathcal{T} \ , \ \bigcup \mathcal{F} \supset X\}.$$

halmazfüggvény, amely Ω összes részhalmazára jól-definiált.*

Tétel. 1) *Ha* $\emptyset \in \mathcal{T}$ *és* $\tau(\emptyset) = 0$, *akkor* $\overline{\tau}(T) \leq \tau(T) \qquad (T \in \mathcal{T})$.

2) $\overline{\tau}\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big) \leq \sum_{n=1}^\infty \overline{\tau}(X_n) \qquad (X_1, X_2, \ldots \subset \Omega)$.

Bizonyítás. 1) Mivel $T = T \cup \bigcup_{n=1}^\infty \emptyset$, ilyenkor $\overline{\tau}(T) \leq \tau(T) + \sum_{n=1}^\infty \tau(\emptyset) = \tau(T)$.

2) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Bontsuk ezt fel megszámlálható részre:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0 \ : \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots \ .$$

Mindegyik n indexhez válasszunk egy olyan $\mathcal{F}_n$ megszáml$\subset \mathcal{T}$ halmazcsaládot, amelyre

$$\bigcup \mathcal{F}_n \supset X_n \ , \quad \sum_{T\in\mathcal{F}_n} \tau(T) \leq \overline{\tau}(X_n) + \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ .$$

Ekkor az $\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ család megszámlálható és $\bigcup \mathcal{F} \supset \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Ezért

$$\begin{aligned} \overline{\tau}\Big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\Big) &\leq \sum_{T\in\mathcal{F}} \tau(T) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{T\in\mathcal{F}_n} \tau(T) \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \big[\overline{\tau}(X_n) + \varepsilon_n\big] = \sum_{n=1}^\infty \overline{\tau}(X_n) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Definíció. A $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ halmazfüggvény *előmérték* (Ω fölött), ha

$$\emptyset \in \mathcal{T}, \quad \tau(\emptyset) = 0 \quad \text{és} \quad \overline{\tau}(T) = \tau(T) \quad (T \in \mathcal{T}).$$

Tétel. *Az* $\mathbb{R}$ *nyitott intervallumain értelmezett*

$$\lambda((a,b)) := b - a \qquad (-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$$

halmazfüggvény előmérték.

Bizonyítás. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ számot véve, $\lambda(\emptyset) = \lambda((a,a)) = a - a = 0$.

Legyen a nem-üres (a,b) intervallum és az $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ lefedése (a,b)-nek adott (tetszőlegesen). Most ha $a', b' \subset \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a < a' < b' < b$, akkor $\bigcup \mathcal{I} \supset [a', b']$, és így a Borel befedési tétel szerint

* Konvenció: $\inf \emptyset := \infty$. Az $\mathcal{F}$ megszáml$\subset \mathcal{T}$ kifejezés az $\mathcal{F}$ *megszámlálható részhalmaza* $\mathcal{T}$-nek kijelentést rövidíti.

$$\exists\, I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_K} \in \mathcal{I} \qquad \bigcup_{k=1}^{K} I_{n_k} \supset [a', b'] \ , \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda(I_{nk}) > b' - a' \ .$$

Tehát $\sum_{I\in\mathcal{I}} \lambda(I) \geq \sup\{b'-a' :\ a < a' < b' < b\} = b - a = \lambda\big((a,b)\big)$.

Külső mérték, mérhetőség

Definíció. A $\kappa : \big\{\Omega \text{ részhalmazai}\big\} \to [0,\infty]$ halmazfüggvény *külső mérték* (Ω fölött), ha

$$\kappa(\emptyset) = 0\ , \quad \kappa\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(X_n) \qquad (X_1, X_2, \ldots \subset \Omega).$$

Megjegyzés. 1) Láttuk: τ előmérték $\Rightarrow \overline{\tau}$ külső mérték.

2) κ külső mérték $\Leftrightarrow \overline{\kappa} = \kappa$. Azaz a külső mértékek pontosan az összes részhalmazra értelmezett előmértékek.

Probléma. Keresendő olyan $\mathcal{A}$ σ-algebra$\subset$ $\big\{\Omega \text{ részhalmazai}\big\}$, amelyre $\kappa|\mathcal{A}$ mérték.

Definíció. Legyen κ egy külső mérték (Ω fölött). Az $A \subset \Omega$ halmaz *κ-mérhető*, ha

$$\kappa(X) = \kappa(X \backslash A) + \kappa(X \cap A) \qquad (X \subset \Omega)\ .$$

Jelölés: $\mathcal{A}_\kappa := \big\{\kappa\text{-mérhetők}\big\}$ $\big(= \big\{\Omega\ \kappa\text{-mérhető részhalmazai}\big\}\big)$.

Lemma. *Ha κ külső mérték és $A_1, A_2, \ldots$ diszj$\in \mathcal{A}_\kappa$, akkor*

$$\kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n)\,.$$

Bizonyítás. Legyen κ egy külső mérték Ω-n és $A_1, A_2, \ldots$diszj$\in \mathcal{A}_\kappa$. Mivel κ külső mérték,

$$\kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n)\ .$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
A_1 \in \mathcal{A}_\kappa\ , \Rightarrow\ & \kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \kappa(A_1) + \kappa(A_2 \cup A_3 \cup \cdots) \\
A_2 \in \mathcal{A}_\kappa\ , \Rightarrow\ & \kappa(A_2, \cup A_3 \cup \ldots) = \kappa(A_2) + A_3 \cup A_4 \cup \cdots) \\
& \kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \kappa(A_1) + \kappa(A_2) + \kappa(A_3 \cup A_4 \cup \cdots) \\
& \vdots \\
& \kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \kappa(A_1) + \cdots + \kappa(A_N) + \kappa(A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup \cdots) \\
& \qquad \geq \sum_{n=1}^{m} \kappa(A_n)
\end{aligned}$$

tetszőleges N-re. Innen $\kappa\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n)$.

Tétel. *Legyen κ külső mérték Ω fölött. Ekkor $\mathcal{A}_\kappa$ σ-algebra Ω-n.*

Bizonyítás. 1) $A \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Ha $X \subset \Omega$, akkor

$$\kappa(X) = \kappa(X \cap A) + \kappa(X \setminus A) = \kappa(X \setminus (\Omega \setminus A)) + \kappa(X \cap (\Omega \setminus A)).$$

2) $A, B \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Legyenek

$$\begin{array}{ll} X_1 := X \cap (A \cap B) & X_2 := X \cap (B \setminus A) \\ X_3 := X \cap (A \setminus B) & X_4 := X \setminus (A \cup B). \end{array}$$

Belátandó: $\kappa(X_1 \cup \cdots \cup X_4) = \kappa(X_1) + \kappa(X_2 \cup X_3 \cup X_4)$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_1 \cup X_2) &= \kappa((X_1 \cup X_2) \cap A) + \kappa((X_1 \cup X_2) \setminus A) \\ &= \kappa(X_1) + \kappa(X_2) \\ \kappa(X_3 \cup X_4) &= \kappa(X_3) + \kappa(X_4) \quad \text{ugyanígy}. \\ B \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_1 \cup \cdots \cup X_4) &= \kappa(X) = \kappa(X \cap B) + \kappa(X \setminus B) \\ &= \kappa(X_1 \cup X_2) + \kappa(X_3 \cup X_4) \\ & \kappa(X_1) + \cdots + \kappa(X_4) \ . \end{aligned}$$

X helyett az előbbi gondolatmenetet $X_2 \cup X_3 \cup X_4$-re alkalmazva,

$$\kappa(X_2 \cup X_3 \cup X_4) = \kappa(X_2) + \kappa(X_3) + \kappa(X_4).$$

3) $A_1, A_2, \ldots$ diszj$\in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Legyen

$$X_0 := X \setminus \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ X_1 := X \cap A_1, \ X_2 := X \cap A_2, \ldots.$$

Belátandó: $\kappa(X_0 \cup X_1 \cup \cdots) = \kappa(X_0) + \kappa(X_1 \cup X_2 \cup \cdots)$.

$$\begin{aligned} A_1 \in \mathcal{A}_\kappa \ , \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \cdots) &= \kappa(X_1) + \kappa(X_0 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots) \\ A_2 \in \mathcal{A}_\kappa \ , \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots) &= \kappa(X_2) + \kappa(X_0 \cup X_3 \cup X_4 \cup \cdots) \\ \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \ldots) &= \kappa(X_1) + \kappa(X_2) + \kappa(X_0 \cup X_3 \cup X_4) \\ \vdots \\ A_n \in \mathcal{A}_\kappa \ , \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \cdots) &= \kappa(X_1) + \cdots + \kappa(X_n) + \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad + \kappa(\underbrace{X_0 \cup X_{n+1}}_{\geq \kappa(X_0)} \cup X_{n+2} \cup \cdots) \ , \end{aligned}$$

azaz

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_0) + \kappa(X_1) + \cdots \kappa(X_n) \qquad \forall n.$$

Mivel κ külő mérték, $\kappa(X_0 \cup X_1 \cup \cdots) \leq \kappa(X_0) + \kappa(X_1) + \cdots$, és így

$$\kappa(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(X_n).$$

X helyett ezt $X_1 \cup X_2 \cup \ldots$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\kappa(X_1 \cup X_2 \cup \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(X_n).$$

4) Általában is 1)2)3) $\Rightarrow \mathcal{A}_\kappa$ σ-algebra.

Mérték reguláris előmértékből

Definíció. A $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ előmérték (Ω fölött) *reguláris*, ha

$$\tau(T) \geq \overline{\tau}(T \setminus U) + \overline{\tau}(T \cap U) \qquad (T, U \in \mathcal{T}).$$

Tétel. *Ha $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ egy reguláris előmérték, akkor minden $\mathcal{T}$-beli halmaz $\overline{\tau}$-mérhető, azaz $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}_{\overline{\tau}}$.*

Bizonyítás. Legyen $X \subset \Omega$ és $T \in \mathcal{T}$ tetszőlegesen adott. Belátandó:

$$\overline{\tau}(X) = \overline{\tau}(X \setminus T) + \overline{\tau}(X \cap T).$$

Mivel $\overline{\tau}$ külső mérték, itt a $\leq$ reláció definíció szerint áll. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Állítás:

$$\overline{\tau}(X \cap T) + \overline{\tau}(X \setminus T) \leq \overline{\tau}(X) + \varepsilon.$$

(Innen a tétel azonnal jön). Bizonyítás: Találhatók $U_1, U_2, \ldots, \mathcal{T}$ úgy, hogy

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) < \overline{\tau}(X) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Vegyünk egy olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$ rendszert, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon/4$. Mivel a τ előmérték reguláris, $n = 1, 2, \ldots$-re rendre

$$\begin{array}{ll}
\exists\; U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots \in \mathcal{T} & \exists\; T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \ldots \in \mathcal{T} \\
\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)} \supset U_k \setminus T & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) < \overline{\tau}(U_n \setminus T) + \varepsilon_n \\
\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^{(n)} \supset U_n \cap T & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tau T_k^{(n)}) < \overline{\tau}(U_n \cap T) + \varepsilon_n\,.
\end{array}$$

Ekkor

$$\bigcup^{\infty} n, k = 1 U_k^{(n)} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \setminus T] \supset X \setminus T \qquad \bigcup_{n,k=1}^{\infty} T_k^{(n)} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \cap T] \supset X \cap T$$

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} [\overline{\tau}(U_n \setminus T) + \varepsilon_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\tau}(U_n \setminus T) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (T_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\tau}(U_n \cap T) + \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{ugyanígy}\,.$$

Vagyis, a harmadik lépésben kihasználva τ regularitását,

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}(X \cap T) + \overline{\tau}(X \setminus T) &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) + \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} [\overline{\tau}(U_n \setminus T) + \overline{\tau}(U_n \cap T)] + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\tau}(X) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Lebesgue mérték

Tétel. *A nyitott intervallumok hossza reguláris előmérték* $\mathbb{R}$*-en.*

Bizonyítás. Mint a Lefedési kiterjesztés alfejezet példájában, használjuk a szokásos

$$\lambda : \{\text{nyitott intervallumok}\} \to [0,\infty] , \qquad \lambda(I) := [I \text{ hossza}]$$

jelölést. Láttuk: λ előmérték $\mathbb{R}$-en. Észrevétel: A $-\infty \le a < b \le \infty$ végpontú intervallumokra

$$\overline{\lambda}\big((a,b]\big) = \overline{\lambda}\big([a,b)\big) = \overline{\lambda}\big([a,b]\big) = \lambda\big((a,b)\big) = b-a .$$

Bizonyítás: Nem-korlátos intervallum $\overline{\lambda}$-mértéke $=\infty$, mert a belseje egy nem-korlátos nyitott intervallum. Ha $-\infty < a < b < \infty$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra $(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \supset [a,b]$, ahonnan

$$b-a = \lambda\big((a,b)\big) = \overline{\lambda}\big((a,b)\big) \le \overline{\lambda}\big([a,b]\big) \le \overline{\lambda}\big((a-\varepsilon,b+\varepsilon)\big) = b-a+2\varepsilon .$$

Az észrevétel alapján,

$$\lambda(I) = \overline{\lambda}(I\cap J) + \overline{\lambda}(I \setminus J) \qquad (I, J \text{ nyitott intervallum} \subset \mathbb{R}) .$$

Definíció. A $\overline{\lambda}|\mathcal{A}_{\overline{\lambda}}$ mérték neve 1-dimenziós *Lebesgue mérték*. Az $\mathcal{A}_{\overline{\lambda}}$ halmaz-család tagjai az $\mathbb{R}$-beli *Lebesgue mérhető* halmazok. Szokásos $A \in \mathcal{A}_{\overline{\lambda}}$ esetén $\overline{\lambda}(A)$ helyett is $\lambda(A)$-t írni.

Tétel. 1) *A Lebesgue mérték szerinti integrál kiterjesztése a Riemann integrálnak.*

2) *Az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény Riemann integrálható pontosan akkor, ha* λ*-majdnem mindenütt folytonos továbbá korlátos és egy véges intervallumon kívül eltűnik.*

Bizonyítás. 1) Legyen f egy Riemann integrálható függvény $\mathbb{R}$-en. A Darboux-féle

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \inf f\big([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})\big) \cdot 1_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})} , \\ \psi_n &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup f\big([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})\big) \cdot 1_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})} \end{aligned}\right. \qquad (n=1,2,\dots)$$

alsó ill. felső közelítő függvények λ-lépcsősök (csak véges sok tag $\neq 0$ ezekben az összegekben) és

$$\int \psi_n \, d\lambda - \int \varphi_n \, d\lambda \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így az integrálható definíciója utáni megjegyzés szerint f λ-integrálható.

2) Tegyük fel, hogy f egy Riemann integrálható függvény $\mathbb{R}$-en. Mivel a véges I intervallumok 1_I indikátorfüggvényei tetszőleges pontossággal közelíthetők folytonos függvényekkel alulról és felülről integrálban (Riemann- vagy Lebesgue-itt ugyanaz), találhatók olyan $\underline{f}_1, \overline{f}_1, \underline{f}_2, \overline{f}_2, \ldots \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvények, amelyekre

$$\begin{aligned} &\underline{f}_n \le \varphi_n \le f \le \psi_n \le \overline{f}_n \\ &\int (\varphi_n - \underline{f}_n)\, d\lambda,\ \int (\overline{f}_n - \psi_n)\, d\lambda \le \frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\dots) . \end{aligned}$$

az előbb használt Darboux függvényekkel. Tekintsük az

$$\underline{f} := \sup_n \underline{f}_n \ , \quad \overline{f} := \inf_n \overline{f}_n$$

burkoló függvényeket.

$$\int f \, d\lambda = \lim_n \int \varphi_n \, d\lambda = \lim_n \int \underline{f}_n \, d\lambda \le \int \underline{f} \, d\lambda \le \int f \, d\lambda$$

azaz $\int \underline{f} \, d\lambda = \int f \, d\lambda$. Hasonlóan, $\int \overline{f} \, d\lambda = \int f \, d\lambda$. Tehát

$$\int (\overline{f} - \underline{f}) \, d\lambda = 0 \ , \quad \overline{f} - \underline{f} \ge 0,$$

ami csak úgy lehet, hogy $\overline{f} = \underline{f} = f$ λ-majdnem mindenütt. Tudjuk: folytonos függvények sup-a alulról-, inf-a felülről folytonos. Nevezetesen az $\overline{f}$ függvény alulról, $\underline{f}$ pedig felülről folytonos, azaz

$$\underline{f}(x) \ge \limsup_{h \to 0} \underline{f}(x+h) \ , \quad \overline{f}(x) \le \liminf_{h \to 0} \overline{f}(x+h) \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Mivel $\underline{f} \le f \le \overline{f}$, az f függvény így folytonos minden olyan x helyen, ahol $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$. Ez azonban, mint láttuk, λ-mm. bekövetkezik. Másrészt a Riemann integrálhatóság definiciója megköveteli, hogy $|f| \le M \cdot 1_I$ valamely $M < \infty$ és korlátos I intervallum mellett.

Fordítva: Legyen f λ-mm. folytonos, $|f| \le M \cdot 1_I$ ahol I egy korlátos zárt intervallum és $M < \infty$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy I végpontjai racionálisak. Az $S := \{x : \ f \text{ nem folyt. } x\text{-nél}\} \subset I$ 0-halmaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett lefedhető ε összhosszúságú nyitott intervallumok megszámlálható G_ε uniójával. Minden $x \in I \setminus G_\varepsilon$ ponthoz válasszunk egy olyan racionális végpontú $I_x + [a_x, b_x)$ intervallumot x körül, amelyen az itt folytonos f függvény ε-nál kevesebet változik ($\sup f(I_x) - \inf(I_x) < \varepsilon$). Mivel a G_ε halmaz nyitott, $I \setminus G_\varepsilon$ mindig kompakt. Így vehető véges sok $x_1, \dots, x_N$ úgy, hogy

$$H_\varepsilon := I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n} \supset I \setminus G_\varepsilon \, .$$

Minthogy az I_{x_k} intervallumok és I végpontjai racionálisak, mind előállnak valmilyen közös q_ε nevezővel $[p/q_\varepsilon, (p+1)/q_\varepsilon)$ alakú intervallumokból. Most a $\varphi_{q_\varepsilon}, \psi_{q_\varepsilon}$ alsó- és felső Darboux függvények integrálkülönbségére

$$\begin{aligned}
\int (\psi_{q_\varepsilon} - \varphi_{q_\varepsilon}) \, d\lambda &= \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Big[\sup f\big([\frac{p}{q_\varepsilon}, \frac{(p+1)}{q_\varepsilon})\big) - \sup f\big([\frac{p}{q_\varepsilon}, \frac{(p+1)}{q_\varepsilon})\big) \Big] \\
&\le \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p : \ [p/q_\eta, (p+1)/\varepsilon) \subset H_\varepsilon} \varepsilon \quad + \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p : \ [p/q_\eta, (p+1)/\varepsilon) \subset I \setminus H_\varepsilon} 2M \\
&= \lambda(H_\varepsilon) \cdot \varepsilon + \lambda(I \setminus H_\varepsilon) \cdot 2M \le \varepsilon \cdot \lambda(H_\varepsilon) + 2M \cdot \lambda(G_\varepsilon) \\
&\le \varepsilon \cdot \lambda(I) + 2M \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \big(\lambda(I) + 2M\big) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) \ .
\end{aligned}$$

Jelölés. Az $\int f \, d\lambda$ absztrakt írásmód helyett általában a szuggesztívebb $\int f(x) \, dx$-et használjuk.

Következmény. *Ha* $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Riemann integrálható függvények, amelyekre* $|f_n| \le M < \infty$ $n = 1, 2, \ldots)$ *és* $f_n \to f$ *egy* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényre, akkor*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (n\to\infty)\,.$$

Bizonyítás. Lebesgue tétele alkalmazható az $1_{[a,b]}f_1, 1_{[a,b]}f_2, \dots$ függvénysorozatra a $g := M\cdot 1_{[a,b]}$ majoránssal.

Példa. Ha $f:(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$ egy korlátos Borel függvény, amely a második változója szerint korlátosan parciálisan differenciálható, akkor a $t\mapsto \int_0^1 f(x,t)dt$ függvény jól-definiált és differenciálható az egész $(0,1)$-en és

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(x,t)\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx\ .$$

Bizonyítás. Minden rögzít ett $t\in(0,1)$ mellett az $x\mapsto f(x,t)$ függvény Borel mérhető és korlátos, így Lebesgue integrálható. Sőt

$$\left|\frac{f(x,t')-f(x,t)}{t'-t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\vartheta_{x,t',t})\right| \le \sup\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \qquad \big(x,t',t\in(0,1)\big)$$

a Lagrange középérték tétel alapján $\big(\exists\,\vartheta_{x,t',t}\in(0,1)\big)$. Ha tehát $t_1,t_2,\dots\to t$, akkor alkalmazható Lebesgue tétele a

$$\phi_n := \frac{f(\,.\,,t_n)-f(\,.\,,t)}{t_n-t} \to \frac{\partial f}{\partial t}(\,.\,,t) \qquad (n\to\infty)$$

korlátos intervallumon korlátos függvénysorozatra.

Stieltjes mértékek

Legyen I egy intervallum $\mathbb{R}$-ben és $\alpha: I\to\mathbb{R}$ egy növő *balról* folytonos függvény, és legyen

$$\begin{aligned}\tau_\alpha:\ &\{[a,b)\subset I:\ \ a\le b\ \}\to\mathbb{R}\\ &[a,b)\mapsto \alpha(b)-\alpha(a)\ .\end{aligned}$$

Tétel. *A τ_α halmazfüggvény reguláris előmérték,*

$$\overline{\tau}_\alpha\big((a,b)\big) = \lim_{x\downarrow a}[\alpha(b)-\alpha(x)]\ , \qquad \overline{\tau}_\alpha\big([a,b]\big) = \lim_{y\uparrow b}[\alpha(y)-\alpha(a)]\ ,$$

$$\overline{\tau}_\alpha((a,b)) = \lim_{x\downarrow a}\lim_{y\uparrow b}[\alpha(y)-\alpha(x)]\ .$$

Bizonyítás. Lemásolható az $\alpha(x)\equiv x$ súlyfüggvénynek megfelelő Lebesgue-eset tárgyalása.

Definíció. Az $\overline{\alpha}|\mathcal{A}_{\overline{\alpha}}$ mérték az α *súlyfüggvény Stieltjes mértéke* (az I intervallumon).

Jelölés. $\int_I f(x)\,d\alpha(x) := \int f\,d\overline{\tau}_\alpha \qquad (f\ \ \overline{\tau_\alpha}|\mathcal{A}_{\overline{\tau}_\alpha}$-integrálható$)$.

Propozíció. *Az I-beli Borel halmazok minden súlyfüggvényre Stieltjes-mérhetők (azaz $\mathcal{A}_{\overline{\tau_\alpha}}$-ba tartoznak minden megengedett α-ra).*

Bizonyítás. Legyen $\alpha: I\to\mathbb{R}$ egy súlyfüggvény. Láttuk: $\mathcal{A}_{\overline{\tau_\alpha}}$ tartalmazza I összes korlátos részintervallumát, így az általuk generált σ-algebrát is.

Következmény. *A véges intervallumokon kívül eltűnő korlátos Borel-mérhető függvények minden $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ súlyú Stieltjes mérték szerint integrálhatók.*

Szorzatmérték

Ebben az alfejezetben jelöljenek $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $\nu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ tetszőlegesen rögzített mértékeket, és legyen

$$\tau : A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B) \qquad (A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}) .$$

Tétel. *A τ halmazfüggvény reguláris előmérték.*

Bizonyítás. 1) τ előmérték: Bizonyítandó, hogy

$$\tau(A \times B) \le \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) \qquad \big(A, A_1, \ldots, \in \mathcal{A}\ , \quad B, B_1, \ldots \in \mathcal{B}\ ,$$
$$A \times B \subset \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n\big) .$$

Csak az $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) < \infty$ eset érdekes. Ekkor

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \int \nu(B) \cdot 1_A d\mu \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu$$

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(B_n) \cdot 1_{A_n} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n} \qquad \sum_{n=1}^{N} \int \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) < \infty.$$

Tehát a Beppo Levi tétel szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) = \int \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n}\Big] d\mu .$$

Tetszőleges $x \in A$-ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n}(x) = \sum_{n\,:\, x \in A_n} \nu(B_n) \ge \nu\Big(\overbrace{\bigcup_{n\,:\, x \in A_n} B_n}^{\supset B}\Big) \ge \nu(B) ,$$

ahonnan

$$\tau(A \times B) = \int \nu(B) 1_A d\mu \le \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) .$$

2) τ reguláris: Bizonyítandó, hogy

$$\tau(A \times B) \ge \overline{\tau}\big((A \times B) \cap (C \times D)\big) + \overline{\tau}\big((A \times B) \setminus (C \times D)\big)$$

ha $A, C \in \mathcal{A}$ ill. $B, D \in \mathcal{B}$. Az $A_1 := A \cap C$, $A_2 := A \setminus C$, $B_1 := B \cap D$, $B_2 := B \setminus D$ jelölésekkel

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_{i,k=1,2} \mu(A_i) \cup \nu(B_k)$$
$$= \tau\big((A \cap C) \times (B \cap D)\big) + \sum_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k>2}} \mu(A_i)\nu(B_k) .$$

Itt $\displaystyle\bigcup_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k>2}} A_i \times B_k = (A \times B) \setminus (C \times D)$ miatt $\displaystyle\sum_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k>2}} \mu(A_i)\nu(B_k) \ge \overline{\tau}\big((A \times B) \setminus (C \times D)\big)$.

Definíció. Legyenek μ és ν mértékek. Az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$ reguláris előmértékhez konstruált mérték μ és ν *szorzatmérték*e.

Megjegyzés. Technikailag egyszerűen (de hosszadalmas) verifikálható, hogy a mértékek szorzása asszociatív, ha azonosítjuk az $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \Omega_3$ és $\Omega_1 \times (\Omega_2 \times \Omega_3)$ típusú Descartes szorzatokat.

Definíció. A $\tau_k : \mathcal{T}_k \to [0,\infty]$ $(k = 1, \ldots, n)$ halmazfüggvények *tenzori szorzata*

$$\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \cdots \otimes \tau_n : (A_1 \times \cdots \times A_n) \mapsto \tau_1(A_1) \cdots \tau_n(A_n) \ .$$

Ha $\mu_1, \ldots, \mu_n$ mértékek, a félreértés veszélye nélkül $\mu \otimes \cdots \otimes \mu_n$ jelöli egyben a szorzatmértéküket is. (Rutinszerű belátni: a szorzatmérték valójában az $\overline{\mu \otimes \cdots \otimes \mu_n}$ külső mértékből származó mérték.)

$\mathbb{R}^n$-en a λ Lebesgue mérték n-szeres $\lambda^{\otimes n} := \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ szorzata az *n-dimenziós Lebesgue mérték.*

Egyszerű függvények

Definíció. Legyen $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ előmérték Ω fölött. A $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény *τ-egyszerű függvény,* ha

$$\exists\, T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T} \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R} \qquad \varphi = \textstyle\sum_{n=1}^N \alpha_n 1_{T_n} \, .$$

Tétel. *Legyen $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ reguláris előmérték (Ω fölött) és $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$ egy $\overline{\tau}$-integrálható függvény. Ekkor*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \varphi \ \tau\text{-egyszerű} \qquad \textstyle\int |f - \varphi| \, d\overline{\tau} < \varepsilon \, .$$

Bizonyítás. Mivel $f = f^+ - f^-$ és f^+, f^- $\overline{\tau}$-integrálhatók, vehető $f \geq 0$. Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Tudjuk*: Található $q > 1$, melyre

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{A_n} \leq f \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n+1} 1_{A_n} \ , \qquad \int |f - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{A_n}| \, d\overline{\tau} < \varepsilon/2$$

ahol $A_n := \{x \in \Omega : q^n < f(x) \leq q^{n+1}\}$ $\quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$. Legyen

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \ldots > 0 \ : \qquad \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon/2 \ .$$

Elegendő belátni, hogy

$$\exists\, T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \ldots \in \mathcal{T} \qquad q^n \cdot \int |1_{A_n} - \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}}| \, d\overline{\tau} < \varepsilon_n \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots) \ .$$

A $\overline{\tau}$ kiterjesztés definiciója alapján tetszőleges n-re

$$\exists\, T_1^{(n)}, \ldots \in \mathcal{T} \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} T_1^{(n)} \supset A_n \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \tau\big(T_k^{(n)}\big) < \overline{\tau}(A_n) + \frac{\varepsilon_n}{q^n}$$

Mivel itt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}} \geq 1_{A_n}$ $\quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$, a Beppo Levi tétel szerint (a $\sum$ és

* Az Integrálhatósági kritériumok alfejezet 3) $\Rightarrow$ 1) bizonyításából.

$\int$ felcserélésekor) minden rögzített n-re

$$\int |1_{A_n} - \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}}| d\overline{\tau} = \int (\sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}} - 1_{A_n}) d\overline{\tau}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{T_k^{(n)}} d\overline{\tau} - 1_{A_n} d\overline{\tau}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) - \overline{\tau}(A_n) < \frac{\varepsilon_n}{q^n} \ .$$

Következmény. *Ha $\tau : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ reguláris előmérték és az $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ függvény $\overline{\tau}$-integrálható, akkor*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{T} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{R}$$
$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 1_{T_k} \quad \overline{\tau}\text{-mm.}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \tau(T_k) < \int |f| \, d\overline{\tau} + \varepsilon \ .$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és vegyünk egy

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0 \ : \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots = \varepsilon/4$$

felbontást. A tétel alapján

$$\exists \ \varphi_1 \ \tau\text{-egyszerű} \qquad \int |f - \varphi_1| d\overline{\tau} < \varepsilon_1 \qquad \varphi_1 = \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^{(1)} 1_{T_k^{(1)}}$$
$$\sum_{k=1}^{K_1} |\alpha_k^{(1)}| \cdot \tau\big(T_k^{(1)}\big) < \int |f| d\overline{\tau} + \varepsilon_1 \ .$$

Definiáljuk ezzel az $f_2 := f - \varphi_1$ függvényt. Erre ugyanígy

$$\exists \ \varphi_2 \ \tau\text{-egyszerű} \int |f_2 - \varphi_2| d\overline{\tau} < \varepsilon_2 \qquad \varphi_2 = \sum_{k=1}^{K_2} \alpha_k^{(2)} 1_{T_k^{(2)}}$$
$$\sum_{k=1}^{K_2} |\alpha_k^{(2)}| \tau(T_k^{(2)}) < \varepsilon_2 \ .$$

Definiálva $f_3 := f_2 - \varphi_2$ -t, folytathatjuk ezt az eljárást úgy, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ mellett kapunk egy olyan $\varphi_N, \ f_{N+1}$ függvénypárt, amelyre

$$\varphi_N \ \tau\text{-egyszerű} \ , \qquad \int |f_N - \varphi_N| d\overline{\tau} + \varepsilon_N \ , \qquad f_{N+1} = f_N - \varphi_N$$
$$\varphi_N = \sum_{k=1}^{K_N} \alpha_k^{(N)} 1_{T_k^{(N)}} \qquad \sum_{k=1}^{K_N} |\alpha_k^{(N)}| \tau(T_k^{(N)}) < \varepsilon_N \ .$$

Jegyezzük meg, hogy ekkor

$$\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_N}|\alpha_k^{(N)}|\tau(T_k^{(N)}) < \int |f|d\overline{\tau} + \frac{\varepsilon}{4}$$

és $\int|f_n|d\overline{\tau} < \varepsilon_{n-1}$, $\varphi_n = f_n - f_{n+1}$ $(n = 2,3,\ldots)$. Speciálisan $\sum_{n=2}^{\infty}\int|f_n d\overline{\tau} < \infty$. Beppo Levi tételét a $\sum_{n=2}^{N}|f_n|$ $(N = 2,3,\ldots)$ részletösszegekre alkalmazva kapjuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty}|f_n|$ függvény $\overline{\tau}$-integrálható, és így az

$$S := \{x : \sum_{n=2}^{\infty}|f_n(x)| = \infty\}$$

halmaz $\overline{\tau}$-0-halmaz. Ha pedig $x \in \Omega \setminus S$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x) &= \big(f(x)+f_2(x)\big) + \big(f_1(x)-f_2(x)\big) + \cdots + \big(f_N(x)-f_{N+1}(x)\big)\\ &= f(x) - f_{N+1}(x) \to f(x) \qquad (N\to\infty)\ .\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $f = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n 1_{T_n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\tau(T_n) < \infty$, akkor Lebesgue tétele alapján

$$\int f d\overline{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\tau(T_n)\ .$$

Fubini tétel

Ebben az alfejezetben

$\tau := \mu_1 \otimes \mu_2$ ahol $\mu_k : \mathcal{A}_k \to [0,\infty]$ mérték Ω_k-n $(k = 1,2)$.

Tétel. *Legyen $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ egy $\overline{\tau}$-integrálható függvény. Ekkor μ_1-majdnem minden $x_1 \in \Omega_1$ mellett az $x_2 \mapsto \int f(x_1,x_2)$ függvény μ_2-integrálható. A μ_1-mm. definiált $x_1 \mapsto \int f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$ függvény μ_1-integrálható és*

$$\int f\,d\overline{\tau} = \int\left[\int f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right]d\mu_1(x_1)\ .$$

Bizonyítás. Tudjuk:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n 1_{A_n\times B_n} \qquad \overline{\tau}\text{-mm.}$$

olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_1$, $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{R}$ sorozatokkal, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\tau(A_n\times B_n) < \infty$.

1) Ha csak $f = 1_{A\times B}$, akkor

$$\begin{aligned} f d\overline{\tau} &= \tau(A\times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)\\ &= \int\left(\int 1_B(x_2)d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1) =\\ &= \int\left(\int 1_{A\times B}(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)\\ &= \int\left(\int f(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)\ .\end{aligned}$$

2) Ezután, legyen $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n \times B_n}$ ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots > 0$. Ekkor

$$f_N := \sum_{n=1}^{N} \alpha_n 1_{A_n \times B_n} \nearrow f \qquad (N \to \infty)\ .$$

1) alapján mindegyik N-re

$$\int f_N d\overline{\tau} = \int \Big[\int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)\Big] d\mu_1(x_1) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tau(A_n \times B_n) < \infty.$$

Beppo Levi tételét alkalmazva az

$$x_1 \mapsto \int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

növő sorozatra kapjuk, hogy az $x_1 \mapsto \int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ limesfüggvény μ_1-integrálható és így

$$(*) \qquad \int f_(x_1, x_2) d\mu(x_2) < \infty \qquad \mu_1\text{-mm. } x_1\text{-re}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \int f d\overline{\tau} &= \lim_{N \to \infty} \int f_N d\overline{\tau} \\ &= \lim_{N \to \infty} \int \Big[\int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)\Big] d\mu_1(x_1) \\ &= \int \Big[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)\Big] d\mu_1(x_1)\ . \end{aligned}$$

3) Az általános eset. Ekkor $f = h_1 - h_2 + g$ írható, ahol

$$h_1 := \sum_{n:\ \alpha_n > 0} \alpha_n 1_{A_n \times B_n}\ , \qquad h_2 := \sum_{n:\ \alpha_n < 0} \alpha_n 1_{A_n \times B_n}\ , \qquad \overline{\tau}\{x:\ g(x) \neq 0\} = 0\ .$$

2) szerint a tétel állítását már tudjuk a h_1, h_2 függvényekre. Így az integrál additivitása miatt a tétel következik az alábbi önmagában is érdekes lemmából.

Lemma. *Ha $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ egy $\overline{\tau}$-0-halmaz, akkor $\overline{\mu_2}\{x_2 \in \Omega_2 :\ (x_1, x_2) \in S\} = 0$ μ_1-majdnem minden x_1-re.*

Bizonyítás. A külső mérték definíciója szerint minden N-re vehetők olyan $R_1^{(N)}, R_2^{(N)}, \ldots \in \mathcal{A}_1$ ill. $S_1^{(N)}, S_2^{(N)} \ldots \in \mathcal{A}_2$ sorozatok, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}) < \frac{1}{2^N} \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

$$S \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}\ .$$

Észrevétel:

$$S \subset \{(x_1, x_2) :\ \sum_{N,n=1}^{\infty} 1_{R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}}(x_1, x_2) = \infty\}\ .$$

Mivel $\sum_{N,n}\mu_1(R_n^{(N)})\mu_2(S_n^{(N)}) < \sum_N 2^{-N} = 1$, a 2) rész gondolatmenete alkalmazható a $\sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)}\times S_n^{(N)}}$ függvényre. Nevezetesen a $(*)$ formula szerint

$$\mu_1\Big\{x_1 : \int \sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)}\times S_n^{(N)}}(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)=\infty\Big\}=0\ .$$

Csakhogy az észrevétel alapján

$$\Big\{x_1 :\ \overline{\mu_2}(\{x_2 :\ (x_1,x_2)\in S\}>0\Big\}\subset\{x_1 : \int\sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)}\times S_n^{(N)}}(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)=\infty\Big\}.$$

Következmény. *Ha* $\mu_1,\dots,\mu_N$ *mértékek és* f *egy* $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n^-$*-integrálható függvény, akkor minden* $(i_1,\dots,i_N)$ *permutációra*

$$\int f d\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N^- = \int\Big[\cdots\Big[\int\Big[\int f(x_1,\dots,x_N)d\mu_{i_1}(x_{i_1})\Big]d\mu_{i_2}(x_{i_2})\Big]\cdots\Big]d\mu_{i_N}(x_{i_N}).$$

Bizonyítás. Tekintve, hogy

$$\int\Big[\int 1_{A\times B}(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)\Big]d\mu_2(x_2)=\mu_1(A)\mu_2(B)=\int\Big[\int 1_{A\times B}(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\Big]d\mu_1(x_1)\,,$$

a tétel bizonyítása az integrálási sorrend felcserélésével is véghezvihető. Ez adja az $N=2$ esetet. Innen azonnal következik indukcióval az állítás.

æ

GEOMETRIAI MÉRTÉK

Cél: α-dimenziós mérték, amely pl. $\alpha=1$-re a *hossz*, 2-dimenzióra a *felszín*, 3-dimenzióra a *térfogat* szerepét játssza. A legfontosabb elvárások: egybevágóság-invariancia, és az, hogy az $\mathbb{R}^N$-beli α-dimenziós egységkocka (az $[0,1]^\alpha \times \{0\}^{N-\alpha}$ alakzat) α-dimenziós térfogata $=1$ legyen.

Figyelemre méltó, hogy ez tisztán csak a metrikus tulajdonságokon megalapozható, sőt az α dimenzió-paraméter technikailag tetszőleges nem-negativ szám lehet, annak ellenére, hogy pl. nem-egész dimenziós egységkocka nincs.

Az egész fejezeten át rögzített egy X, d metrikus tér és egy $\alpha \in \mathbb{R}_+$ szám (a konstruálandó mérték *dimenziószáma*).

Hausdorff-mértékek

Definíció. Minden $\varepsilon > 0$ mellett legyen

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \{S \subset X : \ \mathrm{diam}\,(S) \le \varepsilon\}$$
$$\tau_\varepsilon(S) := \mathrm{diam}\,(S)^\alpha \qquad (S \in \mathcal{T}_\varepsilon)\ .$$

Megjegyzés. Általában τ_ε nem előmérték. Pl. $\mathbb{R}$-en $\overline{\tau_\varepsilon} \equiv 0$ ha $\alpha > 1$.

Tudjuk: $\overline{\tau_\varepsilon}$ külső mérték.

Ha $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, akkor $\mathcal{T}_{\varepsilon_1} \subset \mathcal{T}_{\varepsilon_2}$, és így $\overline{\tau_{\varepsilon_1}} \ge \overline{\tau_{\varepsilon_2}}$.

Lemma. *Külső mértékek* sup*-a külső mérték.*

Bizonyítás. Legyen κ_i $(i \in \mathcal{I})$ külső mértékek egy családja egy közös Ω tér fölött, és legyen $\kappa := \sup_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i$.

1) $\kappa(\emptyset) = \sup_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i(\emptyset) = \sup_{i\in\mathcal{I}} 0 = 0$.

2) Állítás: $X_1, X_2, \ldots \subset \Omega, \Rightarrow \kappa\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big) \le \sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n)$. Bizonyítás: Legyen $y < \kappa\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big)$ tetszőleges. (Belátandó: $\sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n) > y$). Ekkor

$$\exists\ i_0 \in \mathcal{I} \qquad \kappa_{i_0}\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big) > y$$
$$\sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n) \ge \sum_{n=1}^\infty \kappa_{i_0}(X_n) \ge \kappa_{i_0}\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big) > y\ .$$

Definíció. az α-dimenziós *Hausdorff-térfogat* (az X, d metrikus térben) a

$$\mathrm{vol}_\alpha := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\tau_\varepsilon} \ \big(= \sup_{\varepsilon>0} \overline{\tau_\varepsilon}\big)$$

külső mérték. A vol_α-mérhető halmazokra megszorított vol_α halmazfüggvény az α-dimenziós *Hausdorff-mérték.*

Emlékeztető. Az $A, B \subset X$ *halmazok távolsága*

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : \ a \in A,\ b \in B\} > 0.$$

Egyszerűsége ellenére döntő a következő additivitási lemma.

Lemma. *Pozitív távolságú alakzatok Hausdorff-térfogatai összeadódnak, azaz*

$$\mathrm{vol}_\alpha(A \cup B) = \mathrm{vol}_\alpha(A) + \mathrm{vol}_\alpha(B) \qquad (d(A,B) > 0\ \ A, B \subset X)\,.$$

Bizonyítás. Legyen $\delta := d(A,B)$, és tekintsük az

$$A' := \{x :\ \exists\, a \in A\ \ d(x,a) < \delta/2\}\ ,\quad B' = \{x :\ \exists\, b \in B\ \ d(x,b) < \delta/2\}$$

parallelhalmazokat. Észrevételek:

1) $A' \cap B' = \emptyset$,
2) $\varepsilon < \delta/2$, $T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{T}_\varepsilon$ és $\bigcup_{n=1}^\infty T_n \supset A$ esetén $\bigcup_{n:\ T_n \subset A'} \supset A$,
3) $\varepsilon < \delta/2$, $U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{T}_\varepsilon$ és $\bigcup_{n=1}^\infty U_n \supset B$ esetén $\bigcup_{n:\ U_n \subset B'} \supset B$.

Innen azonnal adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\overline{\tau_\varepsilon}(A \cup B) &= \overline{\tau_\varepsilon}(A) + \overline{\tau_\varepsilon}(B) \qquad (\varepsilon < \delta/2)\\
\mathrm{vol}_\alpha(A \cup B) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau_\varepsilon}(A \cup B) = \lim_{\delta/2 > \varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau_\varepsilon}(A \cup B)\\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \big[\overline{\tau_\varepsilon}(A) + \overline{\tau_\varepsilon}(B)\big]\ .
\end{aligned}$$

Következmény. *Ha* $A_1, A_2, \ldots \subset X$, *akkor*

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}_\alpha(A_n) \qquad \big(d(A_m, A_n) > 0 \ \ (m \neq n)\big)$$

Bizonyítás. Mivel vol_α külső mérték, $\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) \le \sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}_\alpha(A_n)$.
Állítás: $\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^N A_n\big) = \sum_{n=1}^N \mathrm{vol}_\alpha(A_n)$ $(N = 1, 2 \ldots)$. Bizonyítás: Indukció N-re. Az $N = 2$ eset a lemmából következik. Mivel

$$d\big(\bigcup_{n=1}^N A_n, A_{N+1}\big) = \min_{n \le N} d(A_n, A_{N+1}) > 0\ ,$$

a lemma majd az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\big) &= \mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^N A_n\big) + \mathrm{vol}_\alpha(A_{N+1})\\
&= \sum_{n=1}^N \mathrm{vol}_\alpha(A_n) + \mathrm{vol}_\alpha(A_{N+1})\ .
\end{aligned}$$

Az állítás mutatja, hogy

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) \ge \mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^N A_n\big) = \sum_{n=1}^N \mathrm{vol}_\alpha(A_n) \qquad (N = 1, 2, \ldots)\ .$$

Tehát a fordított $\mathrm{vol}_\alpha\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) \ge \sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}_\alpha(A_n)$ egyenlőtlenség is áll.

Carathéodory tétele

Tétel. *Legyen* A *zárt* $\subset X$. *Ekkor* A vol_α*-mérhető.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$A_\delta := \big\{x :\ d(\{x\}, A) \le \delta\big\}\ ,\quad B_\delta := X \setminus A_\delta \qquad (\delta \ge 0)$$

parallelhalmazokat. Észrevétel:

1) $A = A_0 \qquad (\Leftarrow A$ zárt),
2) $d(B_\delta, A) \geq \delta \qquad (\delta \geq 0)$.

Legyen ezután $Z \subset X$ tetszőlegesen adott. Belátandó:

$$\mathrm{vol}_\alpha(Z) = \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap A) + \mathrm{vol}_\alpha(Z \setminus A).$$

Mivel vol_α külső mérték, az 1) észrevétel alapján

$$\mathrm{vol}_\alpha(Z) \leq \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap A) + \mathrm{vol}_\alpha(Z \setminus A) = \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap A_0) + \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap B_0)\ .$$

A 2) észrevételt és az additivitási lemmát használva

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_\alpha(Z) &\geq \mathrm{vol}_\alpha((Z \cap A) \cup (Z \cap B_\delta)) \\ &= \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap A) + \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap B_\delta) \qquad (\delta > 0)\ . \end{aligned}$$

Így a tételhez elegendő belátni:

$$\mathrm{vol}_\alpha(Z \cap B_0) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap B_\delta)\ .$$

Itt a $\geq$ reláció (az $=$ helyén) triviális, hiszen $B_0 \supset B_\delta \ (\delta > 0)$. Legyen

$$\delta_1 > \delta_2 > \cdots \downarrow 0$$

adott tetszőlegesen. Kérdés: $\mathrm{vol}_\alpha(B_{\delta_N} \cap Z) \nearrow \mathrm{vol}_\alpha(B_0 \cap Z)$? Csak a $\mathrm{vol}_\alpha(Z) < \infty$ eset érdekes. Vegyük a

$$D_k := B_{\delta_{k+1}} \setminus B_{\delta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

csíkokat. Észrevétel:

3) $B_{\delta_n} = B_{\delta_N} \cup D_N \cup D_{N+1} \cup \cdots \cup D_{n-1} \qquad (n > N)$,
4) $n > m + 1 \Rightarrow d(D_m, D_n) \geq \delta_{m+1} - \delta_n\ (> 0)$.

A 3) észrevétel szerint

$$B_0 = B_{\delta_N} \cup D_N \cup D_{N+1} \cup \cdots$$

$$\mathrm{vol}_\alpha(B_0 \cap Z) - \mathrm{vol}_\alpha(B_{\delta_N} \cap Z) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{vol}_\alpha(D_n \cap Z) \qquad (N = 1, 2, \ldots)\ .$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell látni, hogy itt a jobb oldal $\to 0 \ (N \to \infty)$. Ehhez elegendő, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}_\alpha(D_n \cap Z) < \infty\ .$$

A 4) észrevételből az additivitási lemma következménye szerint

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(Z \cap (D_1 \cup D_3 \cup D_5 \cup \cdots)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap D_{2k-1})$$

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(Z \cap (D_2 \cup D_4 \cup D_6 \cup \cdots)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}_\alpha(Z \cap D_{2k})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}_\alpha(D_n \cap Z) &= \mathrm{vol}_\alpha\big(Z \cap (D_1 \cup D_3 \cup \ldots)\big) + \mathrm{vol}_\alpha\big(Z \cap (D_2 \cup D_4 \cup \ldots)\big) \\ &\leq \mathrm{vol}_\alpha(Z) + \mathrm{vol}_\alpha(Z) < \infty\ . \end{aligned}$$

Definíció. A *Borel halmaz* fogalmát kiterjesztjük tetszőleges topologikus terekre. Ha $Y, \mathcal{U}$ topologikus tér,

$$\{Y \text{ Borel halmazai}\} := \Big[\text{Az } \{Y\text{-beli nyitottak}\} \text{ generálta } \sigma\text{-algebra}\Big] .$$

Következmény. *Az X, d metrikus tér Borel halmazai mind vol_α-mérhetők.*

Leképezési tétel

Ebben az alfejezetben X, d ill. X', d' metrikus terek és $\alpha \geq 0$ egy tetszőlegesen rögzített dimenziószám. A félreértés veszélye nélkül vol_α egyszerre jelöli az α-dimenziós Hausdorff térfogatot X-ben a d- ill. X'-ben a d' metrika szerint.

Tétel. *Ha $A \subset X$ és az $f : A \to X'$ leképezés M-kontrakció, azaz ha*

$$d'\big(f(a), f(b)\big) \leq M \cdot d(a,b) \qquad (a, b \in A),$$

akkor

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(f(A)\big) \leq M^\alpha \mathrm{vol}_\alpha(A) .$$

Bizonyítás. Észrevétel: $\mathrm{diam}\,\big(f(T)\big) \leq M \cdot \mathrm{diam}\,(T) \qquad (T \subset A)$.
A τ_ε, $\tau_{M\varepsilon}$ halmazfüggvények és ebből a vol_α térfogat definíciója azonnal adja, hogy

$$\begin{aligned}
&\tau_{M\varepsilon}\big(f(T)\big) \leq M^\alpha \tau_\varepsilon(T) \qquad (T \subset A,\ \mathrm{diam}\,(T) \leq \varepsilon,\ \varepsilon > 0)\\
&\overline{\tau_{M\varepsilon}}\big(f(S)\big) \leq M^\alpha \overline{\tau_\varepsilon}(S) \qquad (S \subset A,\ \varepsilon > 0)\\
&\mathrm{vol}_\alpha\big(f(S)\big) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau_{M\varepsilon}}\big(f(S)\big) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} M^\alpha \overline{\tau_\varepsilon}(S) = M^\alpha \mathrm{vol}_\alpha(S) \qquad (S \subset A).
\end{aligned}$$

Következmény. *Ha $A \subset X$ és a $g : A \to X'$ leképezés az $m > 0$ faktorral m-expanzió, azaz ha*

$$d'\big(g(a), g(b)\big) \geq m \cdot d(a,b) \qquad (a, b \in A),$$

akkor

$$\mathrm{vol}_\alpha\big(g(A)\big) \geq m^\alpha \mathrm{vol}_\alpha(A) .$$

Bizonyítás. Az $m > 0$ feltétel biztosítja a g leképezés injektivitását. Így az $f := g^{-1}$ inverz egy jól-definiált $f : g(A) \to A$ leképezés, amelyre $x, y \in g(A)$ esetén

$$\begin{aligned}
&d'(x,y) = d'\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(y)\big)\Big) \geq m \cdot d\big(f(x), f(y)\big)\\
&d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{m} d'(x,y) .
\end{aligned}$$

A tételt a $g(A)$ halmazzal az f leképezésre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathrm{vol}_\alpha(A) = \mathrm{vol}_\alpha\Big(f\big(g(A)\big)\Big) \leq \frac{1}{m^\alpha} \mathrm{vol}_\alpha\big(g(A)\big) .$$

Definíció. Az $A \subset X$ és $A' \subset X'$ alakzatok *egybevágó*k, ha

$$\exists f : A \leftrightarrow A' \qquad d'\big(f(a), f(b)\big) = d(a,b) \quad (a, b \in A).$$

Következmény. *Ha* A *egybevágó* A'*-vel, akkor* $\mathrm{vol}_\alpha(A) = \mathrm{vol}_\alpha(A')$.

Lebesgue mérték és vol_N $\mathbb{R}^N$-en

Ettől kezdve N egy rögzített dimenziószám, $\langle\ ,\ \rangle$ a skalárszorzat és $\|\ \|$ a norma $\mathbb{R}^N$-en. Azaz
$\langle x,y\rangle := \sum_{n=1}^N x_n y_n$, $\|x\| := \left[\sum_{n=1}^N x_n^2\right]^{1/2}$ $\big(x=(x_1,\dots,x_N),\ y=(y_1,\dots,y_N)\big)$.
$\mathbb{R}^N$-en a $\|\|$-ból származó euklideszi távolsággal képezzük a Hausdorff-térfogatokat, $\overline{\lambda_N}$ pedig az N-dimenziós külső Lebesgue mértéket jelöli,

$$\omega_N := \overline{\lambda_N}\{x:\ \|x\|\le 1\} \qquad \text{az egységgömb térfogata.}$$

Definíció. $\alpha_N := \sup\big\{\overline{\lambda_N}(T):\ T\subset\mathbb{R}^N,\ \mathrm{diam}\,(T)\le 1\big\}$

Megjegyzés. 1) $\mathrm{diam}\,(T)\le 1$ esetén $\exists\, a_1,\dots,a_N\in\mathbb{R}$ $\quad T\subset\prod_{n=1}^N[a_n,a_n+1]$. Innen $\alpha_N\le 1$.

2) STEINER TÉTELE (biz. nélkül): Az azonos átmérőjű alakzatok közül a *gömb* a legnagyobb térfogatú $\mathbb{R}^N$-ben ($\overline{\lambda_N}$ szerint). Innen $\alpha_N = \dfrac{\omega_N}{2^N}$.

3) Fubini tételét az $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{N-2}$ felbontásra használva, az

$$\begin{aligned}\omega_N &= \int_0^1 \omega_{N-2}\sqrt{1-r^2}^{\,N-2}\cdot 2r\pi\,dr \overset{s:=1-r^2}{=}\\ &= \pi\omega_{N-2}\int_0^1 s^{\frac{N-2}{2}}\,ds = \frac{2\pi}{N}\omega_{N-2}\end{aligned}$$

rekurzióhoz jutunk. Innen $\omega_1=2$, $\omega_2=\pi$ miatt

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} \qquad (k=0,1,2,\dots)\,.$$

Lemma. $\overline{\lambda_N}\le\alpha_N\cdot\mathrm{vol}_N$.

Bizonyítás. Legyen $A\subset\mathbb{R}^N$ tetszőleges. Ekkor

$$T_1,T_2,\ldots\subset\mathbb{R}^N\,,\quad \bigcup_{n=1}^\infty T_n\supset A\,,\quad \mathrm{diam}\,(T_n)\le\varepsilon\quad(n=1,2,\dots)$$

esetén az α_N konstans definíciója szerint

$$\overline{\lambda_N}(A)\le\sum_{n=1}^\infty\overline{\lambda}_N(T_n)\le\alpha_N\sum_{n=1}^\infty\mathrm{diam}\,(T_n)^N\,.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}&\overline{\lambda_N}(A)\le\alpha_N\overline{\tau_\varepsilon}(A)\qquad(\varepsilon>0)\\ &\overline{\lambda_N}(A)\le\alpha_N\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\tau_\varepsilon}(A)=\alpha_N\mathrm{vol}_N(A)\,.\end{aligned}$$

Definíció. $\kappa_N := \mathrm{vol}_N[0,1]^N$ $\quad$ az egységkocka Hausdorff-térfogata.

Lemma. $\mathrm{vol}_N\le\kappa_N\cdot\overline{\lambda_N}$.

Bizonyítás. 1) Ha Q δ-oldalú kocka $\mathbb{R}^N$-ben, akkor $\mathrm{vol}_N(Q)=\kappa_N\cdot\delta^N$.
Bizonyítás: $\exists\, f:[0,1]^N\leftrightarrow Q$ $\quad\|f(x)-f(y)\|=\delta\cdot\|x-y\|\quad(x,y\in[0,1]^N)$.

Most a leképezési tétel szerint

$$\mathrm{vol}_N(Q) = \mathrm{vol}_N\big(f([0,1]^N)\big) = \delta^N \cdot \mathrm{vol}_N[0,1]^N .$$

2) $\mathrm{vol}_N(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_N,b_N) = \kappa_N\cdot(b_1-a_1)\cdots(b_N-a_N)$.

Bizonyítás: $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_N,b_N)$ lefedhető $\lceil\frac{b_1-a_1}{\delta}+1\rceil\cdots\lceil\frac{b_N-a_N}{\delta}+1\rceil$ darab* δ-oldalú kockával $(\delta>0)$. Tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_N(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_N,b_N) &\le \Big\lceil\frac{b_1-a_1}{\delta}+1\Big\rceil\cdots\Big\lceil\frac{b_N-a_N}{\delta}+1\Big\rceil\kappa_N\cdot\delta^N\\ &\to \kappa_N\prod_{k=1}^N(b_k-a_k)\qquad(\delta\downarrow 0)\ .\end{aligned}$$

Mivel pedig $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_N,b_N)$-be beírható $\lceil\frac{b_1-a_1}{\delta}-1\rceil\cdots\lceil\frac{b_N-a_N}{\delta}-1\rceil$ darab diszjunkt $\delta(>0)$-oldalú kocka,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_N(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_N,b_N) &\ge \Big\lceil\frac{b_1-a_1}{\delta}-1\Big\rceil\cdots\Big\lceil\frac{b_N-a_N}{\delta}-1\Big\rceil\kappa_N\cdot\delta^N\\ &\to \kappa_N\prod_{k=1}^N(b_k-a_k)\qquad(\delta\downarrow 0)\ .\end{aligned}$$

3) Ha $T_n := \big(a_1^{(n)},b_1^{(n)}\big)\times\cdots\times\big(a_N^{(n)},b_N^{(n)}\big)$ $(n=1,2\ldots)$ és $\bigcup_{n=1}^\infty T_n\supset A$, akkor a 2) észrevétel alapján

$$\mathrm{vol}_N(A)\le\sum_{n=1}^\infty\mathrm{vol}_N(T_n) = \kappa_N\cdot\sum_{n=1}^\infty\prod_{k=1}^N(b_k-a_k) = \kappa_N\sum_{n=1}^\infty\lambda_N(T_n)\ .$$

4) Tudjuk: $\overline{\lambda_N}(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^\infty\lambda_N(T_n):\ T_1,T_2,\ldots \text{ nyitott téglák, } \bigcup_{n=1}^\infty T_n\subset A\Big\}$.

Vagyis 3) alapján $\mathrm{vol}_N(A)\le\kappa_N\cdot\overline{\lambda_N}(A)$.

Tétel. $\mathrm{vol}_N = \dfrac{2^N}{\omega_N}\cdot\overline{\lambda_N}$.

Bizonyítás. Belátandó: $\kappa_N = \dfrac{1}{\alpha_N} = \dfrac{2^N}{\omega_N}$. Már tudjuk, hogy

$$1 = \lambda_N\big([0,1]^N\big)\le\alpha_N\mathrm{vol}_N\big([0,1]^N\big) = \alpha_N\kappa_N\ .$$

Steiner tétele szerint így $\kappa_N\ge\dfrac{1}{\alpha_N}=\dfrac{2^N}{\omega_N}$.

A $\kappa_N = \mathrm{vol}_N[0,1]^N\le\dfrac{2^N}{\omega_N}$ reláció bizonyítása: Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen adott. Ekkor

$$(*)\qquad \exists\ B_1,B_2,\ldots\text{diszj. gömbök}\subset(0,1)^N\quad\mathrm{diam}\,(B_k)\le\varepsilon\quad(k=1,\ldots,K)$$

$$\sum_{k=1}^\infty\overline{\lambda}_N(B_k) = 1\ \big(=\overline{\lambda_N}[0,1]^N\big)\big)\ .$$

---

* $\lceil z\rceil$ a $z\in\mathbb{R}$ szám *egész része*.

[$*$ bizonyítása: Általában is, ha G nyitott $\subset \mathbb{R}^N$, akkor választható véges sok $T_1, \ldots, T_M$ diszjunkt zárt kocka $\subset G$-ben úgy, hogy $\sum_{m=1}^M \overline{\lambda_N}(T_m) > \overline{\lambda_N}(G)/2$. Most S_m-mel jelölve a T_m-be írt (maximális sugarú) gömböt, $\sum_{m=1}^M \overline{\lambda_N}(S_m) > \overline{\lambda_N}(G)/4$. G után $G \setminus \bigcup_{m=1}^M S_m$ térfogatának megint legalább 1/4-e lefedhető gömbökkel, és így tovább... Az n-ik lépésben még lefedetlenül maradt térfogat $\leq \overline{\lambda_N}(G) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$.]

Lévén Borel halmazok, $[0,1]^N, B_1, B_2, \ldots$ mind $\overline{\lambda_N}$-mérhetők. Ezért

$$\overline{\lambda_N}\big([0,1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\big) = \overline{\lambda_N}\big([0,1]^N\big) - \sum_{k=1}^\infty \overline{\lambda}_N(B_k) = 1 - 1 = 0$$

Tehát mivel $\mathrm{vol}_N \leq \kappa_N \cdot \overline{\lambda_N}$, innen $\mathrm{vol}_N\big([0,1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\big) = 0$. Következésképpen

$$\begin{aligned}\overline{\tau_\varepsilon}\big([0,1]^N\big) &\leq \sum_{k=1}^\infty \overline{\tau_\varepsilon}(B_k) + \overline{\tau_\varepsilon}\big([0,1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\big) \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \mathrm{diam}\,(B_k)^N + \mathrm{vol}_N\big([0,1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\big) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{2^N}{\omega_N}\overline{\lambda_N}(B_k) + 0 = \frac{2^N}{\omega_N}\ .\end{aligned}$$

Az $\varepsilon > 0$ tetszőlegessége miatt $\kappa_N = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau_\varepsilon}\big([0,1]^N\big) \leq \dfrac{2^N}{\omega_N}$.

Definíció. $\omega_\alpha := \dfrac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma\big(\frac{\alpha}{2}+1\big)} \qquad (\alpha \geq 0)$

ahol $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^z\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad (z \geq 0)$

az $n \mapsto (n-1)!$ függvény analitikus folytatása $\mathbb{R}_+$-on az *Euler-formulá*val.

Minden X, d metrikus térben és $\alpha > 0$ mellett

$\mathrm{Vol}_\alpha := \dfrac{2^\alpha}{\omega_\alpha}\mathrm{vol}_\alpha$ az α-dimenziós *normalizált Hausdorff mérték.*

Következmény. $\overline{\lambda_N} = \mathrm{Vol}_N \qquad (N = 1, 2, \ldots)$.

Megjegyzés. Kérdés: Van-e $\alpha \notin \mathbb{N}$-re "α-dimenziós halmaz"? Azaz

$\forall\, \alpha\ \exists?\ A \subset \mathbb{R}^N \qquad \mathrm{Vol}_\alpha(A) > 0 = \mathrm{Vol}_\beta(A) = 0 \quad (\beta > \alpha),\ \mathrm{Vol}_\gamma(A) = \infty\ (\gamma < \alpha)$.

Válasz: IGEN.

Példa. A $\ C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{2k-1}{3^n}, \frac{2k}{3^n}\right)$ *Cantor halmaz* dimenziója $\dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Bizonyítás: tetszőleges α mellett $\tau^{(\alpha)}_{1/3^K}(C) = \tau^{(\alpha)}_{1/3^K}\Big([0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^K \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{2k-1}{3^n}, \frac{2k}{3^n}\right)\Big)$ $= \tau^{(\alpha)}_{1/3^K}\big(2^K \text{ db. diszj. } \frac{1}{3^K} \text{ hosszú intv.}\big) = 2^K \cdot \left(\frac{1}{3^K}\right)^\alpha \qquad (K = 1, 2, \ldots)$. Innen $K \to \infty$-re $\mathrm{vol}_{\log 2/\log 3}(C) = 1$.

Felszín-formula

Lemma. *Legyen* $L : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ *egy lineáris leképezés, ahol* $K \le N$. *Ekkor*

$$\mathrm{Vol}_K(LA) = \left[\det(L^*L)\right]^{1/2} \cdot \mathrm{Vol}_K(A) \qquad (A \subset \mathbb{R}^K).$$

Bizonyítás. Tudjuk lineáris algebrából*:

$$\exists\{e'_1, \dots, e'_K\} \text{ ORTN} \subset \mathbb{R}^K \ \exists\{e''_1, \dots, e''_K\} \text{ ORTN} \subset \mathbb{R}^N \ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_K \ge 0$$

$$Le'_k = \alpha_k e''_k \qquad (k = 1, \dots, K)$$

$$\text{és } \ \exists\, U : L\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K \text{ izometria} \qquad Ue''_k = e'_k \qquad (k = 1, \dots, K)\ .$$

Jegyezzük meg, hogy a leképezési tétel alapján

$$\mathrm{Vol}_K(UL(A)) = \mathrm{Vol}_K(L(A)) \qquad (A \subset \mathbb{R}^K).$$

Észrevétel:

$$ULe'_k = \alpha_k e'_k \qquad (k = 1, \dots, K)\ .$$

Következésképpen $\overline{\lambda_K}(UL(A)) = \alpha_1 \cdots \alpha_N \overline{\lambda_K}(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^K)$. Innen

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_K(L(A)) = \mathrm{Vol}_K(UL(A)) &= \overline{\lambda_K}(UL(A)) = \alpha_1 \cdots \alpha_K \overline{\lambda_K}(A) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_K \mathrm{Vol}_K(A) \qquad (A \subset \mathbb{R}^K)\ .\end{aligned}$$

Mivel az L lineáris operátor adjungáltjára

$$L^* : e''_k \mapsto \alpha_k e'_k\ , \quad L^*L : e'_k \mapsto \alpha_k^2 e'_k \qquad (k = 1, \dots, K)\ ,$$

fennáll $\det(L^*L) = \alpha_1^2 \cdots \alpha_K^2$.

Következmény. *Ha* $\det(L^*L) \neq 0$, *akkor* $\|Lv\| \ge \|[L^*L]^{-1}\|^{-1/2}\|v\| \quad (v \in \mathbb{R}^K)$.

Bizonyítás. Az előbbi jelölésekkel

$$\begin{aligned}Lv &= U\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \langle v, e'_k\rangle e''{}_k \\ \|Lv\| &= \left[\sum_{k=1}^{K} \alpha_k^2 \langle v, e'_k\rangle^2\right]^{1/2} \ge \alpha_1 \left[\sum_{k=1}^{K} \langle v, e'_k\rangle^2\right]^{1/2} \\ &\ge \alpha_1\|v\| \qquad \text{ahol } 0 < \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_K\ .\end{aligned}$$

Mivel $L^*L : e'_k \mapsto \alpha_k^2 e'_k$, $[L^*L]^{-1} : e'_k \mapsto \alpha_k^{-2} e'_k$. Innen $\alpha_1 = \|[L^*L]^{-1}\|^{-1/2}$.

Definíció. Legyenek $K \le N$ (egészek), G nyitott$\subset \mathbb{R}^K$ és $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$.

$$\mathrm{Jac}(f)(x) := \left[\det\big(f'(x)^* f'(x)\big)\right]^{1/2}\ .$$

az f függvény *Jacobi-determinánsa* az $x (\in G)$ pontnál.

---

* Az ORTN rövidítés jelentése: *ortonormált*. Azaz $\{e_1, \dots, e_n\}$ ORTN $\subset \mathbb{R}^n$, ha $\langle e_i, e_j\rangle = 1_{\{i\}}(j) \quad (i, j = 1, \dots, n)$.

Megjegyzés. A determinánsok szorzástételéből

$$\mathrm{Jac}(f)(x) = \left[\big(\mathrm{det} f'(x)\big)^2\right]^{1/2} = |\mathrm{det} f'(x)| \quad \text{ha } K = N\,.$$

Tétel. *Legyen* $K \le N$, G *nyitott* $\subset \mathbb{R}^K$ *és* $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$. *Tegyük fel, hogy az* f *leképezés injektív és* $\mathrm{Jac}(f)(x) \ne 0$ $(x \in G)$. *Ekkor*

$$\mathrm{Vol}_K f(A) = \int_A \mathrm{Jac}(f)\, d\mathrm{Vol}_K \qquad (A \textit{ kompakt intervallum} \subset G)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $A := I_1 \times \ldots I_K$ ahol $I_1, \ldots, I_K$ korlátos zárt intervallumok $\mathbb{R}$-ben. Rendre $n = 1, 2, \ldots$ mellett felbontjuk az A téglát n^K darab $\dfrac{\lambda(I_1)}{n} \times \cdots \times \dfrac{\lambda(I_n)}{n}$ oldalhosszú páronként diszjunkt $T_i^{(n)}$ téglára. Azaz

$$A = T_1^{(n)} \,\dot\cup\, T_2^{(n)} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, T_{n^K}^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(itt $\dot\cup$ jelentése *diszjunkt unió*). Mivel az f leképezés injektív,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_K\big(f(A)\big) &= \sum_{i=1}^{n^K} \mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big) = \sum_{i=1}^{n^K} \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big)}{\mathrm{Vol}_K\big(T(n)_i\big)} \mathrm{Vol}_K\big(T_i^{(n)}\big) \\ &= \int_A \Phi_n\, d\mathrm{Vol}_K\end{aligned}$$

az A téglán értelmezett λ_K-egyszerű

$$\Phi_n(x) := \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big)}{\mathrm{Vol}_K\big(T_i^{(n)}\big)} \qquad (x \in T_i^{(n)}\ ,\ i = 1, \ldots, n^K)$$

függvényekkel $(n = 1, 2, \ldots)$. Elegendő látni:

$$\Phi_n \rightrightarrows \mathrm{Jac}(f) \qquad A \text{ fölött} \quad (n \to \infty)\ .$$

Az összes n, i indexpárra legyen

$$x_i^{(n)} := \big[T_i^{(n)} \text{ egy csúcsa}\big] \qquad L_{n,i} : T_i^{(n)} \ni x \mapsto f(x_i^{(n)}) + f'(x_i^{(n)})(x - x_i^{(n)})\ .$$

Mivel az $L_i^{(n)}$ leképezés deriváltja $f'(x_i^{(n)})$ állandóan,

$$\mathrm{Vol}_K\big(P_i^{(n)}\big) = \mathrm{Jac}(f)(x_i^{(n)})\mathrm{Vol}_K\big(T_i^{(n)}\big) \ \text{ a } P_i^{(n)} := L_i^{(n)}\big(T_i^{(n)}\big) \text{ parallelepipedonra.}$$

Tehát bevezetve a

$$\Psi_n(x) := \mathrm{Jac}(f)(x_i^{(n)}) \qquad (x \in T_i^{(n)})$$

függvényeket, mindegyik n-re

$$\mathrm{ran}(\Phi_n/\Psi_n) = \left\{ \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big)}{\mathrm{Vol}_K\big(P_i^{(n)}\big)} \ :\ i = 1, \ldots, n^K \right\}\ .$$

Csakhogy mivel $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$, az f' derivált egyenletesen folytonos a kompakt A halmazon, és így a $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ függvénysorozat egyenletesen konvergál Jac(f)-hez A fölött. Vagyis elegendő megmutatni, hogy

$$\max_{i=1}^{n^K} \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big)}{\mathrm{Vol}_K\big(P_i^{(n)}\big)} \,,\ \min_{i=1}^{n^K} \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T_i^{(n)})\big)}{\mathrm{Vol}_K\big(P_i^{(n)}\big)} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty)\ .$$

Legyen n, i tetszőlegesen rögzítve. Írjunk röviden $T := T_i^{(n)}$, $P := P_i^{(n)}$, $L := L_i^{(n)}$, $\overline{x} := x_i^{(n)}$-t. Mivel feltevés szerint $\mathrm{Jac}(f)(\overline{x}) \neq 0$, az L affin leképezés injektív, azaz $L : T \leftrightarrow P$. Az injektivitást eleve feltettük f-ről, így $f : T \leftrightarrow f(T)$, és a

$$\Lambda := f \circ L^{-1} \ : P \leftrightarrow f(T)$$

leképezés jól-definiált. Legyen

$$M := \sup_{p,q \in P} \frac{\|\Lambda(p) - \Lambda(q)\|}{\|p - q\|} \ ,\quad m := \inf_{p,q \in P} \frac{\|\Lambda(p) - \Lambda(q)\|}{\|p - q\|} \ .$$

A leképezési tétel és következménye szerint

$$m^K \le \frac{\mathrm{Vol}_K\big(f(T)\big)}{\mathrm{Vol}_K(P)} \le M^K .$$

Cél: i-től független becslés $m(= m_i^{(n)}), M(= M_i^{(n)})$-re, amely $n \to \infty$-nél $\to 1$.
Mivel P minden pontja felírható $L(x)$, $x \in T$ alakban,

$$M = \sup_{x,y \in T} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \ ,\quad m = \inf_{x,y \in T} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \ .$$

Az alapötlet az, hogy f "keveset" különbözik L-től T fölött. Legyen g az eltérésük, és legyen ω a folytonossági modulusa f'-nek (az egész A-n). Azaz

$$g := f - L \qquad \omega(\delta) := \sup_{\substack{\|x-y\| \le \delta \\ x,y \in A}} \|f(x) - f(y)\| \quad (\delta \ge 0)\ .$$

Legyen $x, y \in T$ tetszőleges. Most a $\triangle$-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} &= \frac{\|(L(x) - L(y)) + (g(x) - g(y))\|}{\|L(x) - L(y)\|} \\ &\ge \frac{\|L(x) - L(y)\| - \|g(x) - g(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \\ &= 1 - \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|f'(\overline{x})(x - y)\|}. \end{aligned}$$

Ugyanígy $\dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \le 1 + \dfrac{\|g(x) - g(y)\|}{\|f'(\overline{x})(x - y)\|}$. A lemma következményét az $f'(\overline{x})$ operátorra alkalmazva

$$1 - \theta \le \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \le 1 + \theta \qquad \text{ahol } \theta := \|f'^* f'(\overline{x})^{-1}\|^{1/2} \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|} \ .$$

A kontrakciós lemma szerint tehát

$$1 - \|f'^* f'(\overline{x})^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \sup \|g'(T)\| \le \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \le 1 + \|f'^* f'(\overline{x})^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \sup \|g'(T)\| \ .$$

Ezt már könnyű i-től függetlenül becsülni: Mivel a teljes A alakzat kompakt és $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathrm{I\!R}^N)$, így jól-definiált és $\max \|[f' * f']^{-1}(T)\| < \infty$. Másrészt $x \in T$-re $g'(x) = f'(x) - f'(\overline{x})$, és innen $\|g'(x)\| \leq \omega\big(\mathrm{diam}\,(T)\big) = \omega\big(\mathrm{diam}\,(A)/n\big)$. Vagyis

$$1 - \max \|[f'^* f']^{-1}(T)\|^{1/2} \omega\Big(\frac{\mathrm{diam}\,(A)}{n}\Big) \leq m_i^{(n)} \leq$$
$$\leq M_i^{(n)} \leq 1 + \max \|[f'^* f']^{-1}(T)\|\big)^{1/2} \omega\Big(\frac{\mathrm{diam}\,(A)}{n}\Big).$$

Itt a jobb és bal oldal i-től független és $\to \infty$ $(n \to \infty)$.

Többváltozós helyettesítés

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $K \leq N$, G *nyitott*$\subset \mathrm{I\!R}^K$ *és* $f \in C^1(G, \mathrm{I\!R}^N)$ *egy injektív leképezés, amelynél* $\mathrm{Jac}(f)(x) \neq 0 \quad (x \in G)$. *Ekkor minden* $\phi : f(G) \to \mathrm{I\!R}$ *Borel-mérhető* Vol_K*-integrálható függvényre*

$$\int_{f(G)} \phi(y)\, d\mathrm{Vol}_K(y) = \int_G \phi\big(f(x)\big) \mathrm{Jac}(f)(x)\, d\mathrm{Vol}_K(x)\ .$$

Bizonyítás. 1) A felszín-formula szerint, ha T kompakt tégla$\subset G$, akkor a $\phi := 1_{f(T)}$ függvényre

$$\int_{f(G)} \phi\, d\mathrm{Vol}_K = \mathrm{Vol}_K f(T) = \int_T \mathrm{Jac}(f)\, d\mathrm{Vol}_K$$
$$= \int_G 1_T \mathrm{Jac}(f)\, d\mathrm{Vol}_K = \int (\phi \circ f) \mathrm{Jac}(f)\, d\mathrm{Vol}_K$$

mivel most $1_T = 1_{f(T)} \circ f = \phi \circ f$.

2) Az előző alapján azonnal kapjuk (v.ö. Egyszerű függvények alfejezet), hogy a tétel állítása teljesül a

$$\Phi := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \qquad T_1, T_2, \ldots \text{ kompakt tégla } \subset G$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \mathrm{Vol}_K f(T_n) < \infty\ ,$$

alakú függvényekre is. Ugyanis $\phi_n := 1_{f(T_n)}$-et írva

$$\int_{f(G)} \phi_n\, d\mathrm{Vol}_K = \int_G (\phi_n \circ f)\, d\mathrm{Vol}_K \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$\sum_n \alpha_n \int_{f(G)} \phi_n\, d\mathrm{Vol}_K = \sum_n^{\infty} \alpha_n \int_G (\phi_n \circ f)\, d\mathrm{Vol}_K$$
$$\int_{f(G)} \sum_n \alpha_n \phi_n\, d\mathrm{Vol}_K = \int_G \sum_n^{\infty} \alpha_n (\phi_n \circ f)\, d\mathrm{Vol}_K\ .$$

3) Tekintsük az általános esetet. Legyen $\Psi : f(G) \to \mathbb{R}$ egy Borel mérhető Vol_K-integrálható függvény.

3a) Észrevétel: Található olyan, a 2)-ben tárgyalt tipusú függvény, amely Vol_K-majdnem mindenütt $= \phi$.

Bizonyítás: Tekintsük a

$$\mathcal{T} := \{f(T) : \ T \text{ kompakt tégla } \subset G\}$$

halmazcsaládot. Ha T kompakt$\subset G$, akkor (f folytonossága miatt) az $f(T)$ kép kompakt, így speciálisan zárt is $\mathbb{R}^N$-ben. Tehát Carathéodory tétele szerint a $\mathcal{T}$-beli halmazok mind Vol_K-mérhetők. Sőt, mivel $\mathcal{T}$ tagjai Borel halmazok és Vol_K mérték a Borel halmazokra megszorítva, $\mathrm{Vol}_K|\mathcal{T}$ reguláris előmért $f(G)$ fölött. Tehát az egyszerű függvények soraival való előállíthatóságról szóló tétel szerint 3a) következik az alábbi állításból.

Állítás: $\{f(G) \text{ Borel részei}\} = [f(\mathcal{T}) \text{ generálta } \sigma\text{-algebra } f(G)\text{-ben}]$.

Itt a $\supset$ tartalmazás triviális. $\subset$ bizonyítása: Definíció szerint $\{f(G)$ Borel részei$\} = [\{f(G)$ részhalmaz-topologiájában nyitottak$\}$ gen. σ-alg.$]$. Így elég belátni, hogy

$$\{f(G) \text{ nyitott részei}\} \subset [f(\mathcal{T}) \text{ gen. } \sigma\text{-alg. } f(G)\text{-ben}].$$

Legyen H nyitott$\subset f(G)$ adott. Ekkor $f^{-1}(H)$ nyitott$\subset G$. Lindelöf tétele szerint most talaálható $T_1, T_2, \ldots$kompakt tégla$\subset G$ úgy, hogy $f^{-1}(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Tehát $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(T_n) \in [f(\mathcal{T}) \text{ gen. } \sigma\text{-alg. } f(G)\text{-ben}]$.

3b) Észrevétel: Az $f(G)$-beli Vol_K-0-halmazok a G-beli Vol_K-0-halmazok f-képei.

Bizonyítás: Legyen $S \subset f(G)$, $\mathrm{Vol}_K(S) = 0$. Belátandó: $\mathrm{Vol}_K f^{-1}(S) = 0$. Lindelöf tétele alapján

$$\exists\ K_1, K_2, \ldots \text{ kompakt tégla} \subset G \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G.$$

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Vol}_K\{x \in K_n : \ f(x) \in S\} = 0$ mindegyik n indexre. Tegyük fel, hogy ezzel ellentétben valamelyik m-re $\mathrm{Vol}_K\{x \in K_m : \ f(x) \in S\} > 0$ volna. Mivel K_m kompakt, f' folytonos és $\mathrm{Jac}(f) > 0$,

$$\exists\ \varepsilon > 0 \qquad \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - yl} \geq \varepsilon \quad (x, y \in K_m).$$

Innen a leképezési tétel alapján a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Vol}_K\{y \in S : \ f^{-1}(y) \in K_m\} = \mathrm{Vol}_K f\{x \in K_m : \ f(x) \in S\} \\ &\leq \varepsilon^K \mathrm{Vol}_K\{x \in K_m : \ f(x) \in S\} > 0 \end{aligned}$$

ellentmondásra jutnánk.

A két észrevételt felhasználva, egyrészt alkalmas $T_1, T_2, \ldots$ G-beli kompakt téglákkal és a $\sum_n \alpha_n \mathrm{Vol}_K(T_n) < \infty$ feltételt kielégítő együtthatókkal

$$\phi \circ f = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)}\right) \circ f \qquad \mathrm{Vol}_K\text{-mm } G \text{ fölött},$$

másrészt

$$\int_{f(G)} \phi \, d\mathrm{Vol}_K = \int_{f(G)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \right) d\mathrm{Vol}_K \overset{2)}{=}$$

$$= \int_G \big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \circ f \big) \cdot \mathrm{Jac}(f) \, d\mathrm{Vol}_K$$

$$= \int_G (\phi \circ f) \mathrm{Jac}(f) \, d\mathrm{Vol}_K \ .$$

Következmény. (Általános felszín-formula). *Az A Borel$\subset G$ halmazokra*

$$\mathrm{Vol}_K f(A) = \int_A \mathrm{Jac}(f) \, d\mathrm{Vol}_K \ .$$

Bizonyítás. A $\phi := 1_{f(A)}$ függvényt alkalmazva

$$\mathrm{Vol}_K f(A) = \int_{f(G)}^{A} \phi \, d\mathrm{Vol}_K = \int_G \underbrace{(\phi \circ f)}_{1_A} \mathrm{Jac}(f) \, d\mathrm{Vol}_K \ .$$

æ

ELŐJELES MÉRTÉKEK

Ha a mérték fogalmát ki akarjuk terjeszteni $[0,\infty]$-értékű halmazfüggvényekről $[-\infty,\infty]$-beli értékűekre, a σ-additivitást nem követelhetjük meg korlátlanul úgy, mint a pozitiv esetben. Ugyanis az összeadást $\mathbb{R}$-ről $[-\infty,\infty]$-re nem lehet folytonosan kiterjeszteni, akármilyen, az $\mathbb{R}$-ét folytató Hausdorff topológiát veszünk $[-\infty,\infty]$-en. Ebben a rövid fejezetben csak a (továbbiakhoz legszükségesebb) $\mathbb{R}$-beli értékű előjeles mértékeket tárgyaljuk.

Az egész fejezeten keresztül legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy rögzített σ-algebra.

Korlátos változású előjeles mértékek

Definíció. Egy $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény *korlátos változású előjeles mérték*, ha

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \Big(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n)\Big) \qquad (A_1, A_2, \ldots \text{ diszjunkt } \in \mathcal{A}) .$$

Megjegyzés. Ha $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ egy korlátos változású előjeles mérték és $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt $\in \mathcal{A}$, akkor szükségképpen $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < \infty$. Speciálisan $\nu(\emptyset) = 0$ (mivel $\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(\emptyset)| < \infty$).

Bizonyítás. Sorelméletből tudjuk: ha $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, akkor vagy $a_n \not\to 0$ $(n \to \infty)$ vagy pedig tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $\pi : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ indexpermutáció, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} = q$. Márpedig a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ unió (és így a $\nu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)$ szám) független a tagok sorrendjétől.

Példa. Legyen $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ egy mérték, $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$ pedig egy μ-integrálható függvény. Ekkor a

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu \qquad (A \in \mathcal{A})$$

halmazfüggvény korlátos változású előjeles mérték Ω fölött Lebesgue tétele szerint. Látni fogjuk, minden korlátos változású előjeles mérték ilyen.

Jelölés: A $d\nu = f\, d\mu$ formális rövidítést használjuk, ha a ν korlátos változású előjeles mérték a példabeli alakban áll elő.

Ettől kezdve az egész alfejezetben $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ egy (tetszőlegesen adott) korlátos változású előjeles mértéket fog jelölni.

Propozíció. *Tegyük fel, hogy ν felveszi a maximumát egy $P \in \mathcal{A}$ halmaznál. Ekkor a*

$$\nu_+(A) := \nu(A \cap P), \quad \nu_-(A) := -\nu(A \setminus P),$$
$$|\nu|(A) := \nu_+(A) + \nu_-(A) \qquad\qquad (A \in \mathcal{A})$$

nem-negatív halmazfüggvények mértékek Ω fölött, és

$$d\nu = (1_P - 1_{\Omega\setminus P})\, d|\nu| .$$

Bizonyítás. Ha $A_1, A_2, \ldots$ diszj. $\in \mathcal{A}$ akkor szintén $A_1 \cap P, A_2 \cap P, \ldots$ diszj. $\in \mathcal{A}$ és $A_1 \setminus P, A_2 \setminus P, \ldots$ diszj. $\in \mathcal{A}$. Vagyis a ν_+, ν_- ill. $|\nu| = \nu_+ - \nu_-$ halmazfüggvények korlátos változású előjeles mértékek. Jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned}\nu_-(A) &= \nu(A \setminus P) = \nu(\emptyset) = 0 \qquad (P \supset A \in \mathcal{A}),\\ \nu_+(B) &= \nu(B \cap P) = \nu(\emptyset) = 0 \quad (\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A}).\end{aligned}$$

Mivel $\nu(A) = \nu\big((A \cap P) \cup (A \setminus P)\big)$ $(A \in \mathcal{A})$, azaz $\nu = \nu_+ - \nu_-$, azt kell még csak belátnunk, hogy

$$\nu_+(A), \nu_-(B) \geq 0 \qquad (A \subset P,\ B \subset \Omega \setminus P \quad A, B \in \mathcal{A}) .$$

Legyen $P \supset A \in \mathcal{A}$. Ekkor $A \cup (P \setminus A) = P$, ahonnan $\nu_+(A) + \nu_+(P \setminus A) = \nu(A) + \nu(P \setminus A) = \nu(P)$, azaz

$$\nu_+(A) = \nu(P) - \nu(P \setminus A) = \max \nu - \nu(P \setminus A) \geq 0 .$$

Tekintsük ezután az $\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A}$ esetet. Ekkor $P \cap B = \emptyset$, ahonnan $\nu(P \cup B) = \nu(P) + \nu(B)$, azaz

$$\nu_-(B) = -\nu(B \setminus P) = -\nu(B) = \nu(P) - \nu(P \cup B) = \max \nu - \nu(P \cup B) \geq 0 .$$

Lemma. *Ha* $X_k, Y_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *akkor*

1) $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ *esetén* $\nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty X_n\big) = \lim_{N \to \infty} \nu(X_N)$,

2) $Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$ *esetén* $\nu\big(\bigcap_{n=1}^\infty Y_n\big) = \lim_{N \to \infty} \nu(Y_N)$.

Bizonyítás. 1) A $D_N := X_N \setminus \bigcup_{n<N} X_n$ $(N = 1, 2, \ldots)$ halmazok diszjunktak és $X_N = D_1 \cup \cdots \cup D_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Innen

$$\nu\big(\textstyle\bigcup_N X_N\big) = \sum_{n=1}^\infty \nu(D_n) = \lim_N \sum \nu(D_n) = \lim_N \sum_{n=1}^N \nu(D_n) = \lim_N \nu(X_N).$$

2) Most az $X_N := \Omega \setminus Y_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ komplementer-halmazokra alkalmazhatjuk 1)-et.

Következmény. *Ha* $\sup \nu < \infty$, *akkor létezik* $P \in \mathcal{A}$, *amelyre* $\nu(P) = \max \nu$.

Bizonyítás. Legyen $M := \sup \nu$ ($< \infty$ feltevés szerint), és válasszunk egy olyan $A_1, A_2, \ldots$ sorozatot, amelynél

$$\textstyle\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_n := M - \nu(A_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Észrevétel: Általában is,

$$\nu(Z_k) \geq M - \delta_k \ (k = 1, 2), \ \Rightarrow \nu(Z_1 \cup Z_2) \geq M - (\delta_1 + \delta_2).$$

Ugyanis $\alpha := \nu(Z_1 \setminus Z_2)$, $\beta := \nu(Z_2 \setminus Z_1)$ ill. $\gamma := \nu(Z_1 \cap Z_2)$-vel

$$\begin{aligned}\nu(Z_1 \cup Z_2) = \alpha + \beta + \gamma &= (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) - \gamma\\ &\nu(Z_1) + \nu(Z_2) - \underbrace{\nu(Z_1 \cap Z_2)}_{\leq M}\\ &\geq M - \delta_1 + M - \delta_2 - M .\end{aligned}$$

Ezt felhasználva k szerinti indukcióval láthatjuk, hogy

$$\nu\Big(\bigcup_{n=N}^{N+k} A_n\Big) \geq M - (\varepsilon_N + \cdots + \varepsilon_{N+k}) \qquad (N, k = 1, 2, \ldots),$$

ahonnan a lemma 1) pontja szerint

$$\nu\Big(\bigcup_{n \geq N} A_n\Big) \geq M - \sum_{n \geq N} \varepsilon_n \qquad (N = 1, 2, \ldots) .$$

Most a lemma 2) pontját alkalmazva kapjuk, hogy =

$$\nu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N} A_n\Big) = \lim_{N\to\infty}\nu\Big(\bigcup_{n\geq N} A_n\Big) \geq \lim_{N\to\infty}\Big(M - \sum_{n\geq N}\varepsilon_n\Big) = M \ ,$$

vagyis a $P := \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N} A_n$ választás megfelel.

Tétel. (Hahn-Jordan felbontási tétel). *Legyen* $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *egy korlátos változású előjeles mérték. Ekkor található pontosan egy* $|\nu| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *(pozitív) mérték és egy* $|\nu|$*-0-halmaztól eltekintve egyértelmű* $\mathcal{A}$*-mérhető* $\operatorname{sgn}(\nu) : \Omega \to \{\pm 1\}$ *függvény, amelyre*

$$d\nu = \operatorname{sgn}(\nu)\, d|\nu| \ .$$

Bizonyítás. Egzisztencia: Tekintsük a

$$\mathcal{P} := \big\{A \in \mathcal{A} :\ \forall\, X \in \mathcal{A}\ \ X \subset A \Rightarrow \nu(X) \geq 0\big\}$$

halmazcsaládot, és legyen $M := \sup(\nu|\mathcal{P})$. Mivel $\emptyset \in \mathcal{P}$, $M \geq 0$. Vegyük észre, hogy $\mathcal{P}$-beli halmazok megszámlálható egyesítése is $\mathcal{P}$-beli. Tehát véve egy olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}$ sorozatot, amelynél $M = \lim_n \nu(A_n)$, a $P := \bigcup_n A_n$ halmazra

$$P \in \mathcal{P} \ , \quad \nu(P) = M \ ,$$

mivel $M \geq \nu(P) = \nu(A_n) + \nu(P \setminus A_n) \geq \nu(A_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Az egzisztencia-bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy

$$\nu(B) \leq 0 \qquad (B \subset \Omega\backslash P \quad B \in \mathcal{A}).$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{A}$-beli $B \subset \Omega \setminus P$ halmazt. Állítás:

$$\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A} \text{ és } \nu(B) > 0, \Rightarrow \sup_{B\supset X\in\mathcal{A}} \nu(X) = \infty.$$

Bizonyítás: ν_B-vel jelölve a ν korlátos változású előjeles mérték B-re való megszorítottját, a következményt és a propozíciót erre alkalmazva, $\sup \nu_B < \infty$ esetén B-n belül volna maximális pozitív ν-mértékű P_B halmaz, és ennek minden $\mathcal{A}$-beli részhalmaza ≥ 0 ν-mértékű lenne. Ekkor azonban a

$$P' := P_B \cup P \in \mathcal{P} \quad \text{és} \quad \nu(P') = \nu(P) + \nu(P_B) > \nu(P) = M$$

volna, ellentétben M definíciójával.

Tegyük fel ezután, hogy valamelyik $B_0 \in \mathcal{A}$ halmazra $B_0 \subset \Omega\backslash P$ és $\nu(B_0) > 0$. Ekkor az állítás szerint $\sup_{B_0\supset X\in\mathcal{A}} \nu(X) = \infty$. Ezért van $B_1 \subset B$, amelynél $\nu(B_1) \geq \nu(B_0) + 1$. A gondolatmenetet alkalmazhatjuk most B_0 helyett a B_1 halmazra, égy így tovább.... Ezzel kapunk egy $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ sorozatot, ameyre $\nu(B_k) \geq k \ (k = 1, 2, \ldots)$. A lemma 2) pontja alpján ekkor

$$\nu\big(\bigcap_k B_k\big) = \lim_k \nu(B_k) = \infty$$

volna, ami ellentmond a $\operatorname{ran}(\nu) \subset \mathbb{R}$ feltételnek.

Unicitás: Elég megmutatnunk, hogy szükségképpen

$$d\nu = f\, d\mu \ \ \mu \geq 0 \ \ |f| = 1 \ , \Rightarrow \mu(A) = \sup_{A\supset X\in\mathcal{A}} |\nu(X)| + |\nu(A \setminus X)| \quad (A \in \mathcal{A}) \ .$$

Tegyük fel, hogy μ és f teljesítik a feltételeket. Tudjuk, most van olyan $\mathcal{A}$-mérhető $\widetilde{f}$ függvény is, amely μ-majdnem mindenütt egybeesik f-fel. Tekintsük a

$$P := \{x \in \Omega :\ \widetilde{f}(x) = 1\}$$

halmazt. Mivel ezzel $\widetilde{f} = 1_P - 1_{\Omega\setminus P}$, valahányszor $X \subset A,\ A, X \in \mathcal{A}$, fennáll

$$\begin{aligned}
|\nu(X)|+|\nu(A\setminus X)| &= |\nu(X\cap P) + \nu(X\setminus P)| + |\nu(A\setminus X)\cap P) + \nu(A\setminus X)\setminus P)| \\
&\le |\nu(X\cap P)| + |\nu(X\setminus P)| + |\nu((A\setminus X)\cap P)| + |\nu((A\setminus X)\setminus P)| \\
&= |\int_{X\cap P}\widetilde{f}\,d\mu| + |\int_{X\setminus P}\widetilde{f}\,d\mu| + |\int_{(A\setminus X)\cap P}\widetilde{f}\,d\mu| + |\int_{(A\setminus X)\setminus P}\widetilde{f}\,d\mu| \\
&= \mu(X\cap P) + \mu(X\setminus P) + \mu((A\setminus X)\cap P) + \mu((A\setminus X)\setminus P) \\
&= \mu(A) = \mu(A\cap P) + \mu(A\setminus(A\cap P)) \\
&= |\int_A \widetilde{f}\,d\mu| + |\int_{\Omega\setminus A}\widetilde{f}\,d\mu| \\
&= |\nu(A\cap P)| + |\nu(A\setminus(A\cap P))| \,.
\end{aligned}$$

Az unicitási bizonyításból kiderül a $|\nu|$ változási mérték explicit alakja. Sőt hasonló módszerrel formula nyerhető a ν_+, ν_- növekmény-mértékekre is.

Következmény. *Minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra*

$$|\nu|(A) = \max_{A\supset X\in\mathcal{A}}[\nu(X) - \nu(A\setminus X)] = \sup\Big\{\sum_n |\nu(A_n)| :\ A_1, A_2, \ldots \textit{diszj}\in\mathcal{A},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A\Big\}$$

$$\nu_+(A) = \max_{A\supset x\in\mathcal{A}} \nu(A_n) = \sup\Big\{\sum_n \nu(A_n)_+ :\ A_1, A_2, \ldots \textit{diszj.}\in\mathcal{A}\,,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A\Big\}$$

$$\nu_-(A) = \min_{A\supset x\in\mathcal{A}} \nu(A_n) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)_- :\ A_1, A_2, \ldots \textit{diszj.}\in\mathcal{A}\,,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A\Big\}.$$

Véges értékű előjeles mértékek

Definíció. Legyen Ω egy nem-üres halmaz, $\mathcal{R} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. Az $\mathcal{R}$ halmazcsalád *lokális σ-algebra*, ha minden $B \in \mathcal{R}$ mellett $\{R \in \mathcal{R} :\ R \subset B\}$ egy σ-algebra. Egy $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény (*véges értékű*) *előjeles mérték* Ω-n, ha

1) $\mathcal{R}$ lokális σ-algebra,
2) $\bigcup_n B_n \in \mathcal{R}$ valahányszor $B_1, B_2, \ldots$diszj.$\in \mathcal{R}$ és $\sum_n |\nu(R_n)| < \infty\ \big(B_n \supset R_n \in \mathcal{R}\ (n = 1, 2, \ldots)\big)$,
3) $\nu\big(\bigcup_n B_n\big) = \sum_n \nu(B_n)$ valahányszor $B_1, B_2, \ldots$diszj.$\in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n B_n \in \mathcal{R}$.

Megjegyzés. A definíció első és harmadik pontja szerint, ha $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mérték, akkor a

$$\nu_B := \nu \,\big|\, \{R \in \mathcal{R} :\ R \subset B\} \qquad (B \in \mathcal{R})$$

halmazfüggvények korlátos változású előjeles mértékek.

Jelöljön mostantól ebben az alfejezetben $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mértéket egy Ω alaphalmaz fölött, és legyen

$$\overline{\mathcal{R}} := \big[\text{az } \mathcal{R}\text{-generálta } \sigma\text{-algebra } \Omega\text{-n}\big] \quad .$$

Lemma. *Az $\overline{\mathcal{R}}$-en definiált*

$$|\nu| : X \to \sup\Big\{\textstyle\sum_n |\nu(R_n)| : \ R_1, R_2, \ldots \textit{diszj.} \in \mathcal{R} \ \textit{és} \ \bigcup_n R_n \subset X\Big\}$$

halmazfüggvény egy mérték Ω-n, amelynél

$$\mathcal{R} = \big\{X \in \overline{\mathcal{R}} : \ |\nu|(X) < \infty\big\} \ \textit{és} \ \ |\nu_B|(R) = |\nu|(R) \quad (R \subset B \ \ R, B \in \mathcal{R})$$

a Megjegyzésben definiált ν_B korlátos változású előjeles mértékekre.

Bizonyítás. A Hahn-Jordan tétel következményéből már tudjuk a ν_B előjeles mértékekre vonatkozó állítást. Sőt innen kapjuk az $\mathcal{R} = \big\{X \in \overline{\mathcal{R}} : \ |\nu|(X) < \infty\big\}$ relációt is. Hogy a $|\nu| \geq 0$ halmazfüggvény mérték, azonnal következik az alábbi két egyszerű észrevételből: Ha $X_1, X_2, \ldots$diszj.$\in \overline{\mathcal{R}}$, akkor

1) $R_1, R_2, \ldots$diszj.$\in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n R_n \subset \bigcup_n X_n$ esetén $k = 1, 2, \ldots$ mellett $R_1 \cap X_k, \, R_2 \cap X_k, \ldots$diszj.$\in \mathcal{R}$ (innen $|\nu|\big(\bigcup_k X_k\big) \leq \sum_k |\nu|(X_k)$),

2) ha $k = 1, 2, \ldots$ mellett $R_{1k}, R_{2k}, \ldots$diszj.$\in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n R_{n,k} \subset X_k$, akkor $\big\{R_{nk} : \ n, k = 1, 2, \ldots\big\}$diszj.$\subset \mathcal{R}$ (innen $\sum_k |\nu|(X_k) \leq |\nu|\big(\bigcup_k X_k\big)$).

Definíció. A $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ előjeles mérték *változási mérték*e a

$$|\nu|(X) := \sup\Big\{\textstyle\sum_n |\nu(R_n)| : \ R_1, R_2, \ldots \text{diszj.} \in \mathcal{R} \ \text{és} \ \bigcup_n R_n \subset X\Big\} \qquad (X \in \overline{\mathcal{R}})$$

mérték Ω fölött.

Megjegyzés. 1) Az Ω fölötti ν előjeles mérték pontosan akkor korlátos változású, ha $\Omega \in \operatorname{dom}(\nu)$ és $|\nu|(\Omega) < \infty$. Ez a tény a "korlátos változású előjeles mérték" elnevezés eredete.

2) Bár minden $B \in \mathcal{R}$ halmazra

$$d\nu_B = \operatorname{sgn}(\nu_B)\, d|\nu_B| = \operatorname{sgn}(\nu_B)\, d|\nu|,$$

általában nem található olyan közös $s : \Omega \to \{\pm 1\}$ függvény, amellyel minden $R \in \mathcal{R}$ halmazra teljesül $\nu(R) = \int_R s\, d|\nu|$.

Példa. 1) Legyen $\mathcal{R} := \{R_1 \cup \mathcal{R}_2 : \ R_1 \in \mathcal{R}_1, \ R_2 \in \mathcal{R}_2\}$, ahol

$$\mathcal{R}_1 := \Big\{\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times \{y_i\} : \ y_i \in \mathbb{R}, \ A_i \ \overline{\lambda}\text{-mérhető} \subset \mathbb{R}, \ \overline{\lambda}(A_i) < \infty \ \ (i = 1, 2, \ldots)\Big\}$$

$$\mathcal{R}_2 := \Big\{\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \times B_i : \ x_i \in \mathbb{R}, \ B_i \ \overline{\lambda}\text{-mérhető} \subset \mathbb{R}, \ \overline{\lambda}(B_i) < \infty \ \ (i = 1, 2, \ldots)\Big\}$$

és
$$\nu\Big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty}\big((A_i \times \{y_i\}) \cup (\{x_i\} \times B_i)\big)\Big) := \sum_{i=1}^{\infty}\big(\overline{\lambda}(A_i) - \overline{\lambda}(B_i)\big)$$

az $\mathcal{R}$-beli halmazokra. Ekkor a $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény előjeles mérték, és $|\nu| = \mathrm{Vol}_1 | \overline{\mathcal{R}}$. Ha valamilyen $s : \mathbb{R}^2 \to \{\pm 1\}$ függvényre $\nu(R) = \int_R s\, d\nu \ (R \in \mathcal{R})$ volna, akkor $\nu | \mathcal{R}_1 = \mathrm{Vol}_1 | \mathcal{R}_1$ miatt Vol_1-mm. $s = 1$-nek, kell lennie minden $\mathbb{R} \times \{y\}$ alakú egyenesen, másrészt $\nu | \mathcal{R}_1 = -\mathrm{Vol}_1 | \mathcal{R}_1$ miatt Vol_1-mm. $s = -1$-nek kell lennie minden $\{x\} \times \mathbb{R}$ egyenesen, ami egyszerre nem teljesülhet.

2) A következő fejezet *integrálformái* (az $\equiv 0$ kivételével) mind olyan véges értékű előjeles mértékek lesznek, amelyek nem $\int_\bullet s\, d|\nu|$ alakúak globálisan.

Megjegyzés. Mindazonáltal, ha $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ véges értékű előjeles mérték és az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény $|\nu|$-integrálható, akkor a

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

tartóhalmaz* megszámlálható sok $\mathcal{R}$-beli halmaz egyesítése, így ezen egy $|\nu|$-0-*halmaztól eltekintve egyértelműen* definiálható egy

* A supp jelölés a latin *support* (tartó) szót rövidíti.

$$\mathrm{sgn}_{\mathrm{supp}(f)}(\nu) : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$$
függvény, amelyre
$$\{x : \ \mathrm{sgn}_{\mathrm{supp}(f)}(\nu)(x) = 0\} = \Omega \setminus \mathrm{supp}(f) \quad \text{és}$$
$$\nu(R) = \int_R \mathrm{sgn}_{\mathrm{supp}(f)}(\nu)\, d|\nu| \qquad (\mathrm{supp}(f) \supset R \in \mathcal{R}).$$
Ez lehetővé teszi, hogy az integrálást kiterjesszük véges értékű előjeles mértékekre.

Definíció. Legyen $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mérték az Ω alaphalmazon. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény *ν-integrálható*, ha f $|\nu|$-integrálható (a hagyományos értelemben). Egy ν-integrálható f függvény ν-integrálja
$$\int f\, d\nu := \int f \cdot \mathrm{sgn}_{\mathrm{supp}(f)}(\nu)\, d|\nu| \ .$$
Az előjeles mértékek konstrukciójánál jól használható a következő.

Tétel. (Összeillesztési tétel). *Legyen $\mathcal{Q} \subset \{\Omega$ részhalmazai$\}$ egy olyan (nem-üres) halmazcsalád, amelynél $Q_1 \cap Q_2 \in \mathcal{Q}$ $(Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q})$. Tegyük fel, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ mellett $\nu_Q : \mathcal{A}_Q \to \mathbb{R}$ egy korlátos változású előjeles mérték a Q halmaz fölött és $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$-nál mindig*
$$Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \mathcal{A}_{Q_1} \subset \mathcal{A}_{Q_2} \ \text{ és } \ \nu_{Q_1} = \nu_{Q_2}|\mathcal{A}_{Q_1} .$$
Ekkor pontosan egy olyan ν véges értékű előjeles mérték létezik, amelyre
$$\mathrm{dom}(\nu) \subset \overline{\mathcal{Q}} := \{\textstyle\bigcup_n A_n : \ A_1, A_2, \ldots \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q\} \quad \text{és} \quad \nu_Q = \nu|\mathcal{A}_Q \quad (Q \in \mathcal{Q}).$$

Bizonyítás. Észrevétel: A $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q$ halmazcsalád lokális σ-algebra, és így
$$\overline{\mathcal{Q}} = \{\bigcup_n B_n : \ B_1, B_2, \ldots \text{diszj.} \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q\} \ .$$
Ugyanis, ha $A_1 \in \mathcal{A}_{Q_1}$, $A_2 \in \mathcal{A}_{Q_2}, \ldots$, akkor $A_n \cap A_k \in \mathcal{A}_{Q_1 \cap Q_2} \subset \mathcal{A}_{Q_n} \cap \mathcal{A}_{Q_k}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$, ahonnan az $\bigcup_n A_n$-et diszjunktan előállító $B_n := A_m \setminus \bigcup_{k<n}(A_n \cap A_k)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazok is $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q$-beliek.

Az észrevétel alapján az egyetlen szóbajöhető véges értékű előjeles ν mérték az
$$\mathcal{R} := \{\bigcup_n A_n : \ A_1, A_2, \ldots \text{ diszj.} \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q \ , \ \sum_n |\nu_{Q_n}|(A_n) < \infty\}$$
halmazcsaládon értelmezett
$$\nu(R) := \Big[\sum_n \nu_{Q_n}(B_n) : \ \bigcup_n B_n = R \ , \ \ B_1, B_2, \ldots \text{ diszjunktak,}$$
$$B_n \in \mathcal{A}_{Q_n} \ \ (n = 1, 2, \ldots)\Big] \qquad (R \in \mathcal{R})$$
halmazfüggvény. Ennek a jól-definiáltsága közvetlen folyománya annak, hogy $P, Q \in \mathcal{Q}$-ra a ν_P ill. ν_Q korlátos változású mértékek mindig egybeesnek a $P \cap Q$ halmazon. Ha ugyanis $B_1, B_2, \ldots$ ill. $B_1', B_2', \ldots$ diszjunktak, $B_n \in \mathcal{A}_{Q_n}$, $B_n' \in \mathcal{A}_{Q_n'}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $\bigcup_n B_n = \bigcup_m B_m' \in \mathcal{R}$, akkor
$$\sum_n |\nu_{Q_n}(B_n)|, \ \sum_m |\nu_{Q_m'}(B_m')| \le \sum_{m,n} |\nu_{Q_n \cap Q_m'}(B_n \cap B_m')| < \infty$$
$$\sum_n \nu_{Q_n}(B_n) = \sum_{m,n} \nu_{Q_n \cap Q_m'}(B_n \cap B_m') = \sum_m \nu_{Q_m'}(B_m') \ .$$
A ν halmazfüggvény σ-additivitása hasonló technikával bizonyítható.

æ

DIFFERENCIÁLFORMÁK $\mathbb{R}^N$-EN

Az egész fejezeten át $N, K \in \mathbb{N}$ rögzített dimenziószámokat jelölnek, amelyekre $K \leq N$. Az $x_1, \ldots, x_N$ ill. $t_1, \ldots, t_K$ jelöléseket pedig fenntartjuk az

$$\begin{aligned} x_i &: (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, N) \\ t_j &: (\tau_1, \ldots, \tau_K) \mapsto \tau_j \qquad (j = 1, \ldots, K) \end{aligned}$$

alapkoordinátąák számára $\mathbb{R}^N$-ben ill. $\mathbb{R}^K$-ban.

Jacobi determináns és alternáló formák

Tétel. *Legyen G nyitott$\subset \mathbb{R}^K$ és $T : G \to \mathbb{R}^N$ egy folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor*

1) $\displaystyle \operatorname{Jac}(T) = \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_K \leq N} \det{}^2 \left(\frac{\partial x_{i_k}(T)}{\partial t_j} \right)_{j,k=1,\ldots,K} \right]^{1/2}.$

2) *Minden $1 \leq i_1, \ldots, i_K \leq N$ indexcsaládra az*

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k} : \left(\mathbb{R}^N\right)^K \ni (v_1, \ldots, v_K) \mapsto \det\left(x_{i_k}(v_j)\right)_{j,k=1,\ldots,K}$$

leképezés egy alternáló K-forma és*

$$\det \left(\frac{\partial x_{i_k}(T)}{\partial t_j} \right)_{j,k=1,\ldots,K} = \omega_{i_1,\ldots,i_k} \left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial t_k} \right) .$$

Bizonyítás. 1) Legyen $t \in G$ tetszőlegesen rögzítve, és legyen

$$\alpha := \left[T'(t) \text{ mátrixa}\right] \qquad \alpha_{ij} = \frac{\partial x_i(T)}{\partial t_j}(t) \quad (i = 1, \ldots, N \quad j = 1, \ldots, K) .$$

Tudjuk: találhatók olyan σ_1, σ_2 ortogonális $N \times N$ ill. $K \times K$ típusú mátrixok továbbá $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_K$ számok, hogy

$$\alpha = \sigma_1 \Lambda \sigma_2 \qquad \text{ahol } \Lambda := \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_K \\ & & \\ \end{pmatrix}}_{K}\right\}N ,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Jac}(T)(t)^2 &= \det(T'^* T') = \det(\alpha^* \alpha) = \det(\Lambda^* \Lambda) \\ &= \lambda_1^2 \cdots \lambda_K^2 \end{aligned}$$

* Az alternáló K-formákkal kapcsolatos legszükségesebb előismereteket a következő megjegyzésben gyűjtöttük össze.

ahol a jobb áttekinthetőség kedvéért egyes 0 együtthatók helyét üresen hagyjuk (v.ö. a Felszín-formula c. alfejezet lemmája). Észrevétel:

$$\Lambda\Lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_K^2 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) \quad , \Rightarrow \ \lambda_1^2 \cdots \lambda_K^2 = \sum_{\mu \in \{\Lambda\Lambda^* \ K\text{-főminorai}\}} \det(\mu) \ .$$

Innen $\langle \alpha_{i\bullet}, \alpha_{j\bullet} \rangle$-vel jelölve az α mátrix i-ik és j-ik sorainak skalár-szorzatát,

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(T)(t)^2 &= \sum_{\mu \in \{\Lambda\Lambda^* \ K\text{-főminorai}\}} \det(\mu) = \sum_{\nu \in \{\underbrace{\sigma_1 \Lambda\Lambda^* \sigma_1^*}_{\alpha\alpha^*} \ K\text{-főmin.}\}} \det(\nu) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} \det\big(\langle \alpha_{i_j\bullet}, \alpha_{i_k\bullet} \rangle\big)_{j,k=1,\ldots,K} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} \det\Big[\big(\alpha_{i_j k}\big)_{j,k=1}^K \big(\alpha_{k i_j}\big)_{j,k=1}^K\Big] \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} \det\big(\alpha_{i_j k}\big)_{j,k=1}^K \det\big(\alpha_{k i_j}\big)_{j,k=1}^K \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} \det^2\Big[\big(\alpha_{i_j k}\big)_{j,k=1}^K\Big] \ . \end{aligned}$$

2) állítása azonnal következik onnan, hogy

$$\frac{\partial x_i(T)}{\partial t_j} = x_i\left(\frac{\partial T}{\partial t_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, N \quad j = 1, \ldots, K) \ .$$

Megjegyzés. 1) Legyen V egy véges dimenziós vektortér és V^* a duálisa. Azaz

$$V^* := \big\{\text{lineáris } V \to \mathrm{I\!R} \text{ függvények}\big\} .$$

Az $\omega : V^k \to \mathrm{I\!R}$ leképezés k*-forma*, ha az mind a k változójában lineáris, azaz

$$\big[v \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k)\big] \in V^* \qquad (i = 1, \ldots, k \quad v_1, \ldots, v_k \in V) \ .$$

Az ω k-forma *alternáló*, ha

$$\begin{aligned} &\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k) \\ &\quad = -\omega(v_1, \ldots, v_k) \qquad (1 \le i < j \le k \quad v_1, \ldots, v_k \in V) \ . \end{aligned}$$

Ha ω_1 alternáló k-forma, ω_2 alternáló ℓ-forma V-n, akkor a *külső szorzat*uk az az $\omega_1 \wedge \omega_2$ alternáló $(k+\ell)$-forma, amelyre

$$\begin{aligned} &\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) := \\ &\qquad \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\pi \ \mathrm{PERM}} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \omega_1(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) \omega_2(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+\ell)}) \end{aligned}$$

minden $v_1, \dots, v_{k+\ell}$ vektorsorozatra V-ből, ahol az összegzés az $\{1, \dots, k+\ell\}$ indexhalmaz összes permutációira történik, $\mathrm{par}(\pi)$ pedig a π permutáció paritása.*
Definíció szerint

$$\begin{aligned}
\big\{\text{alt. 0-formák}\big\} &:= \mathbb{R} \qquad \text{(konstansok, 0-változós műveletek)} \\
\big\{\text{alt. 1-formák}\big\} &:= V^*
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\dim(V) = N, \Rightarrow &\big\{\text{alt. } (N+i)\text{-formák}\big\} = \{0\} \qquad (i > 0) \\
&\qquad\big\{\text{alt. } N\text{-formák}\big\} = \mathbb{R} \cdot \Big[(v_1, \dots, v_N) \mapsto \det\Big(\frac{(v_1, \dots, v_N)}{(e_1, \dots, e_N)}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

ahol $\{e_1, \dots, e_N\}$ egy bázis V-ben és $\dfrac{(v_1, \dots, v_N)}{(e_1, \dots, e_N)} \in \mathcal{L}(V)$ a lineáris kiterjesztése az $\big[e_i \mapsto v_i : \ i = 1, \dots, N\big]$ leképezésnek. Sőt

$$\begin{aligned}
&\big\{\text{alt. } k\text{-formák}\big\} = \mathrm{Span}\big\{\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k : \ \phi_1, \dots, \phi_k \in V^*\big\} =: \bigwedge^k V^* \\
&\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det\big(\langle \phi_i, v_j \rangle\big)_{i,j=1}^k
\end{aligned}$$

a $\langle \phi, v \rangle := \phi(v)$ konvencióval, ahol $\mathrm{Span}(S)$ az S-beli vektorok által kifeszített altér.

2) A szokásos módon azonosítjuk a V^{**} biduális teret V-vel, azaz

$$v \equiv \big[\, \phi \mapsto \langle \phi, v \rangle \,\big] \qquad (v \in V).$$

Minthogy így V maga is lineáris funkcionálok terének $(= (V^*)^*)$ tekinthető, értelmezhetők $v_1, \dots, v_k \in V$-re a

$$\begin{aligned}
&v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k (V^*)^* \\
&v_1 \wedge \ldots \wedge v_k(\phi_1, \dots, \phi_k) = \det\big(\langle v_i, \phi_j \rangle\big)_{i,j=1}^k \\
&\qquad\qquad\qquad \det\big(\langle \phi_i, v_j \rangle\big)_{i,j=1}^k = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) \ .
\end{aligned}$$

Következésképpen fennáll az a dualitás a $\bigwedge^k V$ és az $\{\text{alt. } k\text{-formák } V\text{-n}\} = \bigwedge^k V^*$ terek között, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall\, \Phi \in \Big(\bigwedge^k V\Big)^* \ \ \exists!\ \omega \text{ alt. } k\text{-forma} \\
&\qquad\qquad \langle \Phi, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \omega(v_1, \dots, v_k) \qquad (v_1, \dots, v_k \in V) \ .
\end{aligned}$$

---

* $\mathrm{par}(\pi) := \big[0$ ha π páros sok cserével, $\ 1$ ha páratlan cserével állítható elő$\big]$.

3) $V = \mathbb{R}^N$ esetén

$$\{x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_K} :\ 1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N\} \text{ BÁZIS} \subset \{\text{alt. } K\text{-formák } \mathbb{R}^N\text{-en}\}$$

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_K} :\ 1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N\} \text{ BÁZIS} \subset \bigwedge^K \mathbb{R}^N ,$$

ahol $e_i := (0, \ldots, \underset{i}{\overset{\smile}{1}}, \ldots, 0)$ $(i = 1, \ldots, N)$ az $\mathbb{R}^N$ kanonikus egységvektorai.

A továbbiakban ellátjuk a $\bigwedge^K (\mathbb{R}^N)^*$ ill. $\bigwedge^K \mathbb{R}^N$ tereket a

$$\Big\| \sum_{i_1, \ldots, i_K} \alpha_{i_1, \ldots, i_K} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_K} \Big\| = \Big[\sum_{i_1, \ldots, i_K} \alpha^2_{i_1, \ldots, i_K} \Big]^{1/2}$$

$$\Big\| \sum_{i_1, \ldots, i_K} \alpha_{i_1, \ldots, i_K} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_K} \Big\| := \Big[\sum_{i_1, \ldots, i_K} \alpha^2_{i_1, \ldots, i_K} \Big]^{1/2}$$

euklideszi normákkal. Itt az egyes vektori külső szorzatok bázis-felbontása

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_K = \sum_{i \le i_1 < \cdots < i_K \le N} \det\big(v_{j, i_k}\big)_{j,k=1}^K e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_K}$$

$$\text{ahol} \quad \det\big(v_{j, i_k}\big)_{j,k=1}^K = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_K}(v_1, \ldots, v_K)$$

Következmény. $\mathrm{Jac}(T) = \Big\| \dfrac{\partial T}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{\partial T}{\partial t_K} \Big\|$

$$= \Big[\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_K} \big(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial t_K} \big)^2 \Big]^{1/2} .$$

$\mathcal{C}^\ell$-kockák

Definíció. Legyen $\ell \in \mathbb{N}$ és legyen I egy korlátos nyitott intervallum $\mathbb{R}^K$-ban (azaz $\exists\ I_1, \ldots, I_K$ korlátos nyitott intervallum$\subset \mathbb{R}$ $\ I_1 \times \cdots \times I_K = I$). A $Q : I \to \mathbb{R}^N$ leképezés egy K-dimenziós $\mathcal{C}^\ell$*-kocka* $\mathbb{R}^N$-ben, ha

$$\exists\ J \text{ nyitott intervallum} \subset \mathbb{R}^K \quad \exists\ T \in \mathcal{C}^\ell(J, \mathbb{R}^N) \qquad J \supset \overline{I} \quad \text{és} \quad Q = T|I .$$

A Q $\mathcal{C}^\ell$-kocka *reguláris*, ha itt a T *lefedő leképezés* választható úgy is, hogy injektív és $\mathrm{Jac}(T) > 0$ legyen.

Megjegyzés. 1) Valójában a $\mathrm{ran}(Q)(= Q(I))$ alakzat a "felület" $\mathbb{R}^N$-ben. Mint függvény, Q a $\mathrm{ran}(Q)$ bejárásáról is információt ad.

2) A felszín-formula szerint $\mathrm{Vol}_K\big(\mathrm{ran}(Q)\big) = \int_I \mathrm{Jac}(Q) d\mathrm{Vol}_K$.

3) Q mint $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ részhalmaza* tekintendő

$$Q \equiv \{(t, Q(t)) :\ t \in I\}.$$

---

* Halmazelméletileg az $f : X \to Y$ függvény az $\{(x, f(x)) :\ x \in X\}$ halmaz.

Így van értelme később a $\mathcal{C}^\ell$-kockák által generált $\mathrm{I\!R}^K \times \mathrm{I\!R}^N$-beli σ-algebráról beszélni.

Propozíció. *Ha* $Q_i : I_i \to \mathrm{I\!R}^N$ $(i=1,2)$ *reguláris* K*-dimenziós* C^ℓ*-kockák és* $\mathrm{ran}(Q_1) = \mathrm{ran}(Q_2)$, *akkor*

$$\exists\ S \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathrm{I\!R}^K) \qquad S : I_2 \leftrightarrow I_1 \qquad Q_2 = Q_1 \circ S \qquad \mathrm{Jac}(S) > 0\,.$$

Bizonyítás. Az $S := Q_1^{-1} \circ Q_2$ leképezés jól-definiált, és

$$S : I_2 \xleftrightarrow{Q_2} \mathrm{ran}(Q_1) \xleftrightarrow{Q_1^{-1}} I_1\,.$$

Állítás: $S \in C^1(I_2, \mathrm{I\!R}^K)$.
Bizonyítás: Legyen $t \in I_2$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $p := Q_2(t)$ ill. $s := Q_1^{-1}(p)(= S(t))$. Minthogy $\mathrm{Jac}(Q_1) \neq 0$, találunk $1 \le i_1 < \ldots < i_K \le N$ indexeket, amelyekre $\det\Big(\dfrac{\partial x_{i_k}(Q_1)}{\partial t_j}(s)\Big)_{j,k=1}^K \neq 0$. Vehető az általánosság megszorítása nélkül $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $\ldots$, $i_K = K$. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_1 : I_1 \times \mathrm{I\!R}^{N-K} &\to \mathrm{I\!R}^N \ (= \mathrm{I\!R}^K \times \mathrm{I\!R}^{N-K}) \\ (s', y) &\mapsto Q_1(s') + (0, y) \end{aligned}$$

leképezést. Itt (az alapkoordináták szerint)

$$\widetilde{Q}_1'(s,0) \text{ mátrixa } = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ Q_1'(s) & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \end{array}\right] & \begin{array}{l} K \\ \\ N\!-\!K \end{array} \\ \begin{array}{cc} K & \qquad N\!-\!K \end{array} & \end{array}$$

ahol $\det(\widetilde{Q}_1') = \det\Big(\dfrac{\partial x_k(Q_1)}{\partial t_j}\Big)_{j,k=1}^K \neq 0$. Az inverz függvény tétel alapján így

$$\exists\ \widetilde{U}\ p\text{-környezet}\ \exists\ \widetilde{V}_1\ s\text{-környezet}\,(\subset \mathrm{I\!R}^N) \qquad \widetilde{Q}_1 : \widetilde{V}_1 \leftrightarrow U \quad \widetilde{Q}_1^{-1} \in \mathcal{C}^\ell(U, \mathrm{I\!R}^N)\,.$$

Mivel Q_2 folytonos, a $V_2 := Q_2^{-1}(\widetilde{U})$ halmaz környezete a t pontnak $\mathrm{I\!R}^K$-ban, és

$$S \mid V_2 = P \circ \widetilde{Q}_1^{-1} \circ Q_2 \mid V_2 \qquad \text{ahol } \ P : (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_K)\ .$$

Tehát $S|V_2$ C^1-leképezések összetétele egy t-környezeten, ami adja az állítást.

Ha már tudjuk, hogy az S átviteli leképezés folytonosan differenciálható, akkor írható

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(Q_2)^2 &= \det(Q_2'^* Q_2') = \det(S'^* Q_1'^* Q_2' S') \\ &= \det(S'^*) \det(Q_1'^* Q_1') \det(S') = \det(S')^2 \mathrm{Jac}(Q_1) \neq 0\ . \end{aligned}$$

Következmény. *A következő alternatíva áll az* S *átviteli leképezésre*

1) $\det\big(S'(t)\big) > 0 \quad (t \in I_2)$ *vagy* 2) $\det\big(S'(t)\big) < 0 \quad (t \in I_2)$.

Bizonyítás. Mivel a $t \mapsto S'(t)$ derivált folytonos, a $t \mapsto \det\big(S'(t)\big)$ függvény is folytonos. Tehát az I_2 tégla összefüggősége miatt az $I := \det\big(S'(I_2)\big)$ képhalmaz egy intervallum $\mathrm{I\!R}$-ben. Mivel $0 \notin I$, vagy $I > 0$ vagy $I < 0$.

Definíció. A $Q_i : I_i \to \mathbb{R}^N$ $(i = 1,2)$ K-dimenziós (nem feltétlenül reguláris) $\mathcal{C}^\ell$-kockák *ekvivalensek*, jelölésben $Q_1 \sim Q_2$, ha

$$\exists\, S : I_2 \leftrightarrow I_1 \qquad S \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^K) \qquad \det(S') > 0\,.$$

Differenciálmértékek és -formák

Definíció. Legyen $\ell \in \{0,1,\dots\}$ és legyen $\mathcal{R}$ $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$-beli halmazok egy olyan családja, amelyre $\mathcal{R} \supset \{K\text{-dim. } C^1\text{-kockák}\}$. Egy $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény K-adrendű $\mathcal{C}^\ell$-*differenciálmérték* $\mathbb{R}^N$-en, ha

ν véges értékű előjeles mérték és $\exists\, \phi \in \mathcal{C}^\ell\big(\mathbb{R}^N, (\bigwedge^K \mathbb{R}^N)^*\big)$

$$\nu(Q) = \int_I \Big\langle \phi\big(Q(T)\big), \frac{\partial Q}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q}{\partial t_K} \Big\rangle dt_1 \cdots dt_K \qquad (Q : I \to \mathbb{R}^N \;\; C^1\text{-kocka})\,.$$

Megjegyzés. Heurisztikusan: $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial t_1} dt_1\right) \wedge \cdots \wedge \left(\dfrac{\partial Q}{\partial t_K} dt_k\right)$ egy infinitezimális irányitott parallellepipedon a $\dfrac{\partial Q}{\partial t_1} dt_1, \dots, \dfrac{\partial Q}{\partial t_k} dt_k$ oldalvektorokkal.

Példa. 1) Ha $x \mapsto \overrightarrow{F}(x)$ egy erőtér $\mathbb{R}^3$-on és $Q : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ egy út, akkor

$$[t, t+dt] \text{ idő alatt a MUNKA } = \Big\langle \overrightarrow{F}\big(Q(t)\big), \frac{\partial Q}{\partial t} dt \Big\rangle\,.$$

2) Legyen $x \in \mathbb{R}^3$-nél $\overrightarrow{v}(x)$ folyóviz sebessége az (időtől függetlenül) az x helyen. Ha a $Q : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ reguláris $\mathcal{C}^1$-kocka $\mathrm{ran}(Q)$ képe e folyó egy keresztmetszete, akkor az ezen egységnyi idő alatt átfolyó víz előjelezett* mennyisége

$$\int_{(0,1)^2} \det\Big(\overrightarrow{v}\big(Q(t)\big), \frac{\partial Q}{\partial t_1}, \frac{\partial Q}{\partial t_2}\Big) dt_1 dt_2 = \text{ÁTFOLYÁSI SEBESSÉG.}$$

Itt a definíció jelölésével $\Phi(x) : \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \ni \overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2} \mapsto \det(\overrightarrow{v}(x), \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.

Propozíció. *Legyen ν egy K-rendű $\mathcal{C}^\ell$-differenciálmérték $\mathbb{R}^N$-ben. Ekkor* $\exists\, \omega \in C^\ell\big(\mathbb{R}^N, \{\textit{alt. } K\textit{-formák}\}\big)$

$$\nu(Q) = \int_I \omega(t_1, \dots, t_K) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial t_K}\right) dt_1 \cdots dt_k \qquad (Q : I \to \mathbb{R}^N \;\; C^1\textit{-kocka})\,.$$

Bizonyítás. Ez azonnal adódik az $\bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*$ és $\bigwedge^K \mathbb{R}^N$ terek dualitásáról szóló 2) megjegyzésből.

Definíció. Az ℓ-szer folytonosan differenciálható

$$\mathbb{R}^N \to \big\{\text{alternáló } K\text{-formák}\big\} \big(= \textstyle\bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*\big)$$

függvények a K-adrendű $\mathcal{C}^\ell$-*differenciálformák* (röviden K-rendű $\mathcal{C}^\ell$-formák) $\mathbb{R}^N$-en. Egy ω *differenciálforma integrálja* a $Q : I \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^\ell$-kockán

$$\int_Q \omega := \int_I \omega(t) \Big(\frac{\partial Q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial t_k}\Big) dt_1 \cdots dt_K$$

---

* Pozitív előjellel számítva, ha a a víz a felület $\dfrac{\partial Q}{\partial t_1} \times \dfrac{\partial Q}{\partial t_2}$ (vektori szorzat) normálisának irányában folyik át, és negatívval, ha ellenkezőleg.

(itt szükségképpen [ω rendje] = [Q dimenziója] kell, hogy legyen).

Következmény. *A differenciálmértékek differenciálformák integráljai a $\mathcal{C}^1$-kockákon.*

Tétel. *Legyen ν egy differenciálmérték $\mathbb{R}^N$-en és $Q_k : I_k \to \mathbb{R}^N \quad (k = 1, 2)$ két K-dimenziós $\mathcal{C}^1$-kocka. Ha $Q_1 \sim Q_2$, akkor $\nu(Q_1) = \nu(Q_2)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Q_1 \sim Q_2$. Vegyünk ekkor egy $\mathcal{C}^1$-sima

$$S : I_2 \leftrightarrow I_1 \qquad Q_2 = Q_1 \circ S \qquad \det(S') > 0$$

átviteli leképezést. Állítás:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} = \det(S') \cdot \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S)\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(S)\Big) \,.$$

Bizonyítás: az összetett függvény differenciálási láncszabálya szerint

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_j} = \frac{\partial Q_1(S)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial Q_1}{\partial t_i}(S) \frac{\partial t_i(S)}{\partial t_j}$$

ahol a koordinátázás $t_k : (\xi_1, \ldots, \xi_k) \mapsto \xi_k$. Innen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} = \\
&\quad = \sum_{i_1=1}^{K} \cdots \sum_{i_k=1}^{K} \frac{\partial t_{i_1}(S)}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial t_{i_k}(S)}{\partial t_K} \Big[\frac{\partial Q_1}{\partial t_{i_1}}(S)\Big] \wedge \cdots \wedge \Big[\frac{\partial Q}{\partial t_{i_k}}(S)\Big] \\
&\quad = \sum_{\pi \ K-\mathrm{PERM}} \frac{\partial t_{\pi(1)}(S)}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial t_{\pi(K)}(S)}{\partial t_K} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \Big[\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S)\Big] \wedge \cdots \wedge \Big[\frac{\partial Q_1}{\partial t_K(S)}\Big].
\end{aligned}$$

Az állításból azonnal következik, hogy ha ν-t a $\phi \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^N, \big(\bigwedge^K \mathbb{R}^N\big)^*\big)$ függvény definiálja, akkor

$$\begin{aligned}
&\nu(Q_2) = \\
&\quad = \int_{I_2} \Big\langle \phi\big(Q_2(t)\big), \frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} \Big\rangle dt_1 \cdots dt_K \\
&\quad = \int_{I_2} \Big\langle \phi\big(Q_1(S(t)\big), \det\big(S'(t)\big) \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}\big(S(t)\big) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}\big(S(t)\big) \Big\rangle dt_1 \cdots dt_K \\
&\quad = \int_{I_2} \Big\langle \phi\big(Q_1\big(S(t)\big)\big), \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}\big(S(t)\big) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}\big(St)\big) \Big\rangle \underbrace{\det S'(t)}_{\mathrm{Jac}(S)(t) > 0} dt_1 \cdots dt_K \\
&\quad = \int_{I_1} \Big\langle \phi\big(Q_1(s)\big), \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(s) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(s) \Big\rangle ds_1 \ldots ds_K \\
&\quad = \nu(Q_1) \,,
\end{aligned}$$

az utolsó lépésben az $s := S(t)$ helyettesítéssel.

Definíció. A Q_1, Q_2 K-dimenziós C^1-kockák *ellentétes irányításúak*, $Q_1 \updownarrow Q_2$, ha

$$\mathrm{ran}(Q_1) = \mathrm{ran}(Q_2) \qquad \det(Q_1^{-1} \circ Q_2) < 0 \,.$$

Következmény. *Ha a tételben* $Q_1 \updownarrow Q_2$, *akkor* $\nu(Q_1) = -\nu(Q_2)$.

Bizonyítás. Lemásolható az előző bizonyítás, de ott az utolsó előtti lépésnél $\det(S'(t)) = -\mathrm{Jac}(S)(t)$.

Láncok

Definíció. K-dimeziós $\mathbb{R}^N$-beli $\mathcal{C}^\ell$*-kockalánc* alatt olyan

$$\Psi : \left\{K\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-formák } \mathbb{R}^N\text{-en}\right\} \to \mathbb{R}$$

lineáris funkcionált értünk, amelyre

$$\exists\ Q_1, \ldots, Q_n \ \ C^\ell\text{-kockák} \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$$

$$\Psi(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{Q_i} \omega \qquad \big(\omega \ \ K\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-forma}\big) \ .$$

A továbbiakban a Q $\mathcal{C}^\ell$-kocka láncát $\widetilde{Q}$-vel jelöljük. Azaz

$$\widetilde{Q} : \omega \mapsto \int_Q \omega \ .$$

Az előző alfejezet konklúziója ezzel a terminológiával:

Következmény. 1) $Q_1 \sim Q_2 \ \Rightarrow \ \widetilde{Q}_1 = \widetilde{Q}_2$. $\quad$ 2) $Q_1 \updownarrow Q_2 \ \Rightarrow \ \widetilde{Q}_1 = -\widetilde{Q}_2$.

Megjegyzés. Egy ”irányított felület” esetén az elsősorban az szokott érdekes lenni, hogy a differenciálformák integráljai milyen értéket vesznek fel rajta. A paraméterezés ill. a $\mathcal{C}^\ell$-kockákra való felparcellázás módja ebből a szempontból indifferens.

Lemma. *Egy differenciálformát meghatároznak a láncokon, sőt már a reguláris* $\mathcal{C}^\infty$*-kockákon vett integráljaik.*

Bizonyítás. Legyen $\omega_1 \neq \omega_2$ két különböző K-rendű differenciálforma. Ekkor valamely $p, v_1, \ldots, v_K \in \mathbb{R}^N$-re $\omega_1(p)(v_1, \ldots, v_K) - \omega_2(p)(v_1, \ldots, v_K) = 1$. Most a $Q_\varepsilon : (0,1)^K \ni t \mapsto p + \varepsilon \sum_k t_k v_k$ reguláris $\mathcal{C}^\infty$-kockákra

$$\varepsilon^{-K}\Big[\int_{Q_\varepsilon} \omega_1 - \int_{Q_\varepsilon} \omega_1\Big] \to 1 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Megjegyzés. Formailag, a lánc definiciójában nemcsak egész, hanem tetszőleges valós (sőt komplex) együtthatókat is megengedhetnénk. A kombinatorikus topológiában kap pl. szerepet ezek $\mathbb{Z}$-belisége.

Természetesen egy láncot mindig többféleképpen állíthatunk elő $\mathcal{C}^\ell$-kockák $\mathbb{Z}$-lineáris kombinációjaként. Sőt pl. a

$$Q : (-1,1) \ni t \mapsto t^2$$

1-dimenziós (de nem reguláris) $\mathbb{R}$-beli $\mathcal{C}^\infty$-kockánál $\widetilde{Q} = 0$, azaz általában nem lehet a kiindulási kockát sem egyértelműen ”visszakódolni” a láncából. Nem így a reguláris esetben.

Propozíció. *Ha* Q_1, Q_2 *reguláris* $\mathcal{C}_1$*-kockák és* $\widetilde{Q_1} = \widetilde{Q_2}$, *akkor* $Q_1 \sim Q_2$.

Bizonyítás. Ha $Q_1 \not\sim Q_2$, akkor $\mathrm{ran}(Q_1) \neq \mathrm{ran}(Q_2)$. Vehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy $\mathrm{ran}(Q_1) \setminus \mathrm{ran}(Q_2) \neq \emptyset$. Véve olyan T_1, T_2 $\mathcal{C}^1$-síma injektív kiterjesztéseket, amelyekre $\mathrm{dom}(T_i) \supset \overline{\mathrm{dom}(Q_i)}$, $\mathrm{Jac}(T_i) > 0$ $(i = 1,2)$, akkor az előző alfejezet tételének bizonyítási technikájával kimutatható a $\mathrm{Jac}(T_1), \mathrm{Jac}(T_2) > 0$ tulajdonság alapján, hogy

$$\exists\; p \in \mathrm{ran}(Q_1) \qquad \min\{\|p-q\| :\; q \in \overline{\mathrm{ran}(Q_2)}\} > 0\,.$$

Ennél a $p = Q_1(t)$ pontnál is $\dfrac{\partial Q_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{\partial Q_1}{\partial t_K} \neq 0$ (ahol $K = \dim(Q_1)$), mivel $\mathrm{Jac}(Q_1)(t) > 0$. Ezért itt

$$\exists\; \omega_0 \text{ alt.} K\text{-forma} \qquad \omega_0\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}\Big) = 1\,.$$

Mivel a Q_1' derivált folytonos és a Q_1-et lefedő T_1 leképezés injektív, van olyan U környezete a p pontnak, amelyen

$$\omega_0\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(u), \ldots, \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(u)\Big) > 0 \qquad (u \in U), \qquad U \cap \overline{\mathrm{dom}(Q_2)} = \emptyset\,.$$

Vegyünk egy egy olyan $0 \neq w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ függvényt, amelyik az U környezeten kívül eltűnik.* Most az

$$\omega(x)(v_1, \ldots, v_K) := w(x)\omega_0(v_1, \ldots, v_K) \qquad (x, v_1, \ldots, v_K \in \mathbb{R}^N)$$

$\mathcal{C}^\infty$-differenciálformára $\int_{Q_1} \omega > 0 = \int_{Q_2} \omega$, azaz ilyenkor $\widetilde{Q_1} \neq \widetilde{Q_2}$.

Megjegyzés. Egy reguláris C^1-kockának mindig vannak "sarkai".
Kérdés: Reprezentálható-e e egy gömb reguláris kockalánccal?

Példa. $\mathbb{R}^2$-ben egy körlapot 5 db 2-dimenziós C^∞-kocka láncával lehet reprezentálni:

$$\int_{t_1^2+t_2^2<1} \omega(t_1,t_2)(e_1,e_2)dt_1dt_2 = \sum_{k=0}^{4} \int_{Q_k} \omega \quad \text{ahol}$$

$$Q_0(t) := t \qquad \Big(t \in \big(-1/2, 1/2\big)^2\Big)$$

$$Q_k(\varphi,\rho) := \Big[\rho + (1-\rho)\sqrt{1/4 + \sin^2(\varphi - k\pi/2)}\Big] \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$\Big(\big(0 < \rho < 1 \;\; k\pi/2 - \pi/4 < \varphi < k\pi/2 + \pi/4\big) \;\; k = 1,2,3,4\Big)\,.$$

C^1-kocka határa, Stokes tétel

Definíció. A $K \geq 1$ dimenziós $Q : (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_K,b_K) \to \mathbb{R}^N$ C^ℓ-kocka $(\ell \geq 0)$ *határ*a (pontosabban *lánc-határ*a) a

$$\widetilde{\partial Q} := \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \cdot \big[(\xi_1, \ldots, \xi_{K-1}) \mapsto Q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, b_d, \xi_{d+1}, \ldots, \xi_{K-1})\big]^{\sim}$$
$$- \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \cdot \big[(\xi_1, \ldots, \xi_{K-1}) \mapsto Q(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, a_d, \xi_{d+1}, \ldots, \xi_{K-1})\big]^{\sim}$$

---

* Tudjuk: a $\phi : \xi \mapsto [\exp(-1/x^2)\ (\xi > 0),\ 0\ (\xi \leq 0)]$ függvényre $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Vagyis, ha a p körüli $\delta > 0$ sugarú gömb $\subset U$, akkor $w : x \mapsto \phi(\delta - \|x-p\|)$ megfelel.

$(K-1)$-dimenziós $\mathcal{C}^\ell$-kockalánc.

Megjegyzés. Egy, a lánc-határnak természetes módon megfelelő felület (itt $2K$ db. $(K-1)$-dim. $\mathcal{C}^\ell$-kocka uniója) a

$$\partial Q := \bigcup_{d=1}^{K} \left[\Pi_{j=1}^{K}(a_j,b_j) \ni \xi \mapsto Q\big(\Pi_{j<d} S_j(\xi_1,\dots,\xi_{d-1},b_d,\xi_{d+1},\dots,\xi_{K-1})\big)\right]$$
$$\cup \bigcup_{d=1}^{K} \left[\Pi_{j=1}^{K}(a_j,b_j) \ni \xi \mapsto Q\big(S_{s(d)}\Pi_{j<d} S_j(\xi_1,\dots,\xi_{d-1},a_d,\xi_{d+1},\dots,\xi_{K-1})\big)\right]$$

ahol $S_j : (\zeta_1,\dots,\zeta_K) \mapsto (\zeta_1,\dots,\zeta_{j-1},a+b-\zeta_j,\zeta_{j+1},\dots,\zeta_K)$ és $s(d) := \big[K \text{ ha } d=1,\ d-1 \text{ ha } d>1\big]$.

Tétel. (Stokes). *Minden $K-1(\geq 0)$ rendű ω C^1-formához található pontosan egy, szokásosan $d\omega$-val jelölt, K-rendű $\mathcal{C}^0$-forma, amelyre*

$$\widetilde{\partial Q}(\omega) = \widetilde{Q}(d\omega) \qquad (Q\ \ K\text{-dim. } C^2\text{-kocka})\ .$$

Bizonyítás. Az előző alfejezet lemmája szerint szükségképpen $\omega_1 = \omega_2$, ha $\widetilde{\partial Q}(\omega) = \widetilde{Q}(\omega_1) = \widetilde{Q}(\omega_2)\ \forall\ Q$. Legyen ezután az ω $(K-1)$-rendű C^1-forma és a $Q : I = (a_1,b_1)\times\cdots\times(a_K,b_K) \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^2$-kocka tetszőlegesen rögzítve. Ekkor $-\widetilde{\partial Q}(\omega)$ értéke

$$\sum_{d=1}^{K}(-1)^d \overbrace{\int\cdots\int}^{K-1}_{\Pi_{j\neq d}(a_j,b_j)} \omega(t_1,\dots,\tau,\dots,t_K)\left(\frac{\partial Q}{\partial t_j}(t_1,\dots,\tau,\dots,t_k) :\ j\neq d\right)\Big|_{\tau=a_d}^{b_d} \Pi_{j\neq d}dt_j$$
$$= \sum_{d=1}^{K}(-1)^d \int_I \frac{\partial}{\partial t_d}\Big[\omega\big(Q(t)\big)\Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} :\ j\neq d\Big)\Big] dt_1\cdots dt_K$$
$$= \sum_{d=1}^{K}(-1)^d \int_I \Big[\frac{\partial \omega(Q)}{\partial t_d}\Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} :\ j\neq d\Big) +$$
$$+ \sum_{m\neq d}\omega\Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} \text{ ha } j\neq m,\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m \partial t_d} \text{ ha } j=m :\ j\neq d\Big)\Big] dt_1\cdots dt_K\ .$$

Itt a második tag eltűnik. Ugyanis $v_j := \partial Q/\partial t_j$-t írva

$$\sum_{d=1}^{K}(-1)^d \sum_{m\neq d}\omega\Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} \text{ ha } j\neq m,\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m\partial t_d} \text{ ha } j=m :\ j\neq d\Big)$$
$$= \sum_{d<m}\Big[(-1)^d\omega\Big(v_1,\dots,v_{d-1},v_{d+1},v_{d+2},\dots,v_{m-1},\frac{\partial^2 Q}{\partial t_m\partial t_d},v_{m+1},\dots,v_K\Big) +$$
$$+ (-1)^m\omega\Big(v_1,\dots,v_{d-1},\frac{\partial^2 Q}{\partial t_m\partial t_d},v_{d+2},\dots,v_{m-2},v_{m-1},v_{m+1},\dots,v_K\Big)\Big] =$$
$$= \sum_{d<m}\big[(-1)^d\omega(\cdots) + (-1)^{m+m+d-1}\omega(\cdots)\big] =$$
$$= \sum_{d<m}(-1)^d\big[\omega(\cdots) - (-1)^{2m-2d}\omega(\cdots)\big] = 0$$

mivel $(m-d-1)$ cserével vihető a 2-ik tagban a $\dfrac{\partial Q}{\partial t_m \partial t_d}$ komponens az m-ik helyre. Vagyis

$$\begin{aligned}
\widetilde{\partial} Q(\omega) &= \int_I \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \frac{\partial \omega(Q)}{\partial t_d} \Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : \ j \neq d \Big) dt_1 \cdots dt_K \\
&= \int_I \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \frac{\partial Q}{\partial t_d} \omega'(Q) \Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : \ j \neq d \Big) dt_1 \cdots dt_K \\
&= \int_I \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \omega'_{\partial Q / \partial t_d}(Q) \Big(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : \ j \neq d \Big) dt_1 \cdots dt_K \ .
\end{aligned}$$

Külső derivált

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$-beli $(K-1)$-rendű ω C^1-forma *külső deriváltja* az $x \in \mathbb{R}^N$ helyen

$$d\omega(x) : (v_1, \ldots, v_K) \mapsto \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \omega'_{v_d}(x) \big(v_j : j \neq d \big) \ .$$

Ha L egy lánc ill. Q egy $\mathcal{C}^\ell$-kocka, akkor formálisan az érzékletesebb

$$\int_L \omega := L(\omega) \ , \qquad \int_{\partial Q} := \widetilde{Q}(\omega)$$

jelöléseket is használni foguk.

Megjegyzés. Stokes tételének megfelelően

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega \qquad (\omega \ \mathcal{C}^1\text{-forma}, \ Q \ \mathcal{C}^2\text{-kocka}) \ .$$

Lemma. *Ha* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N) \Big(= \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^N, \{\textit{alt. } 0\textit{-formák}\}\big) = \big\{0\textit{-rendű } \mathcal{C}^1\textit{-formák}\big\} \Big)$,

akkor
$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ .$$

Bizonyítás. Definíció szerint, $v \in \mathbb{R}^N$-re a $p \in \mathbb{R}^N$ helyen

$$\begin{aligned}
df(p)(v) &= (-1)^0 f'_v(p) = \sum_{i=1}^{N} x_i(v) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\
dx_j(p)(v) &= \sum_{i=1}^{N} x_i(v) \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = x_j(v) \qquad (j = 1, \ldots, N) \ .
\end{aligned}$$

Lemma. *Ha* $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *akkor*

$$d\big(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}} \ .$$

Bizonyítás. A hely explicit jelölését elhagyva,

$$\begin{aligned} & d\big(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}\big)(v_1, \dots, v_K) = \\ & = \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} \sum_{i=1}^{N} x_i(v_d) \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \ \big[dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}\big](v_j : \ j \neq d) \\ & = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{d=1}^{K} (-1)^{d-1} x_i(v_d) \ \det\Big(x_{i_m}(v_j)\Big)_{j \neq d, \ 1 \leq m < K} \\ & = \sum_{i_0=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}} \ \det\Big(x_{i_m}(v_j)\Big)_{j=1}^{K} {}_{m=0}^{K-1} \\ & = \sum_{i_0=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}} \ \big[dx_{i_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}\big](v_1, \dots, v_K) \ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. 1) A d jelölés eredetéről.
Ha $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ egy növő függvény, $Q : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy 1-dimenziós $\mathcal{C}^1$-kocka $\mathbb{R}$-ben, akkor $\int_Q d\alpha = \alpha(q) - \alpha(p)$ ahol $p = Q(a + 0) = \lim_{t \downarrow a} Q(t)$ ill. $q = Q(b - 0) = \lim_{t \uparrow b} Q(t)$ a $\mathrm{ran}(Q)$ szakasz végpontjai. Ez nem más, mint $\mathrm{ran}(Q)$-nak az α súlyfüggvény szerinti Stieltjes mértéke. Így

$\int_Q g \, d\alpha$	$= \int_{\mathrm{ran}(Q)} g(x) \, d\alpha(x)$	(g korl. Borel fgv.)).
Differenciálmérték	Stieltjes int.	

Speciálisan, a bal oldalon x-szel jelölve a $\xi \mapsto \xi$ koordinátafüggvényt,

$\int_Q g \, dx$	$= \int_{\mathrm{ran}(Q)} g(x) \, d\alpha(x)$	(g folytonos fgv.)).
Differenciálmérték	Riemann int.	

2) A helyettesítéses integrálást a két Lemma szerint a következő technikával is végrehajtatjuk (ami persze nem más, mint a Jacobi determináns egy egészen elemi kiszámítási módja, és csak kevés változó esetén gazdaságos).

Példa: az $x = r \cos \varphi, \ y = r \sin \varphi$ polárkoordinátás helyettesítés

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \big[d(r \cos \varphi)\big] \wedge \big[d(r \sin \varphi)\big] \\ &= \big[r(-\sin \varphi) d\varpi + \cos \varphi dr\big] \wedge \big[r(\cos \varphi d\varpi + \sin \varphi dr\big] \\ &= -r \sin \varphi \cos \varphi \underbrace{d\varphi \wedge d\varphi}_{0} - r \sin^2 \varphi \ d\varphi \wedge dr + \\ &\quad + r \cos^2 \varphi \ \underbrace{dr \wedge d\varphi}_{-d\varphi \wedge dr} + \sin \varphi \cos \varphi \underbrace{dr \wedge dr}_{0} \\ &= (-r \sin^2 - r \cos^2 \varphi) d\varphi \wedge dr = -r d\varphi dr \ , \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\underbrace{|-r|}_{r}d\varphi dr \ .$$

Tétel. 1) $d^2\omega = 0 \qquad \big(\omega\in\mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*\big)\big)$.

2) $d(\omega_1\wedge\omega_2)=(d\omega_1)\wedge\omega_2+(-1)^{K_1}\omega_1\wedge(d\omega_2) \quad \Big(\omega_i\in\mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K_i}(\mathbb{R}^N)^*\big) \ \ i=1,2\Big)$.

Bizonyítás. Tudjuk: Egy K-rendű Ω $\mathcal{C}^\ell$-forma mindig $f\cdot dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}$ alakúak véges lineáris $\big(i_1 < i_2 < \ldots i_K \quad f\in C^\ell(\mathbb{R})\big)$ kombinációja. Így 1)2) bizonyítását elég csak ilyenekre elvégeznünk.

1) $d^2[f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}] = d[(df)\wedge x_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}] = (d^2 f)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}$, és itt

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \\ &= \sum_{i=1}^N\Big(d\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\underbrace{dx_j\wedge dx_i}_{-dx_i\wedge dx_j}\Big] = 0 \ . \end{aligned}$$

2) Vehető $\omega_1 := f\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K} \quad \omega_2 = g\,dx_{i_{K+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}}$.
Ekkor

$$\begin{aligned} d(\omega_1\wedge\omega_2) &= d(fg\cdot dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}}) = \big[\,d(f\,g)\,\big]\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \Big[\sum_{i=1}^N \frac{\partial fg}{\partial x_i}dx_i\Big]\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \Big[\sum_{i=1}^N\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,g + f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)dx_i\Big]\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge d_{x_{i_K}}\wedge\big(g\,dx_{i_{K+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}}\big)+ \\ &\quad +\sum_{i=1}^N f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}\wedge(-1)^K\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_{K+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{K+L}} \ . \end{aligned}$$

Lánc határa

Megjegyzés. Hasonlóan mint az 1-változós esetben belátható* , hogy

$\overline{I}$ kompakt $\subset G$ nyitott $\subset\mathbb{R}^N, \quad f\in C^\ell(G), \Rightarrow$

$\exists\ f_1, f_2,\ldots\in C^\infty(G) \qquad f_n^{(k)} \rightrightarrows f \ \ \overline{I}$ fölött $\quad (n\to\infty,\ k=0,\ldots,\ell)$.

---

* Nevezetesen, az $f_n(p) := \int \overline{f}(p-z)(2\pi)^{-N/2}n^N\exp[-\|nz\|^2/2]\,d\mathrm{Vol}_N(z)$ függvények megfelelnek, ahol $\overline{f}(q) := \big[f(q)$ ha $q\in G,\ 0$ ha $q\neq G\big]$.

Lemma. *Ha* $Q : I \to \mathbb{R}^N$ K*-dimenziós* $\mathcal{C}^1$*-kocka és* ω *egy* $(K-1)$*-rendű* $\mathcal{C}^1$*-forma* $\mathbb{R}^N$*-en, akkor*

$$\widetilde{\partial} Q(\omega) = \widetilde{Q}(d\omega)\,.$$

Bizonyítás. Stokes tétele szerint az állítás $\mathcal{C}^2$-kockára igaz. Az iménti megjegyzés alapján

$$\exists\ Q_1, Q_2, \ldots : I \to \mathbb{R}^N \quad C^2\text{-kockák} \qquad Q_n \rightrightarrows Q \quad Q' \rightrightarrows Q' \qquad (n \to \infty)\,.$$

Ezekkel

$$\widetilde{\partial} Q(\omega) \to \widetilde{\partial} Q(\omega) \quad \widetilde{Q}(d\omega) \to \widetilde{Q}(d\omega) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Mivel itt $\widetilde{\partial} Q_n(\omega) = \widetilde{Q}_n(d\omega) \quad (n = 1, 2, \ldots)$, határértékben $\widetilde{\partial} Q(\omega) = \widetilde{Q}(d\omega)$.

Tétel. *Ha* $Q_1, R_1, \ldots, Q_m, R_m$ K*-dimenziós* C^1*-kockák,* $\alpha_1 \beta_1, \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{Z}$*, akkor*

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{Q}_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \widetilde{R}_i \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\partial} Q_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \widetilde{\partial} R_i\ .$$

Bizonyítás. Legyen az $\omega \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*\big)$ $\mathcal{C}^0$-forma rögzítve tetszőlegesen. Belátandó: $\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\partial} Q_i(\Omega) = \sum\limits_{i=1}^m \beta_i \widetilde{\partial} R_i(\omega)$.

A megjegyzés szerint találhatók olyan $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $(K-1)$-rendű $\mathcal{C}^1$-formák $\mathbb{R}^N$-en, amelyekre $\omega_n \rightrightarrows \omega \quad (n \to \infty)$. A lemma alapján tehát

$$\widetilde{\partial} Q_i(\omega_n) = \widetilde{Q}_i(d\omega_n) \qquad \widetilde{\partial} R_i(\omega_n) = \widetilde{R}_i(d\omega_n) \qquad (i = 1, \ldots, m \quad n = 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\partial} Q_i(\omega_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{Q}_i(d\omega_n) \overset{\text{Feltevés}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^m \beta_i \widetilde{R}_i(d\omega_n) = \sum_{i=1}^m \beta_i \widetilde{\partial} R_i(\omega_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\ .$$

Innen $n \to \infty$-re $\quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\partial} Q_i(\omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i \widetilde{\partial} R_i(\omega)$.

Definíció. A K-dimenziós L $\mathcal{C}^1$*-kockalánc határa* az a

$$\partial L : \big\{ (K-1)\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-formák} \big\} \to \mathbb{R}$$

lineáris funkcionál, amelyre

$$\partial L(\omega) := \Big[\sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\partial} Q_i(\omega) \ :\ L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{Q}_i \ \text{ ahol } \ Q_1, \ldots, Q_m\ \mathcal{C}^1\text{-kockák, } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z} \Big]\ .$$

Következmény. *Ha* L *egy* K*-dimenziós kockalánc és* $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*)$*, akkor*

$$\partial L(\omega) = \lim_{n \to \infty} L(d\omega_n) \qquad \Big(\omega_n \rightrightarrows \omega\ ,\ \ \omega_1, \omega_2, \ldots \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*\big)\Big)\ .$$

Felületdarabok

Voltaképpen még nem tisztáztuk azt a kérdést, hogy léteznek-e egyáltalán dirrerenciálmértékek. Azaz egy adott ω $\mathcal{C}^0$-formához (K-rendű, $\mathbb{R}^N$-en)

$$\underline{\exists ?}\ \nu \text{ lokális előjeles mérték} \qquad \nu(Q) = \int_Q \omega \qquad (Q\ \ K\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-kocka}).$$

Ennek a (pozitív) megválaszolása annál inkább érdekes lenne, mivel a külső derivált absztrakt definíciója mellett nagyon természetes pl. az $\int .\, dx$ szimbólumot mint egy "integrálásra éhes" (vagyis az $\int f dx$ integráláshoz f függvényeket váró) műveleti jelet felfogni.

Először megvizsgáljuk, hogy a differenciálható kockákból kiindulva milyen alakzatokon lehet ilyen lokális előjeles mértékeket definiálni.

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^N$-beli K-dimenziós $Q : I \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^\ell$-kockát azonosítottuk az $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$-beli $\{(t, Q(t)) :\ t \in I\}$ alakzattal (ami a grafikonja).

Definíció. Az $F \subset \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ halmaz K-dimenziós $\mathcal{C}^\ell$*-felületdarab* $\mathbb{R}^N$-ben, ha

$$\exists\ G \text{ korlátos nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \exists\ A \text{ Borel} \subset G \quad \exists\ T \in \mathcal{C}^\ell(G, \mathbb{R}^N)$$
$$\overline{A} \subset G \ \text{ és } \ F = T \mid G\ .$$

Lemma. *Ha G nyitott$\subset \mathbb{R}^K$ és $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$, akkor az $S := \big\{t :\ T_1(t) = T_2(t),\ T_1'(t) \neq T_2'(t)\big\}$ első-rendű egybeesési paramétertartományra* $\mathrm{Vol}_K(S) = 0$.

Bizonyítás. A döntő észrevétel az, hogy

$$\forall t \in S\ \exists U\ t\text{-környezet} \subset G\ \exists Q\ (K{-}1)\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-kocka} \subset \mathbb{R}^N \qquad S \cap U = \mathrm{ran}(Q).$$

Bizonyítás: Legyen $t \in S$ tetszőlegesen adott. Ekkor

$$\exists\ i, j \qquad \frac{\partial x_i(T_1)}{\partial t_j}(t) \neq \frac{\partial x_i(T_2)}{\partial t_j}(t)\ .$$

Vehető, hogy itt $i = N$ és $j = K$. Most

$$f := T_1 - T_2 \ \text{ mellett} \qquad f(t) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t_k}(t) \neq 0\ .$$

Az implicit függvény tétel szerint tehát

$$\begin{aligned} &\exists\ I_1, \ldots, I_K \text{ nyitott intervallum} \subset \mathbb{R} \quad \exists g \in \mathcal{C}^1(I_1 \times \cdots \times I_{K-1}) \\ &I_1 \times \cdots \times I_k \ \ t\text{-környezet} \ \text{ és } \qquad \big\{p \in I_1 \times \cdots \times I_K :\ f(p) = 0\big\} = \\ &\qquad\qquad = \big\{\big(p_1, \ldots, p_{K-1}, g(p_1, \ldots, p_{K-1})\big) :\ p_1 \in I_1, \ldots, p_{K-1} \in I_{K-1}\big\}\ . \end{aligned}$$

Választva egy olyan nyitott $I \neq \emptyset$ intervallumot $\mathbb{R}^{K-1}$-ben, amelyre

$$(t_1, \ldots, t_{k-1}) \in I\ , \quad \overline{I} \subset I_1 \times \cdots \times I_{K-1}\ ,$$

az észrevétel bizonyításához a

$$Q : I \ni (p_1, \ldots, p_{K-1}) \mapsto (p_1, \ldots, p_{K-1}, g(p_1, \ldots p_{K-1})$$

$\mathcal{C}^1$-kocka megfelel.

Az észrevételből azonnal következik, hogy

$$\forall\ t \in S \quad \exists\ U_t\ t\text{-környezet} \subset G \qquad \mathrm{Vol}_k(S \cap U) = 0.$$

Lindelöf tétele szerint az U_t ($t \in S$) környezetek közül kiválasztható egy $U_{t^{(1)}}, U_{t^{(2)}}, \ldots$ sorozat, amely lefedi az S alakzatot. Ezekkel pedig

$$\mathrm{Vol}_K(S) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_K\big(S \cap U_{t(n)}\big) = 0\ .$$

Propozíció. *Tegyük fel, hogy* $F : A \to \mathbb{R}^N$ *egy* K*-dimenziós* $\mathcal{C}^1$*-felületdarab, amelynek* $T_i : G_i \to \mathbb{R}^N$ $(i=1,2)$ *két különböző lefedése, ahol*

$\overline{A} \subset G_1, G_2$ *korl. nyitott*$\subset \mathbb{R}^K$ $\qquad T_i \in \mathcal{C}^1(G_i, \mathbb{R}^N) \qquad F = T_i \mid A \qquad (i=1,2)$.

Ekkor bármely $\Phi \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^N \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^N)\big)$ *függvényre*

$$\int_A \Phi(T_1, T_1')\, d\mathrm{Vol}_K = \int_A \Phi(T_2, T_2)\, d\mathrm{Vol}_K\ .$$

Bizonyítás. A lemma mutatja, hogy a $\{t \in A :\ T_1'(x) \ne T_2'(t)\}$ halmaz Vol_K szerint 0-mértékű, mivel föltevés szerint $\overline{A} \subset G_1 \cap G_2$ és $T_1(t) = T_2(t) \quad (t \in \overline{A})$.

Következmény. *Az előbbi jelölésekkel* $\int_A \mathrm{Jac}(T_1)\, d\mathrm{Vol}_K = \int_A \mathrm{Jac}(T_2)\, d\mathrm{Vol}_K$.

Felületek és integrálformák

Definíció. Az $F \subset \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ alakzat K-dimenziós $\mathcal{C}^\ell$*-felület* $\mathbb{R}^N$-ben, ha

$\exists\ F_1, F_2, \ldots$ K-dim. diszjunkt $\mathcal{C}^\ell$-felületdarabok $\qquad F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$.

Tétel. *Legyen* ω *egy* K*-rendű* $\mathcal{C}^0$*-forma* $\mathbb{R}^N$*-en. Ekkor létezik pontosan egy* ν_ω *lokális előjeles mérték, amelyre*

$\mathrm{dom}(\nu_\omega) \subset \big\{K$*-dimenziós* $\mathcal{C}^1$*-felületek*$\big\}$, *és*

$\nu_\omega(F) = \displaystyle\int_F \omega \qquad (F\ \ K$*-dimenziós* C^1*-felületdarab).*

Bizonyítás. A tétel tipikus speciális esete az összeillesztési tételnek. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathbb{R}^N$-beli K-dimenziós $\mathcal{C}^1$-felületdarabok családja. Minden $Q \in \mathcal{Q}$ mellett legyen

$$\mathcal{A}_Q := \{R \in \{\mathcal{Q}\} :\ \mathcal{R} \subset \mathcal{Q}\}\ ,\quad \nu_{\mathcal{Q}}(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} \omega \quad (\mathcal{R} \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}})\ .$$

Ha $Q \in \mathcal{Q}$ és $Q_n : A_n \to \mathbb{R}^N$ $(n = 1, 2, \ldots)$ páronként diszjunkt tagjai $\mathcal{A}_Q$-nak, továbbá $T \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$ egy lefedő leképezése Q-nak (azaz $\big[\mathrm{dom}(Q)\big]^- \subset G$ nyitott$\subset \mathbb{R}^K$ és $Q = T \,|\, \mathrm{dom}(Q)$), akkor

$$\begin{aligned}
\nu_Q\big(\bigcup_n Q_n\big) &= \int_{\bigcup_n Q_n} \omega = \int_{\bigcup_n A_n} \omega(T)\Big(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\Big)\, d\mathrm{Vol}_K \\
&= \sum_n \int_{A_n} \omega(T)\Big(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\Big)\, d\mathrm{Vol}_K \\
&= \sum_n \int_{Q_n} \omega\ .
\end{aligned}$$

Vagyis a ν_Q halmazfüggvények mind korlátos előjeles mértékek. Másrészről a $Q_1 \cap Q_2 \in \mathcal{Q}$, $\nu_{Q_1 \cap Q_2} = \nu_{Q_1} \,|\, \mathcal{A}_{Q_1 \cap Q_2}$ $(Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q})$ relációk triviálisak. Innen az összeillesztési tétel közvetlenül adja az mind az egzisztencia- mind az unicitási állítását a tételnek.

A paraméteres előállításából a $\nu_Q(: \mathcal{A}_Q \ni R \mapsto \int_R \omega)$ differenciálmértékeknek (mostmár jogos így mondani) azonnal adódik, hogy a bizonyítás jelöléseivel

$$|\nu_\omega|(Q) = \int_A \Big|\omega(T)\big(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\big)\Big|\, d\mathrm{Vol}_K$$
$$= \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\int_{M_n}\omega\Big| : \ M_1, M_2, \ldots \text{diszj. felületdarabok}, \ \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = Q\Big\} .$$

Így az összeillesztési tétel pontos információt ad azokról a felületekről, amelyekre a ν_ω differenciálmérték definiálva van.

Következmény. *A ν_ω differenciálmérték értelmezési tartománya*

$$\Big\{F : \ F \ \mathbb{R}^N\text{-beli } K\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-felület,}$$
$$\sup\Big\{\sum_n\Big|\int_{M_n}\omega\Big| : \ M_1, M_2, \ldots \ \text{diszj. felületdarabok}, \ \bigcup_n M_n = F\Big\} < \infty\Big\} .$$

Definíció. A tételben megkonstruált ν_ω differenciálmérték az ω *differenciálforma integrálja.* Jelölése: $\int_\bullet \omega$. Az ω *differenciálforma integrálformája* az

$$\int \omega : f \mapsto \int \hat{f}\, d\nu_\omega$$

funkcionál, amely azokra a Borel mérhető $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvényekre van definiálva, amelyeknek az

$$\hat{f} : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N \ni (t, x) \mapsto f(x)$$

felemeltje ν_ω-integrálható.

Felületdarabok ekvivalenciája

Definíció. Az $F_1 : A_1 \to \mathbb{R}^N$, $F_2 : A_2 \to \mathbb{R}^N$ K-dimenziós $\mathcal{C}^1$-felületdarabok *ekvivalensek*, $F_1 \approx F_2$, ha

$$\exists\, G_1, G_2 \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^K \quad \exists S : G_1 \leftrightarrow G_2$$
$$S \in \mathcal{C}^1(G_1, \mathbb{R}^K) , \quad F_1 = F_2 \circ S , \quad \det(S') > 0 .$$

Lemma. *A $\approx$ reláció ekvivalencia.*

Bizonyítás. 1) Triviálisan, $F \approx F$ mindig.
2) Tegyük fel, hogy $F_1 \approx F_2$, és legyen $S : G_1 \leftrightarrow G_2$ mint a definícióban. Most $S^{-1} : G_2 \leftrightarrow G_1$, és az implicit függvény tétel szerint

$$S^{-1} \in C^1(G_2, \mathbb{R}^K) \qquad \det\big((S^{-1})'\big) = 1/\det(S') > 0,$$

ahonnan $F_2 \approx F_1$.
3) Tegyük fel, hogy $F_1 \approx F_2 \approx F_3$ ahol $F_i \to \mathbb{R}^K$ $(i = 1, 2, 3)$. Ekkor

$$\exists\, G_1, G_2, H_2, H_3 \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^K \quad \exists\, S_1 \in C^1(G_1, \mathbb{R}^K) \quad \exists\, S_2 \in C^1(H_2\mathbb{R}^K)$$
$$\overline{A}_1 \subset G_1 , \quad \overline{A}_2 \subset G_2, H_2 , \quad \overline{A}_3 \subset H_3 ,$$
$$S_1 : G_1 \leftrightarrow G_2 , \quad S_2 : H_2 \leftrightarrow H_3 , \quad \det(S_i') > 0 \ \ (i = 1, 2),$$
$$F_1 = F_2 \circ S_1 , \quad F_2 = F_3 \circ S_2 .$$

Most az $S := S_2 \circ S_1$ leképezésre

$$S : K_1 \leftrightarrow K_3 \quad \text{ahol} \qquad K_1 := S_1^{-1}(G_2 \cap H_2) , \quad K_3 = S_2(G_2 \cap H_2) .$$

A G_2, H_2 halmazok nyitottsága és az $S_1,\ S_2^{-1}$ transzformációk folytonossága miatt a K_1 ill. K_3 halmazok is nyitottak, és $\overline{A_i} \subset K_i \quad (i=1,3)$. Másrészt $S = \left[\mathcal{C}^1\text{-függvények összetétele}\right] \in \mathcal{C}^1(K_1, \mathrm{I\!R}^K)$, és emellett $\det(S') = \det\bigl(S_2'(S_1)\bigr) \cdot \det S_1') > 0$. Azaz $F_1 \approx F_3$.

Tétel. *Tegyük fel, hogy az $F_1 : A_1 \to \mathrm{I\!R}^N$, $F_2 : A_2 \to \mathrm{I\!R}^N$ felületdarabok ekvivalensek. Ekkor*

$$\int_{A_1} \Phi\bigl(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K = \int_{A_2} \Phi\bigl(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_k$$

valahányszor $\Phi \in \mathcal{C}(\mathrm{I\!R}^N \times \bigwedge^K \mathrm{I\!R}^N)$ egy a $\bigwedge^K \mathrm{I\!R}^N$-beli változójában pozitív-homogén függvény és a T_1, T_2 leképezésekre $T_i \in \mathcal{C}^1(G_i, R^N)$, ahol $\overline{A_i} \subset G_i$ nyitott$\subset \mathrm{I\!R}^K$ és $F_i = T_i \,|\, A_i \quad (i=1,2)$.*

Bizonyítás. Mivel $F_1 \approx F_2$, választhatunk olyan H_1, H_2 nyitott$\subset \mathrm{I\!R}^K$ halmazokat és $S \in \mathcal{C}^1(H_1, \mathrm{I\!R}^K)$ transzformációt, amelyre

$$\overline{A_i} \subset H_i \quad (i=1,2), \quad S : H_1 \leftrightarrow H_2, \quad F_1 = F_2 \circ S, \quad \det(S) > 0.$$

Most a

$$K_2 := S(G_1 \cap H_1) \cap G_2\ , \quad K_1 := S^{-1}(K_2) = S^{-1}(G_2 \cap H_2) \cap G_1$$

$\mathrm{I\!R}^K$-beli nyitott halmazokra

$$\overline{A_2} \subset K_2\ , \quad \overline{A_1} = S^{-1}(\overline{A_2}) \subset^{-1} (K_2) = K_1\,.$$

Ugyanis $\overline{A_1} \subset G_1 \cap H_1$ és az S leképezés a folytonos S^{-1} inverze, ahonnan $\overline{A_2} = S(A_1)^- = S(\overline{A_1}) \subset S(G_1 \cap H_1)$. Tehát az eredetileg adott G_i halmaz helyett az $\overline{A_i}$-t szintén tartalmazó nyitott K_i részére áttérve, vehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy

$$S : G_1 \leftrightarrow G_2\ .$$

Észrevétel: $\mathrm{Vol}_K\bigl\{t \in A_1 :\ T_1'(t) \neq T_2'\bigl(S(t)\bigr) \cdot S'(t)\bigr\} = 0$. (Ez azonnal adódik a Felületdarabok alfejezet lemmájából, mivel $T_1,\ T_2 \circ S \in \mathcal{C}^1(G_1, \mathrm{I\!R}^N)$ és $T_1 \,|\, A_1 = T_2 \circ S \,|\, A_1\, [= F_1]$.) Legyen $B_1 := \bigl\{t \in A_1 :\ T_1'(t) = T_2'\bigl(S(t)\bigr) S'(t)\bigr\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\int_{A_1} \Phi\bigl(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K \overset{\text{Észrevétel}}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\bigl(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K \overset{B_1\ \text{def.}}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\bigl(T_2 \circ S, \frac{\partial T_2 \circ S}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2 \circ S}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K \\
&= \int_{B_1} \Phi\bigl(T_2 \circ S, \det(S') \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t_1}(S) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}(S)\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K \overset{\Phi\ \text{hom.}+\det(S')>0}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\bigl(T_2 \circ S, \frac{\partial T_2}{\partial t_1}(S) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}(S)\bigr) \det(S')\, d\mathrm{Vol}_k \overset{\text{HELYETTESÍTÉS}}{=} \\
&= \int_{S(B_1)} \Phi\bigl(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K \\
&= \int_{A_2} \Phi\bigl(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\bigr)\, d\mathrm{Vol}_K
\end{aligned}$$

---

* Azaz $\Phi(x, \alpha \cdot \Lambda) = \alpha \cdot \Phi(x, \Lambda) \qquad (\alpha \geq 0 \quad x \in \mathrm{I\!R}^N \quad \Lambda \in \bigwedge^K \mathrm{I\!R}^N)$.

mivel $A_2 = S(A_1) = S(B_1) \cup S(A_1 \setminus B_1) = S(B_1) \cup \big[\mathrm{Vol}_K \text{ szerint } 0\text{-halmaz}\big]$.

Következmény. *$F_1 \approx F_2$ esetén 1) $\sigma_K(F_1) = \sigma_K(F_2)$, 2) a tétel jelöléseivel*

$$\int_{A_1} \omega(T_1)\Big(\frac{\partial T_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\Big)\, d\mathrm{Vol}_K = \int_{A_2} \omega(T_2)\Big(\frac{\partial T_2}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\Big)\, d\mathrm{Vol}_K$$

minden $\mathbb{R}^N$-beli K-rendű ω $\mathcal{C}^0$-formára.

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$-beli K-dimenziós $F : A \to \mathbb{R}^N$ *felületdarabon* az $\omega \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*\big)$ *differenciálforma integrálja*

$$\int_F \omega := \Big[\int_A \omega(T)\Big(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\Big)\, d\mathrm{Vol}_K : \\ G \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^K\ ,\ \ \overline{A} \subset G\ ,\ \ T \in C^1(G, \mathbb{R}^N)\ ,\ \ F = T \mid A\Big]\ ,$$

ami a tétel alapján jól-definiált kiterjesztése a $\mathcal{C}^1$-kockákon való integrálnak.

Következmény. $\displaystyle\int_{F_1} \omega = \int_{F_2} \omega \qquad \big(F_1 \approx F_2,\ \omega \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*\big)\big)$.

Felületek ekvivalenciája

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$-beli K-dimenziós F, H $\mathcal{C}^1$-felületek *ekvivalensek*, $F \sim H$, ha

$\exists\ F_1, F_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok $\exists\ H_1, H_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \qquad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \qquad F_n \approx H_n \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Propozíció. *A $\sim$ reláció ekvivalencia.*

Bizonyítás. A $\sim$ reláció triviálisan reflexív és szimmetrikus.
Tegyük fel, hogy $F \sim H \sim M$. Ekkor

$\exists\ F_1, F_2, \dots$ diszj. $\exists\ H_1, H_2, \dots$ diszj. $\exists\ K_1, K_2, \dots$ diszj. $\exists\ M_1, M_2, \dots$ diszj. felületdarabok

$$F = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \qquad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \qquad F_n \approx H_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$
$$H = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \qquad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \qquad K_n \approx M_n \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Ha tehát

$$F_n : A_n \to \mathbb{R}^N \qquad H_n : B_n \to \mathbb{R}^N \qquad K_n : C_n \to \mathbb{R}^N \qquad M_n : D_n \to \mathbb{R}^N,$$

akkor találhatók olyan

$$S_n : \hat{A}_n \leftrightarrow B_n \qquad T_n : \hat{C}_n \leftrightarrow \hat{D}_n \qquad \det(S'), \det(T') > 0$$

C^1-síma leképezések, amelyeknél

$$\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \hat{D}_n \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^K \qquad \overline{A_n} \subset \hat{A}_n\ ,\ \overline{B}_n \subset \hat{B}_n\ ,\ \overline{C}_n \subset \hat{C}_n\ ,\ \overline{D}_n \subset \hat{D}_n$$

és

$$F_n = H_n \circ S_n \qquad H_n = M_n \circ T_n \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Képezzük a

$B_{mn} := B_m \cap C_n$

$A_{mn} := S_m^{-1}(B_{mn}) \qquad D_{mn} := T_n(B_{mn})$

$F_{mn} := F_m \,|\, A_{mn} \qquad H_{mn} := H_m \,|\, B_{mn} = K_n \,|\, B_{mn} \qquad M_{mn} := M_n \,|\, D_{mn}$

közös beosztását a felületeknek $(m, n = 1, 2, \ldots)$. Ekkor

$$F = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{mn} \qquad H = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} H_{mn} \qquad M = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} M_{mn} \text{ diszjunkt uniók.}$$

Másrészt

$$A_{mn} \subset \hat{A}_n \qquad \overline{B_{mn}} \subset \hat{B}_m, \hat{C}_m \qquad \overline{D_{mn}} \subset \hat{D}_n$$

$$F_{mn} = H_{mn} \circ S_m \qquad H_{mn} = M_{mn} \circ T_m \,,$$

ahonnan $F_{mn} \approx M_{mn}$ minden m, n indexpárra, és így $F \sim H$.

Tétel. *Ha F és H ekvivalens K-dimenziós $\mathcal{C}^1$-felületek $\mathbb{R}^N$-ben és $F \in \operatorname{dom}\left(\int_\bullet \omega\right)$ akkor $H \in \operatorname{dom}\left(\int_\bullet \omega\right)$ és* $\displaystyle\int_F \omega = \int_H \omega$.

Bizonyítás. Vegyünk olyan $F_1, F_2, \ldots$ ill. $H_1, H_2, \ldots$ diszjunkt felületdarabokat, amelyekkel

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \qquad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \qquad F_n \approx H_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \,.$$

Láttuk: $\int_{F_n} \omega = \int_{H_n} \omega$ minden n indexre. Innen $\int_F \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H_n} \omega$. Így már csak azt kell igazolnunk, hogy $H \in \operatorname{dom}\left(\int_\bullet \omega\right)$.

Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy valahányszor $M_1, M_2, \ldots$ diszjunkt felületdarabok és $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, mindannyiszor $\sum_{n=1}^{\infty} |\int_{M_n} \omega| \le |\nu_\omega|(F)\ (< \infty)$. Tegyük föl tehát, hogy $M_1, M_2, \ldots$ diszjunkt felületdarabok, és $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Az F_n felületdarab ekivalenciája H_n-nel azt jelenti, hogy találhatunk olyan $S : G_n \leftrightarrow H_n$ lefedő leképezést, amelynél

G_n, K_n nyitott $\subset \mathbb{R}^K \qquad \operatorname{dom}(F_n)^- \subset G_n \qquad \operatorname{dom}(H_n)^- \subset K_n \,,$

$S_n : G_n \leftrightarrow K_n \qquad S_n \in \mathcal{C}^1(G_n, \mathbb{R}^K) \qquad F_n = H_n \circ S_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Tekintsük a

$$H_{m,n} := H_m \cap M_n \qquad F_{m,n} := L_{m,n} \circ S_m \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

felületdarabokat. Észrevétel: $F_{m,n} \approx H_{m,n}$ minden m, n indexpárra, az $\{F_{m,n} : m, n = 1, 2, \ldots\}$ ill. $\{H_{m,n} : m, n = 1, 2, \ldots\}$ felületdarab-családok diszjunktak és $F_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$, $H_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{m,n}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Innen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \int_{M_n} \omega \Big| &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} \int_{H_{m,n}} \omega \Big| \\ &\le \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big| \int_{H_{m,n}} \omega \Big| = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big| \int_{F_{m,n}} \omega \Big| \\ &\le |\nu_\omega|(F) < \infty \,, \end{aligned}$$

ami bizonyítja a tételt.

æ