„IMPULZUSLÉZEREK ALKALMAZÁSA
AZ ANYAGTUDOMÁNYBAN ÉS A BIOFOTONIKÁBAN"

6.6. Integrálható rendszerek, zaj, operátorelmélet

TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0060 projekt

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Integrálható rendszerek, operátorelmélet, zaj

Kérchy L., Pusztai B.G., Stachó L., Szalai A.

SZTE Bolyai Intézet
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

2015. január 28.

A hiperbolikus BC_n Sutherland modell (PBG)

Legyen $\mathfrak{c} = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid q_1 > \ldots > q_n > 0\}$ (a BC_n gyökrendszerhez társított nyílt Weyl kamra egy alkalmas modellje).

- Fázistér: $\mathcal{P} = T^*\mathfrak{c} \cong \{(q, p) \,|\, q \in \mathfrak{c}, p \in \mathbb{R}^n\}$
- Szimplektikus forma: $\omega = \sum_{c=1}^{n} \mathrm{d}q_c \wedge \mathrm{d}p_c$
- Hamilton függvény:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n} p_c^2 + \sum_{1\leq a<b\leq n}\left(\frac{g^2}{\sinh^2(q_a - q_b)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q_a + q_b)}\right) + \sum_{c=1}^{n}\frac{g_1^2}{\sinh^2(q_c)} + \sum_{c=1}^{n}\frac{g_2^2}{\sinh^2(2q_c)}$$

(g, g_1, g_2: valós csatolási állandók; $g^2 > 0$, $g_1^2 + g_2^2 > 0$)
A BC_n gyökrendszerhez társított, félegyenesen mozgó, taszító kölcsönhatással jellemzett, klasszikus sokrészecske rendszer.

A hiperbolikus BC_n Sutherland modell (PBG)

Legyen $\mathfrak{c} = \{q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid q_1 > \dots > q_n > 0\}$ (a BC_n gyökrendszerhez társított nyílt Weyl kamra egy alkalmas modellje).

- Fázistér: $\mathcal{P} = T^*\mathfrak{c} \cong \{(q,p) \,|\, q \in \mathfrak{c}, p \in \mathbb{R}^n\}$
- Szimplektikus forma: $\omega = \sum_{c=1}^n \mathrm{d}q_c \wedge \mathrm{d}p_c$
- Hamilton függvény:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^n p_c^2 + \sum_{1 \le a < b \le n} \left(\frac{g^2}{\sinh^2(q_a - q_b)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q_a + q_b)} \right) + \sum_{c=1}^n \frac{g_1^2}{\sinh^2(q_c)} + \sum_{c=1}^n \frac{g_2^2}{\sinh^2(2q_c)}$$

(g, g_1, g_2: valós csatolási állandók; $g^2 > 0$, $g_1^2 + g_2^2 > 0$)
A BC_n gyökrendszerhez társított, félegyenesen mozgó, taszító kölcsönhatással jellemzett, klasszikus sokrészecske rendszer.

A hiperbolikus BC_n Sutherland modell (PBG)

Legyen $\mathfrak{c} = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid q_1 > \ldots > q_n > 0\}$ (a BC_n gyökrendszerhez társított nyílt Weyl kamra egy alkalmas modellje).

- Fázistér: $\mathcal{P} = T^*\mathfrak{c} \cong \{(q,p) \mid q \in \mathfrak{c}, p \in \mathbb{R}^n\}$
- Szimplektikus forma: $\omega = \sum_{c=1}^n \mathrm{d}q_c \wedge \mathrm{d}p_c$
- Hamilton függvény:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n} p_c^2 + \sum_{1\leq a<b\leq n}\left(\frac{g^2}{\sinh^2(q_a - q_b)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q_a + q_b)}\right) + \sum_{c=1}^{n}\frac{g_1^2}{\sinh^2(q_c)} + \sum_{c=1}^{n}\frac{g_2^2}{\sinh^2(2q_c)}$$

(g, g_1, g_2: valós csatolási állandók; $g^2 > 0$, $g_1^2 + g_2^2 > 0$)
A BC_n gyökrendszerhez társított, félegyenesen mozgó, taszító kölcsönhatással jellemzett, klasszikus sokrészecske rendszer.

Eredmények (PBG)

- A Marsden–Weinstein-féle szimplektikus redukció módszeret használva *dinamikai r-mátrixot* konstruáltunk a hiperbolikus BC_n Sutherland modellhez [1]. Ezt felhasználva a dinamika egy *Lax reprezentációját* is előállítottuk.
- Elvégeztük a részecske trajektóriák időbeli *aszimptotikus viselkedésének* szigorú analízisét [2]. Ez alapján megállapítottuk a *Moller-féle transzformációk*, illetve a *szórási leképezés* alakját. Bebizonyítottuk, hogy a szórási leképezés *faktorizálódik*, azaz a sokrészecske szórási folyamat egyértelműen előállítható a 2-részecske szórások, illetve a külső potenciálon történő 1-részecske szórások ismeretében [2]. Ilyen szórási képpel a *szoliton rendszerek* jellemezhetőek.
- A hiperbolikus BC_n Sutherland és a racionális BC_n Ruijsenaars–Schneider–van Diejen (RSvD) rendszerekre korábban bizonyított hatás-szög dualitási eredményünk lehetővé tette az RSvD rendszerek *szóráselméletének* kidolgozását is. Az RSvD rendszerek ugyancsak *szoliton szórasi képpel* rendelkeznek [2].

Eredmények (PBG)

- A Marsden–Weinstein-féle szimplektikus redukció módszeret használva *dinamikai r-mátrixot* konstruáltunk a hiperbolikus BC_n Sutherland modellhez [1]. Ezt felhasználva a dinamika egy *Lax reprezentációját* is előállítottuk.
- Elvégeztük a részecske trajektóriák időbeli *aszimptotikus viselkedésének* szigorú analízisét [2]. Ez alapján megállapítottuk a *Moller-féle transzformációk*, illetve a *szórási leképezés* alakját. Bebizonyítottuk, hogy a szórási leképezés *faktorizálódik*, azaz a sokrészecske szórási folyamat egyértelműen előállítható a 2-részecske szórások, illetve a külső potenciálon történő 1-részecske szórások ismeretében [2]. Ilyen szórási képpel a *szoliton rendszerek* jellemezhetőek.
- A hiperbolikus BC_n Sutherland és a racionális BC_n Ruijsenaars–Schneider–van Diejen (RSvD) rendszerekre korábban bizonyított hatás-szög dualitási eredményünk lehetővé tette az RSvD rendszerek *szóráselméletének* kidolgozását is. Az RSvD rendszerek ugyancsak *szoliton szórasi képpel* rendelkeznek [2].

Eredmények (PBG)

- A Marsden–Weinstein-féle szimplektikus redukció módszeret használva *dinamikai r-mátrixot* konstruáltunk a hiperbolikus BC_n Sutherland modellhez [1]. Ezt felhasználva a dinamika egy *Lax reprezentációját* is előállítottuk.
- Elvégeztük a részecske trajektóriák időbeli *aszimptotikus viselkedésének* szigorú analízisét [2]. Ez alapján megállapítottuk a *Moller-féle transzformációk*, illetve a *szórási leképezés* alakját. Bebizonyítottuk, hogy a szórási leképezés *faktorizálódik*, azaz a sokrészecske szórási folyamat egyértelműen előállítható a 2-részecske szórások, illetve a külső potenciálon történő 1-részecske szórások ismeretében [2]. Ilyen szórási képpel a *szoliton rendszerek* jellemezhetőek.
- A hiperbolikus BC_n Sutherland és a racionális BC_n Ruijsenaars–Schneider–van Diejen (RSvD) rendszerekre korábban bizonyított hatás-szög dualitási eredményünk lehetővé tette az RSvD rendszerek *szóráselméletének* kidolgozását is. Az RSvD rendszerek ugyancsak *szoliton szórasi képpel* rendelkeznek [2].

Hiperinvariáns altér probléma

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert-tér,
T korlátos, lineáris operátor $\mathcal{H}$-n,
$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ altér (zárt, lineáris sokaság).

$\mathcal{M}$ *invariáns* T-re, ha $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$;
$\mathcal{M}$ *hiperinvariáns* T-re, ha $\mathcal{M}$ invariáns minden T-vel felcserélhető (korl., lin.) operátorra.

Hiperinvariáns altér probléma (HSP): tetszőleges $T \neq \lambda I$ korlátos, lineáris operátornak létezik-e valódi ($\neq \{0\}, \neq \mathcal{H}$) hiperinvariáns altere?

(HSP) vizsgálatánál feltehető, hogy $\|T\| \leq 1$ és T abszolút folytonos.

Mi az aszimptotikusan nem eltűnő esettel foglalkoztunk, mely visszavezethető a kvázianalitikus esetre.

Hiperinvariáns altér probléma

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert-tér,
T korlátos, lineáris operátor $\mathcal{H}$-n,
$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ altér (zárt, lineáris sokaság).

$\mathcal{M}$ *invariáns* T-re, ha $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$;
$\mathcal{M}$ *hiperinvariáns* T-re, ha $\mathcal{M}$ invariáns minden T-vel felcserélhető (korl., lin.) operátorra.

Hiperinvariáns altér probléma (HSP): tetszőleges $T \neq \lambda I$ korlátos, lineáris operátornak létezik-e valódi ($\neq \{0\}, \neq \mathcal{H}$) hiperinvariáns altere?

(HSP) vizsgálatánál feltehető, hogy $\|T\| \leq 1$ és T abszolút folytonos.

Mi az aszimptotikusan nem eltűnő esettel foglalkoztunk, mely visszavezethető a kvázianalitikus esetre.

Eredmények (KL, SzA)

- A (HSP) az aszimptotikusan ciklikus kvázianalitikus kontrakciók körében visszavezethető az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztályra, azaz arra az esetre, amikor a kvázianalitikus spektrálhalmaz az egységkörvonallal egyezik meg. Ebben az esetben az eltolás típusú invariáns alterek kifeszítik az egész $\mathcal{H}$ Hilbert teret. Ha $\{T\}' = H^\infty(T)$, akkor minden invariáns altér egyúttal hiperinvariáns is, a $\{T\}' \neq H^\infty(T)$ esetben azonban az eltolás típusú invariáns alterek nem hiperinvariánsak. Ugyanakkor a [3] cikkben beláttuk, hogy ha ebben az esetben is léteznek *hiperinvariáns alterek*, akkor ilyenek *származtathatók az eltolás típusú invariáns alterekből* is.
- A $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ operátor $\{T\}'$ kommutánsa azonosítható egy $\mathcal{F}(T) \subset L^\infty(\mathbb{T})$ függvényalgebrával. Egy korábbi kérdést megválaszolva bizonyítottuk, hogy ez *a függvénykommutáns csak akkor pre-Douglas algebra, ha a H^∞ Hardy-térrel egyezik meg.*

Eredmények (KL, SzA)

- A (HSP) az aszimptotikusan ciklikus kvázianalitikus kontrakciók körében visszavezethető az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztályra, azaz arra az esetre, amikor a kvázianalitikus spektrálhalmaz az egységkörvonallal egyezik meg. Ebben az esetben az eltolás típusú invariáns alterek kifeszítik az egész $\mathcal{H}$ Hilbert teret. Ha $\{T\}' = H^\infty(T)$, akkor minden invariáns altér egyúttal hiperinvariáns is, a $\{T\}' \neq H^\infty(T)$ esetben azonban az eltolás típusú invariáns alterek nem hiperinvariánsak. Ugyanakkor a [3] cikkben beláttuk, hogy ha ebben az esetben is léteznek *hiperinvariáns alterek*, akkor ilyenek *származtathatók az eltolás típusú invariáns alterekből* is.
- A $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ operátor $\{T\}'$ kommutánsa azonosítható egy $\mathcal{F}(T) \subset L^\infty(\mathbb{T})$ függvényalgebrával. Egy korábbi kérdést megválaszolva bizonyítottuk, hogy ez *a függvénykommutáns csak akkor pre-Douglas algebra, ha a H^∞ Hardy-térrel egyezik meg*.

Jordan–von Neumann tripletek

P. Jordan - J. von Neumann - E. Wigner (1934):
önadjungált operátorok $\to$ Jordan algebras; véges-dimenziós elmélet

Geometriai megközelítés: $\sim 1960-$
ÁLLAPOTTÉR: holomorfia-szimmetrikus egységgömbű duális Banach-tér
DINAMIKA: az egységgömb holomorf automorfizmus-csoportja (nem-lin!)
Kaup (1983): $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(E)$ Banach-Lie csoport,
Lie-algebrája egy *3-változós* $\{xy^*z\}$ szorzatból

Példa: W*-algebránál $\{xy^*z\} = (xy^*z + zy^*x)/2$,
$\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(E)$-ben lok. egyenl. folyt. 1-param. csoport alakja
$\exp\left[t(a - \{xa^*x\} + iAx)\partial/\partial x\right] \quad (a \in E,\ A$ önadj.)

VIZSGÁLT PROBLÉMA: *az erősen folyt. 1-prm. csoportok szerkezete*
$\sim$ nem-lineáris Hille-Yosida tételek

Eredmények (SL)

- Az $M = (t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1,\ t > 0)$ Minkowski-gömb nem-kommutatív verziója $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ fölött
$$\widehat{\mathbf{M}} = \Big\{ (t, \widetilde{t}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) :\ t \in \mathcal{A}_+(\mathbf{E}),\ t^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}^* = 1_{\mathbf{K}},\ \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*,$$
$$\widetilde{t} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{H}),\ \widetilde{t}^2 - \widetilde{\mathbf{x}}^*\widetilde{\mathbf{x}} = 1_{\mathbf{H}},\ (1_{\mathbf{K}} + t)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}(1_{\mathbf{H}} + \widetilde{t})^{-1} \Big\}.$$
Sztereografikus típusú projekcióval az automorfizmusainak leírását visszavezetjük $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})))$-ra.
- Az összes Cartan-faktoroknál (a W*-faktorok Jordan-triplet megfelelői) $\mathrm{Ball}(E)$ lineáris automorfizmusaira a Hille-Yosida generátorok algebrai leírása
- A Jordan-tripletek preduáljainak holomorf-merevsége
- Első nem-lineáris eredmény: $\mathbf{H}$ Hilbert-térnél $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathbf{H}))$ erősen folytonos 1-prm csop.-ja pontos szerkezete

Eredmények (SL)

- Az $M = (t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1,\ t > 0)$ Minkowski-gömb nem-kommutatív verziója $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ fölött
  $\widehat{\mathbf{M}} = \Big\{(t, \widetilde{t}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) :\ t \in \mathcal{A}_+(\mathbf{E}),\ t^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}^* = 1_{\mathbf{K}},\ \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*,$
  $\widetilde{t} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{H}),\ \widetilde{t}^2 - \widetilde{\mathbf{x}}^*\widetilde{\mathbf{x}} = 1_{\mathbf{H}},\ (1_{\mathbf{K}} + t)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}(1_{\mathbf{H}} + \widetilde{t})^{-1}\Big\}.$
  Sztereografikus típusú projekcióval az automorfizmusainak leírását visszavezetjük $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})))$-ra.
- Az összes Cartan-faktoroknál (a W*-faktorok Jordan-triplet megfelelői) $\mathrm{Ball}(E)$ lineáris automorfizmusaira a Hille-Yosida generátorok algebrai leírása
- A Jordan-tripletek preduáljainak holomorf-merevsége
- Első nem-lineáris eredmény: $\mathbf{H}$ Hilbert-térnél $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathbf{H}))$ erősen folytonos 1-prm csop.-ja pontos szerkezete

Eredmények (SL)

- Az $M = (t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1,\ t > 0)$ Minkowski-gömb nem-kommutatív verziója $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ fölött
  $\widehat{\mathbf{M}} = \Big\{(t, \widetilde{t}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) :\ t \in \mathcal{A}_+(\mathbf{E}),\ t^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}^* = 1_{\mathbf{K}},\ \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*,$
  $\widetilde{t} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{H}),\ \widetilde{t}^2 - \widetilde{\mathbf{x}}^*\widetilde{\mathbf{x}} = 1_{\mathbf{H}},\ (1_{\mathbf{K}} + t)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}(1_{\mathbf{H}} + \widetilde{t})^{-1}\Big\}.$
  Sztereografikus típusú projekcióval az automorfizmusainak leírását visszavezetjük $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})))$-ra.
- Az összes Cartan-faktoroknál (a W*-faktorok Jordan-triplet megfelelői) $\mathrm{Ball}(E)$ lineáris automorfizmusaira a Hille-Yosida generátorok algebrai leírása
- A Jordan-tripletek preduáljainak holomorf-merevsége
- Első nem-lineáris eredmény: $\mathbf{H}$ Hilbert-térnél $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathbf{H}))$ erősen folytonos 1-prm csop.-ja pontos szerkezete

Eredmények (SL)

- Az $M = (t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1,\ t > 0)$ Minkowski-gömb nem-kommutatív verziója $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ fölött
  $\widehat{\mathbf{M}} = \Big\{(t, \widetilde{t}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) :\ t \in \mathcal{A}_+(\mathbf{E}),\ t^2 - \mathbf{x}\mathbf{x}^* = 1_{\mathbf{K}},\ \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*,$
  $\widetilde{t} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{H}),\ \widetilde{t}^2 - \widetilde{\mathbf{x}}^*\widetilde{\mathbf{x}} = 1_{\mathbf{H}},\ (1_{\mathbf{K}} + t)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}(1_{\mathbf{H}} + \widetilde{t})^{-1}\Big\}.$
  Sztereografikus típusú projekcióval az automorfizmusainak leírását visszavezetjük $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})))$-ra.
- Az összes Cartan-faktoroknál (a W*-faktorok Jordan-triplet megfelelői) $\mathrm{Ball}(E)$ lineáris automorfizmusaira a Hille-Yosida generátorok algebrai leírása
- A Jordan-tripletek preduáljainak holomorf-merevsége
- Első nem-lineáris eredmény: $\mathbf{H}$ Hilbert-térnél $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ball}(\mathbf{H}))$ erősen folytonos 1-prm csop.-ja pontos szerkezete

Zaj (SL)

$2N$ független *random telegráf-hullám (RTW)* ad N *zaj-bitet*:
$A_k, B_k : \{1, 2, \dots\} \to \{-1, 1\}$; $W := X_1 X_2 \cdots X_N$ ahol $X_k \in \{A_k, B_k\}$.

- **Probléma**. Melyik a W-nek megfelelő $x_1, \dots, x_N$ 0-1 sorozat, amelyre
$x_k = 1$ ha $X_k = A_k$, $x_k = 0$ ha $A_k = B_k$?
Gauss-elim: $C_k := A_k B_k$ $(k = 1, \dots, N)$, $U := W B_1 B_2 \cdots B_N$

$$c_{tk} := \left[1 \text{ ha } C_k(t) = -1, \ 0 \text{ ha } C_k(t) = 1\right],$$
$$u_t := \left[1 \text{ ha } U(t) = -1, \ 0 \text{ ha } U(t) = 1\right];$$
$$(*) \qquad c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tN}x_N = u_t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

- **Probléma**. (1) $\overline{\pi}_t := \mathbf{Prb}(S \geq t)$ *asszimptotikája, ahol* $S := \min\{s : \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_2}(c \textit{ első } s \textit{ sora}) = N\}$. (2) *Olyan* $N \mapsto t_N$ *fgv., amelyre* $t_N << 2^N$ *és* $\overline{\pi}_{t_N} \to 0$ $(N \to \infty)$ *exponenciális sebességgel.*
Megoldás alaptétele: *Ha* $t_1 < \cdots < t_N$ *és* $n_d := t_d - t_{d-1} - 1$, *akkor*
$\mathbf{Prb}\Big(\text{Előremenő Gauss-elim. pivotjai } c\text{-nek a } t_1, \dots, t_N. \text{ soraiban}\Big) = \prod_{d=0}^{N-1} \left[2^{n_d(N-d)}\big(1 - 2^{d-N}\big)\right].$

Zaj (SL)

$2N$ független *random telegráf-hullám (RTW)* ad N *zaj-bitet*:
$A_k, B_k : \{1,2,\dots\} \to \{-1,1\}$; $W := X_1 X_2 \cdots X_N$ ahol $X_k \in \{A_k, B_k\}$.

- **Probléma**. Melyik a W-nek megfelelő $x_1, \dots, x_N$ 0-1 sorozat, amelyre
  $x_k = 1$ ha $X_k = A_k$, $x_k = 0$ ha $A_k = B_k$?
  Gauss-elim: $C_k := A_k B_k$ $(k = 1, \dots, N)$, $U := W B_1 B_2 \cdots B_N$
  $$\begin{aligned} c_{tk} &:= \big[1 \;\; \text{ha} \;\; C_k(t) = -1, \;\; 0 \;\; \text{ha} \;\; C_k(t) = 1\big], \\ u_t &:= \big[1 \;\; \text{ha} \;\; U(t) = -1, \;\; 0 \;\; \text{ha} \;\; U(t) = 1\big]; \end{aligned}$$
  $$(*) \qquad c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tN}x_N = u_t \quad (t = 1, 2, \dots)$$
- **Probléma**. (1) $\overline{\pi}_t := \mathbf{Prb}(S \geq t)$ *asszimptotikája, ahol* $S := \min\{s : \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_2}(c \text{ } \textit{első } s \textit{ sora}) = N\}$. (2) *Olyan* $N \mapsto t_N$ *fgv., amelyre* $t_N << 2^N$ *és* $\overline{\pi}_{t_N} \to 0$ $(N \to \infty)$ *exponenciális sebességgel.*
  Megoldás alaptétele: *Ha* $t_1 < \cdots < t_N$ *és* $n_d := t_d - t_{d-1} - 1$, *akkor*
  $$\mathbf{Prb}\Big(\text{Előremenő Gauss-elim. pivotjai } c\text{-nek a } t_1, \dots, t_N \text{. soraiban}\Big) = \prod_{d=0}^{N-1} \Big[2^{n_d(N-d)}\big(1 - 2^{d-N}\big)\Big].$$

Zaj (SL)

$2N$ független *random telegráf-hullám (RTW)* ad N *zaj-bitet*:
$A_k, B_k : \{1,2,\ldots\} \to \{-1,1\}$; $W := X_1 X_2 \cdots X_N$ ahol $X_k \in \{A_k, B_k\}$.

- **Probléma**. Melyik a W-nek megfelelő $x_1, \ldots, x_N$ 0-1 sorozat, amelyre
  $x_k = 1$ ha $X_k = A_k$, $x_k = 0$ ha $A_k = B_k$?
  Gauss-elim: $C_k := A_k B_k$ $(k = 1, \ldots, N)$, $U := W B_1 B_2 \cdots B_N$

$$\begin{aligned} c_{tk} &:= \big[1 \ \text{ha} \ C_k(t) = -1, \ 0 \ \text{ha} \ C_k(t) = 1\big], \\ u_t &:= \big[1 \ \text{ha} \ U(t) = -1, \ 0 \ \text{ha} \ U(t) = 1\big]; \end{aligned}$$

$$(*) \qquad c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tN}x_N = u_t \quad (t = 1, 2, \ldots)$$

- **Probléma**. (1) $\overline{\pi}_t := \mathbf{Prb}(S \geq t)$ *asszimptotikája, ahol* $S := \min\{s : \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_2}(c \text{ első } s \text{ sora}) = N\}$. (2) *Olyan* $N \mapsto t_N$ *fgv., amelyre* $t_N << 2^N$ *és* $\overline{\pi}_{t_N} \to 0$ $(N \to \infty)$ *exponenciális sebességgel.*
  Megoldás alaptétele: *Ha* $t_1 < \cdots < t_N$ *és* $n_d := t_d - t_{d-1} - 1$, *akkor*
  $\mathbf{Prb}\Big(\text{Előremenő Gauss-elim. pivotjai } c\text{-nek a } t_1, \ldots, t_N\text{. soraiban}\Big) = \prod_{d=0}^{N-1} \Big[2^{n_d(N-d)}\big(1 - 2^{d-N}\big)\Big].$

HIVATKOZÁSOK I

- B.G. Pusztai, On the r-matrix structure of the hyperbolic BC_n Sutherland model, *J. Math. Phys.* **53** (2012) 123528.
- B.G. Pusztai, Scattering theory of the hyperbolic BC_n Sutherland and the rational BC_n Ruijsenaars–Schneider–van Diejen models, *Nucl. Phys.* **B 874** (2013) 647-662.
- L. Kérchy and A. Szalai, Asymptotically cyclic quasianalytic contractions, *Studia Math.* **223** (2014) 53–75.
- L.L. Stachó, On strongly continuous one-parameter groups of automorphisms, *Roumanian J. of Pure and Appl. Math.* **(**59/4) (2014) 411-423.
- A. Peralta - L.L: Stachó, Von Neumann algebra preduals satisfy the linear biholomorphic property, *Math. Scandinavica*, to appear 2015; arXiv:1309.0982.

HIVATKOZÁSOK II

- L.L. Stachó, On non-commutative Minkowski spheres, *Anale Stiintifice Univ. Ovidius Constanta* **20/2** (2012) 159-170.
- L.L. Stachó, Fast measurement of hyperspace vectors in noise-based logic, *Fluctuation and Noise Lett.* **11/2** (2012) Paper 1250001 7 pp.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0060 projekt

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE