Sztochasztikus folyamatok II.

Stachó László

2008

ERGODIKUS-TÉTELEK ÉS STACIONÁRIUS FOLYAMATOK

Az egész fejezetben $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \mu)$ valószínűségi mértéktér,
$T : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ $\widehat{\mathcal{A}}$-mérhető transzformáció, azaz $T^{-1}(A) \in \widehat{\mathcal{A}} \quad (A \in \widehat{\mathcal{A}})$.

Definíció. T *ergodikus* (a μ mérék szerint), ha minden $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ halmazra

$$\forall_\mu \ \omega \in \widehat{\Omega} \quad \frac{1}{N} \# \Big\{ k \in \{0, \ldots, N-1\} : \ T^k\omega \in A \Big\} \to \mu(A) \quad (N \to \infty).$$

Az $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ halmaz T-*invariáns* (μ szerint), ha $\mu\big(A \triangle (T^{-1}(A)\big) = 0$.

Propozíció. 1) *T pontosan akkor ergodikus, ha minden $f \in L^\infty(\mu)$ függvényre*

$$\text{(ERG)} \qquad \forall_\mu \ \omega \in \widehat{\Omega} \qquad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\big(T^k\omega\big) \longrightarrow \int f \ d\mu \quad (N \to \infty).$$

2) *Ha T ergodikus és $\mu(T^{-1}G) = 0$ valahányszor $\mu(G) = 0$, akkor minden T-invariás A halmazra $\mu(A) \in \{0, 1\}$.*

Bizonyítás. 1) Észrevétel: az A halmaz $1_A(\omega) := [1$ ha $\omega \in A$, 0 egyébként$]$ indikátorfüggvényével

$$\#\big\{k \in [0, N-1] : \ T^k\omega \in A\big\} = \sum_{k=0}^{N-1} 1_A\big(T^k\omega\big).$$

Vagyis T pontosan akkor ergodikus, ha (ERG) áll minden $f := 1_A$ alakú függvényre. Így elég látni: T ergodikus $\Rightarrow$ (ERG), ha $f \in L^\infty(\mu)$.
Tegyük fel, hogy T ergodikus. Véges lineáris kombinációkat véve adódik, hogy (ERG) áll minden $f := \sum_{m=1}^M \alpha_m 1_{A_m}$ alakú *lépcsős* függvényre. Legyen $f \in L^\infty(\mu)$ tetszőlegesen adott. Hozzá található olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ lépcsősfüggvény-sorozat, hogy $\|f - \varphi_n\|_\infty = \sup |f - \varphi_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Legyen $X_0 := \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Tudjuk: μ-majdnem minden $\omega \in \widehat{\Omega}$ mellett az összes $\phi_N^{(\omega)} : X_0 \ni \varphi \mapsto \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(T^k\omega)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ funkcionál-sorozat konvergál a $\phi : X_0 \ni \varphi \to \int \varphi \ d\mu$ funkcionálhoz. Tekintsünk egy tetszőleges ilyen ω helyet. Az L^∞-szerinti távolsággal ellátott X_0, $X := X_0 \cup \{f\}$, $Y := \mathbb{R}$ metrikus terekre a $\phi_1^{(\omega)}, \phi_2^{(\omega)}, \ldots$ ill. ϕ kontraktív funkcionálokra alkalmazhatjuk a kondenzációs elvet (ld. Függelék). Eszerint $\overline{\phi_N^{(\omega)}}(f) \to \overline{\phi}(f)$ $(N \to \infty)$ a folytonos kiterjesztésekkel. Csakhogy triviálisan $\overline{\phi_N^{(\omega)}}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k\omega)$ ill. $\overline{\phi}(f) = \int f \ d\mu$.

2) Tegyük fel, hogy T ergodikus és $\mu(T^{-1}G) = 0$ valahányszor $\mu(G) = 0$. Legyen A egy T-invariáns halmaz, amelyre $\mu(A) > 0$. Észrevétel: $T^{-1}A$ is T-invariáns, hiszen $(T^{-1}A) \triangle [T^{-1}(T^{-1}A)] = T^{-1}[A \triangle (T^{-1}A)] = T^{-1}[\mu\text{-nullhalmaz}] = [\mu\text{-nullhalmaz}]$. Innen n-szerinti indukcióval következik, hogy az $A, T^{-1}A, T^{-2}A, \ldots, T^{-n}A$ halmazok mind T-invariánsak, és egymástól csak μ-nullhalmazokban különböznek. Ezért az $A_* := \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}A$ halmaz is csak egy μ-nullhalmazban különbözik A-tól: $A_* = A \setminus G$, ahol $\mu(G) = 0$. Speciálisan $\mu(A_*) = \mu(A) > 0$. Tetszőleges $\omega \in A_*$ elemre $\omega, T\omega, T^2\omega, \ldots \in A_*$. Vagyis $\frac{1}{N}\#\{k \in [0, N-1] : T^k\omega \in A\} = N/N = 1$ $(\omega \in A_*)$. Feltevés szerint T ergodikus, és így $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{k \in [0, N-1] : T^k\omega \in A\} = \mu(A)$ μ-majdnem minden ω-ra. Mivel ez a limesz $\equiv 1$ a pozitív μ-mértékű A_* halmazon, csak $\mu(A) = 1$ lehet. $\square$

Példa. Forgatás $2\pi\cdot$[irracionális] szöggel.
$\widehat{\Omega} := \mathbb{T}$ $(= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ a komplex egysgkr),
$\mu :=$[1-dimeziós Lebesgue-hossz $\mathbb{T}$-n]$/(2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrac. szám.
$T := \left[\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto e^{2\pi\alpha i}\zeta\right]$ μ-invariáns halmazai 0-1 mérékűek.

Bizonyítás. Legyen A egy T-invariáns halmaz, és $\mu(A) > 0$.
Tudjuk: van olyan $a \in A$ pont (ún. Lebesgue-pontja A-nak), amelyre $\lambda_n := \mu(I_n \cap A)/\mu(I_n) \to 1$, ahol $I_n := \{ae^{it} : -\pi/n < t < \pi/n\}$ (egy $2\pi/n$ hosszú krív a középponttal). Tudjuk: az a pont T-eltoltjainak $\{T^k a : k = 0, 1, \ldots\}$ halmaza sűrű $\mathbb{T}$-ben. Ezért minden $n > 1$ mellett vannak olyan $I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(n-1)}$ T-eltoltjai az I_n ívnek, amelyek páronként diszjunktak. Észrevétel: az $I_n^{(k)} \cap A$ $(k = 1, \ldots, n)$ halmazok egybevágók $I_n \cap A$-val. Vagyis $\mu(I_n^{(1)} \cap A) = \cdots = \mu(I_n^{(n-1)} \cap A) = \mu(I_n \cap A) = \lambda_n/n$, hiszen $\mu(I_n) = 1/n$. Ezért

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \mu(I_n^{(k)} \cap A) = \frac{n-1}{n}\lambda_n \to 1 \quad (n \to \infty). \square$$

Tétel. (Neumann-féle ergod-tétel L^2-ben). *Legyen H Hilbert-tér a $(.|.)$ skalár-szorzattal, $U : H \to H$ pedig unitér lineáris transzformáció. Ekkor*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} U^k f \to (I - P)f \qquad (f \in H,\ N \to \infty),$$

ahol P az $L := \overline{\mathrm{ran}}(I - U) = \left[\{g - Ug :\ g \in H\}\ \text{lezártja}\right]$ altérre való ortogonális projekció.

Bizonyítás. Az $f = g - Ug$ esetben $\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} U^k f = \frac{1}{N+1}(g - U^{N+1}g) \to 0$ teleszkopikus összeg miatt. Mivel az $E_N := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} U^k$

operátorok kontrakciók (≤ 1 normájúak), a *kondenzációs elv** szerint $E_n f \to 0$ $(N \to \infty)$ minden $f \in \big[\{g - Ug : \ g \in H\}$ lezártja$\big] = L$ vektorra is. Belátandó még: $E_N h \to h$ minden $h \in L^\perp = \{g \in H : (g|L) = 0\}$ vektorra. Csakhogy $h \in L^\perp$ esetén $(h|g - Ug) = 0$ $(g \in H)$. Az adjungáltra térve, $\big((I - U^*)h|g\big) = 0$ $(g \in H)$. Ez csak úgy lehet, ha $(I - U^*)h = 0$, azaz ha $h = U^*h$ és így $Uh = UU^*h = h$, mivel feltevés szerint U unitér $(UU^* = U^*U = I)$. $\square$

Definíció. A $T : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ transzformáció *μ-tartó*, ha

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A}) \ .$$

Megjegyzés. Ha $T : \widehat{\Omega} \leftrightarrow \widehat{\Omega}$ *μ-tartó*, akkor az $U : f \mapsto f \circ T$ leképezés unitér a $H := L^2(\widehat{\Omega}, \mu)$ Hilbert-téren.

Példa. Pék-transzformáció.
$\widehat{\Omega} := [0,1]^2$, $\mu :=$ [síkbeli Lebesgue-mérték],
$T = T_2 \circ T_1$, ahol
$T_1(x,y) := (2x, y/2)$ (szétlapítás),
$$T_2(x,y) := \begin{cases} (x,y) \text{ ha } x \le 1, \\ (x-1, y + (1/2)) \text{ ha } x > 1 \end{cases} \qquad \text{(kettévágás + felérakás).}$$

Példa. Tórusz-automorfizmusok.
$\widehat{\Omega} := \mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, $\mu :=$[2-dim. felszín]$/(4\pi^2)$.
$T\big(e^{2\pi x_1 i}, e^{2\pi x_2 i}\big) := \big(e^{\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2}, e^{\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2}\big)$,
ahol $\alpha_{k\ell} \in \mathbb{Z}$ $(k, \ell = 1, 2)$, és $\det(\alpha) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$.

Tétel. (ERGODIKUS TÉTEL). *Ha T μ-tartó és $f \in L^1(\mu)$, akkor létezik $f^* \in L^1(\mu)$, amelyre $\int f^* \, d\mu = \int f \, d\mu$, és*

$$\forall_\mu \ \omega \in \widehat{\Omega} \qquad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k \omega) \to f^*(\omega) = f^*(T\omega) \qquad (N \to \infty).$$

Következmény. *Ha T μ-tartó, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1) *T ergodikus;* 2) (ERG) *áll minden $f \in L^1(\mu)$ függvényre;*
3) *minden T-invariáns halmaz μ-mértéke* 0 *vagy* 1.

Bizonyítás. 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3) azonnal adódik a Propozícióból.

* Ha X, Y Banach-terek, S sűrű altere X-nek, és az $L_1, L_2, \ldots : X \to Y$ lineáris kontrakciók konvergálnak pontonként S-en, akkor van olyan (egyetlen) lineáris $L : X \to Y$ kontrakció, amelyre $L_n x \to Lx$ $\forall x \in X$.

3) $\Rightarrow$ 2). Tegyük fel, 3) teljesül. Legyen $f \in L^1(\mu)$ tetszőlegesen adott, f^* pedig az ergod-tételbeli átlagolt függvény. Mivel $f^*(\omega) = f^*(T\omega)$ μ-majdnem mindenütt, az $A_\lambda := \big(f^* < \lambda\big)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ halmazok T-invariánsak. Tekintsük a $\lambda^* := \int f^* d\mu = \int f\ d\mu$ értéket. Ekkor vagy $\mu(A_{\lambda^*}) = 1$ vagy $\mu(A_{\lambda^*}) = 0$. A $\mu(A_{\lambda^*}) = 1$ esetben $A_{\lambda^*} = \widehat{\Omega} \setminus [\mu\text{-nullhalmaz}]$, azaz $f^*(\omega) < \int f^* d\mu\ \forall_\mu \omega \in \widehat{\Omega}$. Csakhogy ekkor $\int f^*(\omega) d\mu(\omega) < \int f^*\ d\mu$, ami lehetetlen. Tehát $\mu(A_{\lambda^*}) = 0$, és $f^*(\omega) \geq \int f^* d\mu\ \forall_\mu \omega \in \widehat{\Omega}$. Hasonlóan, f helyett $-f$-fel, $-f^*(\omega) \geq -\int f^* d\mu\ \forall_\mu \omega \in \widehat{\Omega}$. Azaz $f^*(\omega) = \int f^* d\mu = \int f\ d\mu$ μ-majdnem mindenütt. $\square$

Példa. A 2π·irracionális szögű forgatás ergodikus 3) alapján.

Az ergodikus tétel bizonyítása

$(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \mu)$ rögzített mértéktér, $f \in L^1(\mu)$, $\mu(\widehat{\Omega}) = 1$.
Legyen $T\colon \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ μ-tartó, azaz $\mu(T^{-1}\widehat{A}) = \mu(\widehat{A})$ $(\widehat{A} \in \widehat{\mathcal{A}})$.

Bizonyítandó: *Létezik olyan* $f^* \in L^1(\mu)$, *amelyre*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) \longrightarrow f^* \quad \mu\text{-m.m.}\ ,$$

$$\int f\ d\mu = \int f^*\ d\mu\ , \qquad f^* = f^* \circ T \quad \mu\text{-m.m.}\ .$$

1) Lemma. (Ismert.) *Minden* $g \in L^1(\mu)$ *és* $\widehat{A} \in \widehat{\mathcal{A}}$ *esetén*

$$\int_{\widehat{A}} g\ d\mu = \int_{T^{-1}\widehat{A}} g(T)\ d\mu\ .$$

2) Definíció. A továbbiakban az $a := (a_0, \ldots, a_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ sorozatokra

$$K_a^{(p)} := \big\{k :\ \exists\ d < p \quad a_k + \cdots + a_{k+d} \geq 0\big\}\ .$$

Lemma. *Fennáll* $\sum_{k \in K_a^{(p)}} a_k \geq 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $k \in K_a^{(p)}$. Tekintsük a

$$d^*(k) := \min\{d < p : a_k + \cdots + a_{k+d} \geq 0\}$$

indexet. Észrevétel:

$$d < d^*(k), \Rightarrow \quad a_k + \cdots + a_{k+d} < 0\ ,$$
$$a_{k+d+1} + \cdots + a_{k+d^*} \geq 0 \quad \big(k, k+1, \ldots, k+d^*(k) \in K_a^{(p)}\big).$$

Innen következik, hogy valamely $0 \le k_1 \le \ell_1 < k_2 \cdots < k_m \le \ell_m$ ($\ell_i = d^*(k_i)$) indexekkel

$$K_a^{(p)} = [k_1, \ell_1] \cup [k_2, \ell_2] \cup \cdots \cup [k_m, \ell_m] \ ,$$
$$\sum_{k \in [k_i, \ell_i]} a_k \ge 0 \ . \qquad \square$$

3) Lemma. *Legyen* $p \in \mathbb{N}$. *Ekkor*

$$\int_{E^{(p)}} f \, d\mu \ge 0 \ , \quad \text{ahol} \quad E^{(p)} := \left\{\omega : \ \exists \, d < p \quad \textstyle\sum_{k=0}^{d} f\big(T^k\omega\big) \ge 0\right\} \ .$$

Bizonyítás. Az 1. Lemma szerint minden $N \in \mathbb{N}$ mellett

$$(N+1) \int_{E^{(p)}} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{N} \int_{T^{-k}E^{(p)}} f\big(T^k\omega\big) \, d\mu(\omega) =$$
$$= \int_{\widehat{\Omega}} \sum_{k=0}^{N} 1_{T^{-k}E^{(p)}}(\omega) f\big(T^k\omega\big) \, d\mu(\omega).$$

Itt $T^{-k}E^{(p)} = \left\{\omega : \ \exists \, d < p \quad f\big(T^k\omega\big) + \cdots + f\big(T^{k+d}\omega\big) \ge 0\right\}$. Ezért $N > p$ esetén

$$\sum_{k=0}^{N} 1_{T^{-k}E^{(p)}}(\omega) f\big(T^k\omega\big) =$$
$$= \sum\nolimits_{\substack{k: \ k \le N, \ \ \exists \, d < p \\ f(T^k\omega) + \cdots + f(T^{k+d}\omega) \ge 0}} f\big(T^k\omega\big) =$$
$$= \sum_{k \in K^{(p)}_{[f(\omega), \ldots, f(T^N\omega)]}} f\big(T^k\omega\big) \ +$$
$$+ \ \sum \Big[\big[f\big(T^k\omega\big) : \ N - p < k \le N\big] \text{ vmely tagjaira}\Big] =$$
$$= \quad s^{N,p}(\omega) + h^{N,p}(\omega) \ ,$$

ahol $s^{N,p}(\omega) := \sum_{k \in K^{(p)}_{[f(\omega), \ldots, f(T^N\omega)]}} f\big(T^k\omega\big) \ge 0$ μ-majdnem mindenütt a 2. Lemma szerint. A maradéktagra

$$\big|h^{N,p}(\omega)\big| \le \big|f\big(T^{N-p+1}\omega\big)\big| + \cdots + \big|f\big(T^N\omega\big)\big|$$

mindenütt $\widehat{\Omega}$-n. Az 1. Lemma szerint $\int \left|f\left(T^k\omega\right)\right| \, d\mu(\omega) = \int |f| \, d\mu$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Innen

$$\int_{E^{(p)}} f \, d\mu = \frac{1}{N+1} \int s^{N,p} \, d\mu - \frac{1}{N+1} \int h^{N,p} \, d\mu \geq$$
$$\geq \frac{1}{N+1} \int \underbrace{s^{N,p}}_{\geq 0} \, d\mu - \underbrace{\frac{p}{N+1}}_{\searrow 0} \int |f| \, d\mu \, . \qquad \square$$

4) Propozíció. (Maximál-ergod tétel). *Legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\int_{E_\lambda} f \, d\mu \geq \lambda \mu(E_\lambda) \, , \quad \text{ahol} \quad E_\lambda := \left\{ \omega : \, \exists \, n \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \geq \lambda \right\} .$$

Speciálisan (később csak erre lesz szükség), ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k) > \lambda$ *μ-majdnem mindenütt, akkor* $\int f \, d\mu \geq \lambda$.

Bizonyítás. Vehető $\lambda = 0$ (f helyett $f - \lambda \cdot 1_{\widehat{\Omega}}$ tekintendő).
A 3)-beli jelölésekkel $E_0 = \bigcup_{p=0}^{\infty} E^{(p)}$, és $E^{(0)} \subset E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \cdots$.
A 3. Lemma szerint $\int_{E_0} f \, d\mu = \lim_{p\to\infty} \int_{E^{(p)}} f \, d\mu \geq 0$.
Ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)) > 0$, akkor $\omega \in E_0$. Ha tehát $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) > 0$ μ-majdnem mindenütt, akkor $\int f \, d\mu = \int_{E_0} f \, d\mu \geq 0$. $\square$

5) Az ergod-tétel bizonyításának befejezése

Tekintsük a

$$g^* := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) \, , \qquad g_* := \liminf_{no\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)$$

függvényeket. Észrevétel:

$$g^* = g^*(T) \, , \quad g_* = g_*(T) \, .$$

Bizonyítás: mivel egy 0-hoz taró sorozat hozzáadása ill. egy 1-hez tartó sorozattal való szorzás nem változtatja meg a konvergens részsorozatok határértékeit,

$$g^*(T\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k+1}\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k\omega) =$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k\omega) + \frac{1}{n} f(\omega) \right] =$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(T^k\omega) = g^*(\omega).$$

A $g_*(T\omega) = g_*(\omega)$ relációk bizonyítása $\liminf$ vételével adódik.

Végül belátjuk: $g^* = g_*$ μ-majdnem mindenütt.
Bizonyítás. Legyen

$$\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta} := \big\{\omega : \; g^*(\omega) > \beta > \alpha > g_*(\omega)\big\} \qquad (\alpha < \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\ ) \ .$$

Elegendő belátni: $\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}) = 0$ mindig.
Mivel $g_* = g_*(T)$, $g^* = g^*(T)$, $\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta} = T^{-1}\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}$.
Az $\big(\widehat{\Omega}, \mu\big)$ valószínűségi mértéktér helyett $\big(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}, \mu/\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta})\big)$-ra és $f|_{\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}}$-ra alkalmazva a Maximál-ergod tételt,

$$\int_{\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}} f \; d\mu \geq \beta\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}), \qquad \int_{\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}} (-f) \; d\mu \geq (-\alpha)\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\beta\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}) \leq \int_{\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}} f \; d\mu \leq \alpha\mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}) \ .$$

Tehát

$$\alpha < \beta \ \Rightarrow \ \mu(\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}) = \int_{\widehat{\Omega}_{\alpha,\beta}} f \; d\mu = 0 \ .$$

Így

$$\exists \ f^* \quad f^* = f^*(T) \ \text{ és } \ \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) \to f^* \ \ \mu\text{-majdnem mindenütt.}$$

Belátandó még: $f^* \in L^1(\mu)$ és $\int f \; d\mu = \int f^* \; d\mu$. Ezt biztosítja az alábbi.

6) Propozíció. *Tegyük fel, hogy* $\forall_\mu \omega \quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \to f^*(\omega)$.
Ekkor $f^* \in L^1(\mu)$, *és*

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) - f^* \right\|_{L^1(\mu)} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Bizonyítás. Ez a kondenzációs elv következménye. Tudjuk: a korlátos függvények sűrűn helyezkednek el $L^1(\mu)$-ben. Legyen $X = Y := L^1(\mu)$, $S := L^\infty(\mu)$, $L_N : g \mapsto N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} g \circ T^k$. Láttuk: ha $g \in L^\infty(\mu)$ és $-M \leq g \leq M$, akkor az $L_1 g, L_2 g, \ldots$ μ-majdnem minden $\omega \in \widehat{\Omega}$ pontban konvergál, miközben $-M \leq L_n g \leq M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ez automatikusan maga után vonja $(L_1 g, L_2 g, \ldots)$ $L^1(\mu)$-beli konvergenciáját. Valóban,

$2M \geq |L_n g(\omega) - g^*(\omega)| \to 0 \ \ \forall_\mu \in \Omega$, így a Lebesgue-féle konvergencia-tétel szerint $\|L_n g - g^*\| = \int |L_n g - g^*| d\mu \to 0$. A kondenzációs elv szerint tehát van olyan $L : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ lineáris kontrakció, hogy $L_n h \to Lh \ \ \forall\ h \in L^1(\mu)$. Speciálisan $L_n f \to Lf \in L^1(\mu)$. Másrëszt $L_n f(\omega) \to f^*(\omega) \ \ \forall_\mu \omega \in \widehat{\Omega}$. A Riesz–Weyl-lemma* szerint bármely L^1-ben konvergens függvénysorozatnak van pontonként majdnem mindenütt konvergens részsorozata. Ezért $L_{n_k}(\omega) \to Lf(\omega) = f^*(\omega) \ \ \forall_\mu \omega \in \widehat{\Omega}$ valamely $n_1, n_2, \dots$ indexsorozattal. □

* Ha $h_1, h_2, \dots \in L^1(\mu)$ és $\sum_k \|h_k - h_{k+1}\|_{L^1(\mu)} < \infty$, akkor μ-majdnem minden ω helyen $\sum_k |h_k(\omega) - h_{k+1}(\omega)| < \infty$ és $h_n(\omega) \to h_1(\omega) + \sum_k [h_{k+1}(\omega) - h_k(\omega)]$.

$\mathbb{Z}$-stacionárius folyamatok ergodicitása

Definíció. Legyen Θ kommutatív félcsoport.
A $\xi = \big[\xi(t):\ t \in \Theta\big]$ folyamat Θ-*stacionárius*, ha*

$$\big(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_n)\big) \overset{\mathcal{D}}{=} \big(\xi(t_1+h), \cdots, \xi(t_n+h)\big) \qquad \forall\ t_1, \cdots, t_n, h \in \Theta.$$

Példa. 1) $\big[\xi(t):\ t \in \Theta\big]$ Θ-stacionárius, ha *azonos eloszlású független* valószínűségi változókból áll.
2) A Wiener-folyamat nem $\mathbb{R}_+$-stacionárius.
Azonban $\big[w(t+h) - w(t):\ t \geq 0\big]$ $\mathbb{R}_+$-stacionárius $(h > 0$ rögz.).

Definíció. A továbbiakban $\Theta = \mathbb{Z}$ és $X = \mathbb{R}$. A $\big[\xi(t):\ t \in \mathbb{Z}\big]$ (ahol $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}$) folyamat *eloszlási mértéke* az a $\mathbf{P}_\xi$ mérték, amelyre a $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} := \{\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvények$\}$ tér

$$\widehat{H}_{\{t_1,\ldots,t_N\},A} := \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\ :\ (f(t_1), \ldots, f(t_N)) \in A\big\}$$

(A Borel $\subset \mathbb{R}^N$; $N = 1, 2, \ldots$) hengerhalmazain

$$\mathbf{P}_\xi\big(\widehat{H}_{\{t_1,\ldots,t_N\},A}\big) = \mathbf{P}\big((\xi(t_1), \ldots, \xi(t_N)) \in A\big).$$

Bevezetjük a következő $S : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \leftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *eltolást* ill. $R_\xi : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *reprezentációt*

$$\begin{aligned} S\varphi &:= [\mathbb{Z} \ni t \mapsto \varphi(t+1)] \qquad (\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}), \\ R_\xi(\omega) &:= [\mathbb{Z} \ni t \mapsto \xi(t)(\omega)] \qquad (\omega \in \Omega)\ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. 1) S invertálható, $[S^{-1}\varphi](t) = \varphi(t-1)$.
2) $\mathbf{P}_\xi = \mathbf{P} \circ R_\xi^{-1}$, azaz $\mathbf{P}_\xi(A) = \mathbf{P}\big(R_\xi^{-1}(A)\big)$ (A Borel $\subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$).
3) Minden $\mathbf{P}_\xi$-mérhető $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó felírható

(REP) $$\eta = f_\eta \circ R_\xi$$

alakban egy $\mathbf{P}_\xi$ szerinti 0-halmaz erejéig *egyértelmű* $f_\eta : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ Borel függvénnyel.

Definíció. Használni fogjuk a (REP) szerinti f_η jelölést. Speciálisan

$$f_{\xi(t)} : \varphi \mapsto \varphi(t) \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

---

* $\overset{\mathcal{D}}{=}$ jelentése: *azonos (együttes) eloszlású.*

Tétel. $\big[\xi(t): \ t \in \mathbb{Z}\big]$ *pontosan akkor* $\mathbb{Z}$*-stacionárius, ha*

$$\mathbf{P}_\xi(\widehat{H}) = \mathbf{P}_\xi(S(\widehat{H})) \qquad \forall\, \widehat{H} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ hengerhalmazra,}$$

vagyis ha

$$\mathbf{P}_\xi(\widehat{A}) = \mathbf{P}_\xi(S(\widehat{A})) \qquad \forall\, \widehat{A} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ Borel halmazra.} \qquad \square$$

Tegyük fel, hogy $\big[\xi(t): \ t \in \mathbb{Z}\big]$ $\mathbb{Z}$-stacionárius, ahol $\xi(t): \Omega \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{E}(|\xi(t)|) < \infty$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$.
Alkalmazni fogjuk az ergod-tételt a következő esetre:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\widehat{\Omega} := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \ , \quad \mu := \mathbf{P}_\xi \ , \quad T := S : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \ni \varphi \mapsto [t \mapsto \varphi(t+1)] \ , \\ &f_{\xi(t)}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R} \ , \quad \varphi \mapsto \varphi(t) \quad (t = 0, 1, \ldots) \ , \quad f := f_{\xi(0)} \ . \end{aligned}$$

Észrevétel. Az $S\colon \varphi \mapsto \big[t \mapsto \varphi(t+1)\big]$ eltolással

$$f_{\xi(t+1)} = f_{\xi(t)} \circ S \qquad (f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}})) \ .$$

Tehát az előbbi jelölésekkel $f \circ T^k = f_{\xi(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Az ergod-tétel következtében van olyan f^*, amelyre

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_{\xi(k)} \to f^* \qquad \mathbf{P}_\xi\text{-majdnem mindenütt.}$$

1) Következmény. *Létezik olyan* $\xi^*: \Omega \to \mathbb{R}$*, amelyre*

$$\xi^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{N+n-1} \xi(k)$$

1 *valószínűséggel tetszőleges* N *mellett.*

Bizonyítás. Az $\xi^*(\omega) := f^*[t \mapsto \xi(t)(\omega)]\big(= f^*(R_\xi(\omega))\big)$ választás megfelel az ergod-tétel szerint. $\square$

2) Ha B Borel részhalmaza $\mathbb{R}^N$-nek, a

$$\chi(k) := 1_{\big([\xi(k), \xi(k+1), \ldots, \xi(k+N)] \in B\big)}$$

vszg. változókkal a $\big[\chi(k): \ k \in \mathbb{Z}\big]$ folyamat is $\mathbb{Z}$-stacionárius.

Propozíció. *Van olyan* $\chi^*: \Omega \to \mathbb{R}$*, amelyre* 1 *valószínűséggel*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi(k) \to \chi^* \ . \qquad \square$$

Észrevétel:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi(k)(\omega)=\frac{1}{n}\underbrace{\#\big\{k\in\mathbb{Z}\ :\ 0\le k<n,\ [\xi(k)(\omega),\dots,\xi(k+N)(\omega)]\in B\big\}}_{(**)}.$$

Itt $(**)$ jelentése: n egymás utáni kísérletből hányszor következik be az $\big([\xi(.),\dots,\xi(.+N)]\in B\big)$ esemény.

Kérdés. $\chi^*(\omega)=\mathbf{P}(\xi(0)\in B)$ mikor teljesül majdnem biztosan?

3) Definíció. Azt mondjuk, $\big[\xi(k):\ k\in\mathbb{Z}\,\big]$ *ergodikus folyamat*, ha a $(*)$-beli rendszer ergodikus, azaz ha

$$\forall\ \widehat{A}\ \text{Borel}\subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\quad \forall_{\mathbf{P}}\ \omega\in\Omega$$
$$\frac{1}{n}\#\big\{k\in\mathbb{Z}\ :\ 1\le k<n,\ [\xi(t+k)(\omega):\ t\in\mathbb{Z}\,]\in\widehat{A}\big\}\to\mathbf{P}_\xi(\widehat{A}).$$

Megjegyzés. Bármely $\widehat{A}$ Borel $\subset\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ és $\varepsilon>0$ esetén van olyan $\widehat{H}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ hengerhalmaz, hogy $\mathbf{P}_\xi(\widehat{H}\bigtriangleup\widehat{A})<\varepsilon$. Innen belátható: *a* $\big[\xi(t):\ t\in\mathbb{Z}\,\big]$ *folyamat pontosan akkor ergodikus, ha*

$$\forall\ N\quad \forall\ B\ \text{Borel}\subset\mathbb{R}^N\quad \forall_{\mathbf{P}}\ \omega\in\Omega$$
$$\frac{1}{n}\#\big\{k\in\mathbb{Z}\ :\ [\xi(k+1)(\omega),\dots,\xi(k+N)(\omega)]\in B\big\}\to\mathbf{P}\big((\xi_1,\dots,\xi_N)\in B\big).$$

Definíció. Az $\widehat{A}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ mérhető halmaz ξ*-invariáns*, ha

$$\mathbf{P}_\xi(\widehat{A}\bigtriangleup S^{-1}(\widehat{A}))=0\ .$$

A $[\xi(t):t\in\mathbb{Z}\,]$ folyamat *tranzitív*, ha minden ξ-invariáns $\widehat{A}$ halmazra

$$\mathbf{P}_\xi(\widehat{A})=[0\ \text{vagy}\ 1]\ .$$

Tétel. *A* $\big[\xi(t):\ t\in\mathbb{Z}\,\big]$ $\mathbb{Z}$ *-stacionárius folyamatra a következő három feltétel ekvivalens:*

a) $\big[\xi(t):\ t\in\mathbb{Z}\,\big]$ *ergodikus;*
b) $\big[\xi(t):\ t\in\mathbb{Z}\,\big]$ *tranzitív;*
c) $\forall\ f\in L^1(\mathbf{P}_\xi)$ $\quad\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(S^k)\to\text{const}\quad\mathbf{P}_\xi$-m.m. .

Bizonyítás. A tétel speciális esete az Ergod-tétel utáni Következménynek. □

4) A nagy számok erős törvénye
Legyenek $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ azonos eloszlású, független véletlen változók.
A sztochasztikus folyamatok Kolmogorov-féle alaptétele alapján létezik $\left[\xi(t):\ t \in \mathbb{Z}\right]$ azonos eloszlású, független véletlen változókból álló folyamat, amelyre

$$\big(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)\big) \overset{\mathcal{D}}{=} \big(\xi_1, \dots, \xi_n\big)$$

valahányszor $t_1, \dots, t_n$ különböző indexek.
Tudjuk: 1) $\left[\xi(t):\ t \in \mathbb{Z}\right]$ $\mathbb{Z}$-stacionárius.
2) Van olyan ξ^*, amelyre

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \xi(k) \to \xi^* \quad \mathbf{P}\text{-m.m.}\ ,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{N+n-1} \xi(k) \to \xi^* \quad \mathbf{P}\text{-m.m.}\ .$$

A ξ^* vszg. változó független tetszőleges véges sok $\xi(0), \cdots, \xi(N)$-től. A *0-1 törvény* alapján

$$\xi^* \equiv \text{const} \quad \mathbf{P}\text{-m.m.}\ .$$

Mivel $E(\xi(0)) = E(\xi(1)) = \dots = E(\xi^*)$ és ξ^* konstans, ezért $\xi^* = E(\xi(0))$ $\mathbf{P}$-m.m. *Következésképpen a* $\xi_0, \xi_1, \dots$ *valószínűségi változókra is* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \to E(\xi_0)$ $\mathbf{P}$-m.m. $\square$

ÁLTALÁNOS MARKOV-FOLYAMATOK, DOEBLIN-FELTÉTEL

Az egész fejezetben X alaphalmaz, $\mathcal{F}$ σ-algebra X-en;
Jelölés: $A \subset_{\mathcal{F}} B$, ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$.

Definíció. $p : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *általánosított sztochasztikus mátrix* $(X, \mathcal{F})$-en, ha

$$A \mapsto p(x, A) \quad \text{valószínűségi mérték } X\text{-en} \quad \forall\, x \in X,$$
$$x \mapsto p(x, A) \quad \mathcal{F}\text{-mérhető függvény} \quad \forall\, A \in \mathcal{F}.$$

Példa. $\big[\xi_t : \ t = 1, 2, \dots\big]$ időfüggetlen átmenetű Markov-lánc az $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ állapottéren a $\big(p_{ij}\big)_{i,j}$ átmeneti mátrixszal.

Tudjuk: $\mathbf{P}\big(\xi_{t+1} = x_j\big) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(\xi_t = x_i) p_{ij} \qquad (1 \le j \le N; \ t = 0, 1, \dots)$.
Tekintsük a

$$\pi_t : X \supset A \mapsto \mathbf{P}\big(\xi_t \in A\big) = \sum_{i:\ x_i \in A} \mathbf{P}\big(\xi_t = x_i\big)$$

eloszlási mértékeket. Ekkor a

$$p(x_i, A) := \sum_{j:\ x_j \in A} p_{ij} \qquad (1 \le i \le N; \ A \subset X)$$

általánosított sztochasztikus mátrixszal

$$\pi_{t+1}(A) = \mathbf{P}\big(\xi_{t+1} \in x_j\big) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(\xi_t = x_i) \sum_{j:\ x_j \in A} p_{ij} =$$
$$= \int_{z \in X} \pi_t(dz)\ p(z, A).$$

Megjegyzés. Tudjuk: az előbbi példában a $\Pi := \big[p_{ij}\big]_{i,j=1}^N$ átmeneti mátrix hatványaival a $\big[\pi_t\{x_1\}, \dots, \pi_t\{x_n\}\big]$ sorvektorokra

$$\big[\pi_{t+n}\{x_1\}, \dots, \pi_{t+n}\{x_n\}\big] = \big[\pi_t\{x_1\}, \dots, \pi_t\{x_n\}\big] \Pi^n \ .$$

Észrevétel: itt a Π^n-nek megfelelő $p^{(n)}(x_i, A) := \sum_{j:\ x_j \in A} \big[\Pi^n\big]_{ij}$ általánosított sztochasztikus mátrixokra a mátrixszorzás szabályai szerint

$$p^{(n+m)}(x_i, A) = \sum_{j:\ x_j \in A} \big[\Pi^{m+n}\big]_{ij} = \sum_{j:\ x_j \in A} \sum_{k=1}^N \big[\Pi^m\big]_{ik} \big[\Pi^n\big]_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^N \big[\Pi^m\big]_{ik} \sum_{j:\ x_j \in A} \big[\Pi^n\big]_{kj} =$$
$$= \int_{z \in X} p^{(m)}(x, dz)\, p^{(n)}(z, A) \ .$$

Definíció. Az $(X, \mathcal{F})$ fölötti p, q általánosított mátrixok *szorzata*

$$p \bullet q\,(x, A) := \int_{z \in X} p(x, dz)\, q(z, A) \qquad (x \in X,\ A \in \mathcal{F}).$$

Propozíció. 1) *$(X, \mathcal{F})$-beli általánosított sztochasztikus mátrixok szorzata $(X, \mathcal{F})$-beli általánosított sztochasztikus mátrix.*

2) *Ha p, q $(X, \mathcal{F})$-beli általánosított sztochasztikus mátrixok, π valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en, akkor $\rho : \mathcal{F} \ni E \mapsto \int_{x \in E} \pi(dx)\ p(x, E)$ szintén valószínűségi mérték, és*

$$\int_{x \in X} \pi(dx) p \bullet q\,(x, A) = \int_{z \in X} \rho(dz) q(z, A).$$

Megjegyzés. 2) a mátrixszorzás tranzitivitása általánosított mátrixokra: $o \bullet (p \bullet q) = (o \bullet p) \bullet q$ azonnal jön 2)-ből a $\pi_x : B \mapsto o(x, B)$ mértékekkel.

Bizonyítás. 1) Triviális: $p \bullet q\,(x, X) = 1$, és $0 \leq p \bullet q\,(x, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \bullet q\,(x, A_k)$, ha $A_1, A_2, \ldots$ diszjunktak. Legyen $A \in \mathcal{F}$ rögzítve. Belátandó még: $x \mapsto p \bullet q\,(x, A)$ $\mathcal{F}$-mérhető.
Definíció szerint $z \mapsto q(z, A) \in [0, 1]$ $\mathcal{F}$-mérhető, így $[0, 1]$-be képező $\mathcal{F}$-lépcsős függvények pontonkénti limesze:

$$q(z, A) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(z) \quad (z \in X), \quad \text{ahol } \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} 1_{A_k^{(n)}}$$

valamely $0 \leq \gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_n^{(n)} \leq 1$ számokkal és páronként diszjunkt $A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)} \in \mathcal{F}$ halmazokkal. Ekkor

$$\begin{aligned} p \bullet q\,(x, A) &= \int_{z \in X} p(x, dz) q(z, A) = \lim_{n \to \infty} \int_{z \in X} p(x, dz) \varphi_n(z) = \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} \int_{z \in X} p(x, dz) 1_{A_k^{(n)}}(z) = \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} \int_{z \in A_k^{(n)}} p(x, dz) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} p(x, A_k^{(n)})\ . \end{aligned}$$

Mivel az $x \mapsto p(x, A_k^{(n)})$ függvények $\mathcal{F}$-mérhetők, a lineáris kombinációikból pontonkénti limeszként adódó, $x \mapsto p \bullet q\,(x, A)$ is $\mathcal{F}$-mérhető.

2) Az $\mathcal{F}$-mérhethő $f(x) := q(x, A)$ függvénnyel belátandó, hogy

$$(\bullet) \qquad \int_{y \in X} \rho(dy)\ f(y) = \int_{x \in X} \pi(dx) \int_{y \in X} p(x, dy)\ f(y)\ .$$

Tetszőleges $C \subset_{\mathcal{F}} X$ halmaz esetén $\int_{y\in X} \rho(dy)\ 1_C(y) = \rho(C)$ és
$\int_{x\in X} \pi(dx) \int_{y\in X} p(x,dy)\ 1_C(y) = \int_{x\in X} \pi(dx) \int_{y\in X} p(x,dy)\ 1_C(y) =$
$= \int_{x\in X} \pi(dx) p(x,C) = \rho(C)$. Azaz $(\bullet)$ áll f helyén 1_C-vel.
Lineáris kombinációkat vve, $(\bullet)$ áll az 1)-beli φ_n lépcsősfüggvényekre is, majd limesszel φ-re. $\square$

Jelölés. $p^n := \overbrace{p\bullet p\bullet \cdots \bullet p}^{n \text{ times}}$.

Emlékeztető. $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ esetén az $\Omega \to X$ valószínűségi változókból álló $\big[\xi_t :\ t = 0,1,2,\ldots\big]$ sztochasztikus folyamat pontosan akkor Markov-lánc, ha vannak olyan $\Pi^{(t_1,t_2)}$ $(t_1 < t_2)$ mátrixok, amelyekre

$$\Pi^{(t_1,t_2)}\Pi^{(t_2,t_3)} = \Pi^{(t_1,t_3)} \qquad (t_1 < t_2 < t_3)\ ,$$

és a $\pi_0 := \big[\mathbf{P}(\xi_0 = x_1), \ldots, \mathbf{P}(\xi_0 = x_N)\big]$ kezdeti eloszlásvektorral

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n \ \text{ és } \ 1 \le i_0, \ldots, i_n \le N \implies$$
$$\mathbf{P}\big(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}\big) = \pi_0(i_0)\Pi^{(0,t_1)}_{i_0,i_1}\Pi^{(t_1,t_2)}_{i_1,i_2}\cdots\Pi^{(t_{n-1},t_n)}_{i_{n-1},i_n}\ .$$

Halmazokra kiterjesztve kapjuk:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n \ \text{ és } \ A_0, \ldots, A_n \subset X \implies$$
$$\mathbf{P}\big(\xi_0 \in A_0, \xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n\big) =$$
$$= \sum_{i_0:\ x_{i_0}\in A_0} \pi_0(i_0) \sum_{i_1:\ x_{i_1}\in A_1} \Pi^{(0,t_1)}_{i_0,i_1} \sum_{i_2:\ x_{i_2}\in A_2} \Pi^{(t_1,t_2)}_{i_1,i_2} \cdots \sum_{i_n:\ x_{i_n}\in A_n} \Pi^{(t_{n-1},t_n)}_{i_{n-1},i_n}\ .$$

Az ennek megfelelő integrálformula

(M)
$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n \ \text{ és } \ A_0, \ldots, A_n \subset X \implies$$
$$\mathbf{P}\big(\xi_0 \in A_0, \xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n\big) =$$
$$= \int_{z_0\in A_0} \pi_0(dz_0) \int_{z_1\in A_1} p^{(0,t_1)}(z_0,dz_1) \int_{z_2\in A_2} p^{(t_1,t_2)}(z_1,dz_2) \cdots \int_{z_n\in A_n} p^{(t_{n-1},t_n)}(z_{n-1},dz_n)\ .$$

Ezt posztuláljuk az általános esetre.

Definíció. Az $\Omega \to X$ valószínűségi változókból álló $\left[\xi_t : \ t = 0, 1, 2, \dots\right]$ sztochasztikus folyamat *diszkrét idejű Markov-folyamat*, ha vannak olyan $p^{(t_1,t_2)} : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ $(0 \le t_1 < t_2)$ általánosított mátrixok, amelyekre (M) áll. a $\pi_0 : A \mapsto \mathbf{P}(\xi_0 \in A)$ kezdeti eloszlással.
A $\left[\xi_t : \ t = 0, 1, 2, \dots\right]$ Markov-folyamat *stacionárius átmenetű*, ha

(SM) $$t_1 < t_2 \Longrightarrow \quad p^{(t_1,t_2)} = p^{(t_2-t_1)} \ , \quad \text{ahol} \ \ p := p^{(0,1)} \ .$$

Megjegyzés. Közvetlen behelyettesítéssel láthatjuk $A_0 := X$ mellett, hogy a

$$0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n \ \text{ és } \ A_0, \dots, A_n \subset X \quad \Longrightarrow$$
$$\mathbf{P}\Big(\xi_{t_n} \in A_n, \xi_{t_{n-1}} \in A_{n-1}, \dots, \xi_{t_1} \in A_1 \Big| \ \xi_{t_{n-1}} \in A_{n-1}, \dots, \xi_{t_1} \in A_1\Big) =$$
$$= \mathbf{P}\Big(\xi_{t_n} \in A_n \Big| \ \xi_{t_{n-1}} \in A_{n-1}\Big)$$

klasszikus feltételes valószínűségi Markov tulajdonság teljesül (M) esetén.

Propozíció. *Ha a stacionárius átmenetű* $\left[\xi_t : \ t = 0, 1, 2, \dots\right]$ *Markov-folyamat* $p := p^{(0,1)}$ *általánosított átmeneti mátrixában a sorok azonosak, azaz*
$$p(x, A) = p(y, A) = \pi(A) \qquad (x, y \in X, \ A \in \mathcal{F})$$
akkor a 2. tagtól kezdve a $\left[\xi_t : \ t = 1, 2, \dots\right]$ *folyamat stacionárius.*

Bizonyítás. Belátandó: $t_1, \dots, t_n > 0$ és $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ esetén mindig

$$\mathbf{P}\big(\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\big) = \mathbf{P}\big(\xi_{t_1+1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n+1} \in A_n\big) \ .$$

Észrevétel: k-szerinti indukcióval adódik

$$p^k(x, A) = \pi(A) = \int_{z \in X} \pi(dz)\pi(A) \quad (k = 1, 2, \dots; \ A \in \mathcal{F}).$$

Vehető $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Ekkor (M) szerint

$$\mathbf{P}\big(\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\big) =$$
$$= \int_{z_0 \in X} \pi_0(dz_0) \int_{z_1 \in A_1} p^{t_1}(z_0, dz_1) \int_{z_2 \in A_2} p^{(t_2-t_1)}(z_1, dz_2) \cdots \int_{z_n \in A_n} p^{(t_n-t_{n-1})}(z_{n-1}, dz_n) =$$
$$= \int_{z_0 \in X} \pi_0(z_0) \int_{z_1 \in A_1} \pi_(dz_1) \int_{z_2 \in A_2} \pi(dz_2) \cdots \int_{z_n \in A_n} \pi(dz_n) \ .$$

Az utóbbi kifejezés ugyanaz akármilyen különböző $t_1, \dots, t_n$ számokra. $\square$

Ettől kezdve a fejezet végéig $p : X \times \mathcal{F} \to [0,1]$ rögzített általánosított sztochasztikus mátrix,

$$m^{(n)}(A) := \inf_{x \in X} p^n(x,A) \ , \quad M^{(n)}(A) := \sup_{x \in X} p^n(x,A) \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

Mivel $p^{(n+1)}(x,A) = \int_{z \in X} p(x,dz) p^n(z,A) \leq \int_{z \in X} p(x,dz) M^{(n)}(A) = M^{(n)}(A)$, fennáll $M^{(n+1)}(A) \leq M^{(n)}(A)$. Hasonlóan $m^{(n+1)}(A) \geq m^{(n)}(A)$. Tehát

$$m^{(1)}(A) \leq m^{(2)}(A) \leq \cdots \leq \cdots \leq M^{(2)}(A) \leq M^{(1)}(A).$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy van olyan $\psi \neq 0$ mérték egy $C \in \mathcal{F}$ halmazon, amelyre*

$$p^N(x,A) \geq \psi(A) \qquad \forall\, x \in X \ \ \forall\, A \subset_{\mathcal{F}} C$$

valamely N index mellett. Ekkor $\sup_{A \in \mathcal{F}} \big[M^{(n)}(A) - m^{(n)}(A)\big] \searrow 0$, azaz van olyan π valószínűségi mérték, hogy $p^n(x,A) \to \pi(A)$ $(A \in \mathcal{F})$.

Bizonyítás. Döntő észrevétel:

$$M^{(n+N)}(A) - m^{(n+N)}(A) = \sup_{x,y} \big[p^{n+N}(x,A) - p^{n+N}(y,A)\big] \ .$$

Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ tetszőlegesen rögzítve, és tekintsük a

$$\nu : A \mapsto p^N(x,A) - p^N(y,A)$$

korlátos előjelezett mértéket. Tudjuk:

$$\exists\, S^+, S^- \quad X = S^+ \stackrel{\bullet}{\cup} S^-, \ \ \nu(A) \geq 0 \ (A \subset S^+), \ \ \nu(B) \leq 0 \ (B \subset_{\mathcal{F}} S^-).$$

Itt $\nu(S^+) + \nu(S^-) = \nu(X) = p^N(x,X) - p^N(y,X) = 1 - 1 = 0$, azaz $\nu(S^-) = -\nu(S^+) \leq 0$. Ezért

$$\begin{aligned}
p^{n+N}(x,A) - p^{n+N}(y,A) &= \\
&= \int_{z \in X} p^N(x,dz) p^n(z,A) - \int_{z \in X} p^N(y,dz) p^n(z,A) = \\
&= \int_{z \in X} \nu(dz) p^n(z,A) = \\
&= \int_{z \in S^+} \nu(dz) p^n(z,A) + \int_{z \in S^-} \nu(dz) p^n(z,A) \leq \\
&\leq M^{(n)}(A) \nu(S^+) + m^{(n)}(A) \nu(S^-) = \\
&= \big[M^{(n)}(A) - m^{(n)}(A)\big] \nu(S^+) \ .
\end{aligned}$$

Itt a $C^+ := C \cap S^+$, $C^- := C \cap S^-$ halmazokkal, továbbá mivel $\nu(S^+) = -\nu(S^-)$,

$$\nu(S^+) = \begin{cases} p^N(x,S^+) - p^N(y,S^+) \le p^N(x,S^+) \le p^N(x, X \setminus C^-) = 1 - \psi(C^-) \\ p^N(y,S^-) - p^N(x,S^-) \le p^N(y,S^-) \le p^N(x, X \setminus C^+) = 1 - \psi(C^+) \ . \end{cases}$$

Azaz mindenképpen

$$\nu(S^+) \le \min\{1 - \psi(C^-), 1 - \psi(C^+)\} = 1 - \max\{\psi(C^-), \psi(C^+)\} \le$$
$$\le 1 - \varepsilon \ , \quad \text{ahol} \ \ \varepsilon := \psi(C)/2) \ .$$

Vagyis

$$p^{n+N}(x,A) - p^{n+N}(y,A) \le \big[M^{(n)}(A) - m^{(n)}(A)\big]\big(1 - \varepsilon\big) \ .$$

A gondolatmenet bármely $n = 1, 2, \ldots$-re, $x, y \in X$-re és $A \in F$-re áll. A kezdeti észrevétel szerint tehát ($\sup_{x,y}$-t véve)

$$M^{(n+N)}(A) - m^{(n+N)}(A) \le \big[M^{(n)}(A) - m^{(n)}(A)\big](1 - \varepsilon).$$

Innen k-szerinti indukcióval

$$M^{(kN)}(A) - m^{(kN)}(A) \le \big[M^{(N)}(A) - m^{(N)}(A)\big](1 - \varepsilon)^k \searrow 0 \ . \square$$

Következmény. *Mivel triviálisan $M^{(N)}(A) - m^{(N)}(A) \le 1$, van olyan $0 < \varepsilon < 1$, hogy a π limesz-mértékkel a tétel feltevései mellett*

$$\big|p^{kN}(x,A) - \pi(A)\big| \le (1 - \varepsilon)^k \qquad (A \in \mathcal{F}, \ k = 1, 2, \ldots).$$

Definíció. (Doeblin feltétel). A $p : X \times \mathcal{F} \to [0,1]$ általánosított sztochasztikus mátrixra teljesül az N-edrendű *Doeblin-feltétel*, ha létezik olyan $\varphi : \mathcal{F} \to [0,1]$ valószínűségi mérték és olyan $\varepsilon \in (0,1)$, hogy

(D_N) $$p^N(x,A) \le 1 - \varepsilon \qquad \text{valahányszor} \ \ x \in X \ \ \text{és} \ \ \varphi(A) < \varepsilon \ .$$

Észrevétel: $(\mathrm{D}_N) \Rightarrow (\mathrm{D}_{N+n})$, hiszen $\int_{z \in X} p^n(x,dz) p^N(z,A) \le 1 - \varepsilon$, ha $p^N(X,A) \le 1 - \varepsilon$. Másrészt a $B := X \setminus A$ komplementerre átfogalmazva (D_N) ekvivalens alakja

(D'_N) $$p^N(x,B) > \varepsilon \qquad \text{valahányszor} \ \ x \in X \ \ \text{és} \ \ \varphi(B) \ge 1 - \varepsilon \ .$$

Lemma. *Az előző tétel feltételei* $\Longrightarrow$ (D_N).

Bizonyítás. Legyen $\varphi(A) := \psi(A \cap C)/\psi(C)$. Ekkor $\varphi(B) \ge 1/2$ esetén

$$p^N(x,B) \ge p^N(x, C \cap B) \ge \psi(B \cap C) = \varphi(B)\psi(C) \ge \psi(C)/2 \ .$$

Vagyis bármely $\varepsilon < \psi(C)/2 (< 1/2)$ megfelel (D'_N)-nek. $\square$

Tétel. (Doeblin ergodikus tétele, bizonyítás nélkül).
Ha valamely N-re áll (D_N), *akkor valamely* $q : X \times \mathcal{F} \to [0,1]$ *általánosított sztochasztikus mátrixszal*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^n(x,A) \to q(x,A) \qquad (A \in \mathcal{F}) \ .$$

Példák. 1) Véges állapottér. $X := \{x_1, \ldots, x_N\}$, $p(x_i, A) = \sum_{j:\, x_j \in A} \Pi_{ij}$.
(D_N) triviális $\varphi(A) := \#A/N$ és akármilyen $\varepsilon < 1/N$ mellett.

2) Magfüggvény. $p(x,A) = \int_{y\in A} K(x,y)\,\mu(dy)$, $0 \le K \in L^\infty(\mu,\mu)$.
$p(x,A) \le \|K\|_\infty \mu(A)$, $\Longrightarrow \varphi(A) := \mu(A)$, $\varepsilon := 1/[2\|K\|_\infty]$ megfelel.

3) Negatív példa: egységmátrix végtelen X indexhalmazon.
$\Pi_{xy} := \delta_{xy} = \big[1 \text{ ha } x = y,\ 0 \text{ egyébként}\big]$,
$p(x,A) = \sum_{y\in A} \delta_{xy} = 1_A(x)$.
Bármilyen φ-nél $\sup_x p(x,A) = 1$, ha $A \neq \emptyset$.

4) Negatív példa: bolyongás. $X = \mathbb{Z}^3$, $p(x,A) = \sum_{y\in A} \Pi_{xy}$ ahol
$\Pi_{xy} = \big[1/6 \text{ ha } \|x-y\|_1 = 1,\ 0 \text{ egyébként}\big]$.
$p(x,A) = \sum_{y\in A} \Pi_{xy} = \frac{1}{6}\#\big[A \cap \{y:\ \|x-y\|_1 = 1\}\big]$.
Mivel a $K_n := \{x:\ \|x - (3n,0,0)\|_1 = 1\}$ keresztek diszjunktak,
bármilyen φ-nél $\varphi(K_n) \to 0$, míg $p((3n,0,0),K_n) = 1$ $\forall\, n$.

Feltevés. Ettől kezdve N, φ, ε fix, és (D_N) teljesül.
Feltesszük továbbá, hogy a

$$p_0^{(n)} : (x,y) \mapsto dp^N(x,dy)/\varphi(dy)$$

Radon–Nikodým-deriváltak mind $(\mathcal{F},\mathcal{F})$-mérhetők, sőt egy (szintén rögzített) $Z \subset X^2$ $\varphi^{(2)}$-nullhalmazzal

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} &p^n(x,A) = \int_{y\in A} p_0^{(n)}(x,y)\,\varphi(dy) \quad \text{ha } A \subset X \setminus Z_x,\ x \in X; \\ &\text{ahol} \quad Z_x := \big\{z \in X:\ (x.z) \in Z\big\} \quad (x \in X)\ . \end{aligned}$$

Jelölés. $\mathcal{F}_+ := \{A \in \mathcal{F}:\ \varphi(A) > 0\}$, $\quad \mathcal{F}_0 := \{A \in \mathcal{F}:\ \varphi(A) = 0\}$.

Propozíció. (Fő technikai lemma). (D_N)+(Σ) $\Longrightarrow$

$$(*) \qquad \exists\, A, B \in \mathcal{F}_+ \qquad \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} p_0^{(2N)}(x,y) > 0$$

Bizonyítás. Később, a fejezet végén (függetlenül a többi résztől).

Definíció. Az $A{\in}\mathcal{F}$ állapothalmazból $B{\in}\mathcal{F}$ *φ-elérhető* a $q: X{\times}\mathcal{F}{\to}[0,1]$ általánosított sztochasztikus mátrixszal

$$A \succ^q B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \alpha{>}0 \;\; \forall\, a{\in}A \quad q(a,B) \geq \alpha \; .$$

Az $A \in \mathcal{F}$ állapothalmazból *φ-erősen elérhető* $B \in \mathcal{F}$ a $q: X{\times}\mathcal{F} \to [0,1]$ általánosított sztochasztikus mátrixszal

$$A \succ\!\!\succ^q B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda{>}0 \;\; \forall\, a{\in}A \;\; \forall\, B' \subset_{\mathcal{F}} B \quad q(a,B') \geq \lambda\, \varphi(B') \; .$$

Propozíció. (Második technikai lemma). *Legyen $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, legyenek $q_1, q_2 : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ általánosított mátrixok. Ekkor a $\succ^q_1 := \succ^q$, $\succ^q_2 := \succ\!\!\succ^q$ erősorrend-jelöléssel*

$$A_0 \succ^{q_1}_j A_1 \succ^{q_2}_k A_2 \implies A_0 \succ^{q_1 \bullet q_2}_k A_2 \; , \quad \text{ha} \;\; j \leq k \; .$$

Bizonyítás. Észrevétel: $A \succ\!\!\succ^q B \Longrightarrow A \succ^q B$. Ezért elegendő belátni: (a) $A_0{\succ^{q_1}}A_1{\succ^{q_2}}A_2 \Rightarrow A_0{\succ^{q_1 \bullet q_2}}A_2$; (b) $A_0{\succ^{q_1}}A_1{\succ\!\!\succ^{q_2}}A_2 \Rightarrow A_0{\succ\!\!\succ^{q_1 \bullet q_2}}A_2$. Ez közösen is megtehető. Tegyük fel, hogy $q_1(a_0, A_1) \geq \alpha \;\; \forall\, a_0 \in A_0$, továbbá $q_2(a_1, B) \geq \kappa(B) \;\; \forall\, a_1 \in A_1 \;\; B \subset_{\mathcal{F}} A_2$, ahol az (a) esetben $\kappa(B) := \big[\lambda, \text{ ha } B = A_2,\ 0 \text{ ha } B \neq A_2\big]$, a (b) esetben $\kappa(B) := \lambda\, \varphi(B)$. Ezzel elég belátni, hogy $q_1 \bullet q_2(a_0, B) \geq \alpha\kappa(B) \;\; \forall\, a_0 {\in} A_0,\ B {\subset_{\mathcal{F}}} A_2$. Legyen $a_0 \in A_0$ és $B \subset_{\mathcal{F}} A_2$. Ekkor

$$q_1 \bullet q_2(a_0, B) = \int_{a_1 \in X} q_1(a_0, da_1)\, q_2(a_1, B) \geq \int_{a_1 \in A_1} q_1(a_0, da_1)\, \underbrace{q_2(a_1, B)}_{\geq \kappa(B)} \geq$$

$$\geq \int_{a_1 \in A_1} q_1(a_0, da_1) \kappa(B) = q_1(a_0, A_1) \kappa(B) \geq \alpha_1 \kappa(B) \; . \quad \square$$

Következmény. $A_0 \succ^{q_1}_{j_1} A_1 \succ^{q_2}_{j_2} \cdots \succ^{q_n}_{j_n} A_n \Longrightarrow A_0 \succ^{q_1 \bullet \cdots \bullet q_n}_{j_n} A_n$, *ha* $1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq 2$.

Emlékeztető. Ha egy stacionárius átmenetű Markov-láncban minden állapotból minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel, akkor annak $\Pi^{(0, M+rn)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ átmeneti mátrixai valamilyen $r > 0$ periódussal és $0 \leq M < r$ kezdettel egy r-rangú projekcióhoz konvergálnak.

Definíció. A $\big[p^n\big]_{n=1}^{\infty}$ sorozatra tejesül a (φ mérték szerinti) *elérhetőségi axióma*, ha

(E) $$\forall\, x {\in} X \;\; \forall\, A \in \mathcal{F}_+ \;\; \exists\, n_{x,A} \in \mathbb{N} \qquad p^{n_{x,A}}(x, A) > 0 \; .$$

Lemma. (D_N)+$(E) \Longrightarrow$ *az* $s_L := \sum_{\ell=1}^{L} p^\ell$ *részletösszegekre*

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_+ \;\; \exists\, L_A \in \mathbb{N} \qquad \inf_{x \in X} s_L(x, A) > 0 \; .$$

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{F}$ tetszőlegesen adott. Az (E) feltevés miatt $\lim_{L\to\infty} s_L(x,A) > 0 \;\; \forall x \in X$. Vagyis

$$E_L \nearrow X \quad (L \to \infty), \quad \text{ahol} \quad E_L := \big\{x \in X : s_L(x,A) \geq 1/L\big\} \ .$$

Azaz $\varphi(E_L) \nearrow \varphi(X) = 1$. Így vehető olyan L, amelyre a (D_N)-nel ekvivalens (D'_N) miatt

$$\varphi(E_L) \geq 1 - \varepsilon \ , \quad p^N(x, E_L) > \varepsilon \quad \forall x \in X \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} p^N \bullet s_L(x,A) &= \int_{z\in X} p^N(x,dz) s_L(z,A) \geq \\ &\geq \int_{z\in E_L} p^N(x,dz) \underbrace{s_L(z,A)}_{\geq 1/L} \geq \\ &\geq p^N(x,E_L)/L \geq \varepsilon/L. \end{aligned}$$

Mivel $s_{N+L} = \sum_{\ell=1}^{N+L} p^\ell \geq \sum_{\ell=1}^{L} p^{(N+\ell)} = p^N \bullet s_L$, az $L_A := N + L$ választás megfelel. $\square$

Következmény. $(\mathrm{D}_N) + (\mathrm{E})$ *esetén*

$$(\mathrm{E}') \qquad \forall Y, A \in \mathcal{F}_+ \;\; \exists \ell \in \mathbb{N},\; Y' \in [Y \cap \mathcal{F}]_+ \qquad Y' \succ^{p^\ell} A \ .$$

Bizonyítás. A Lemma szerint $\{x : \max_{\ell=1}^{L} p^\ell(x,A) \geq 1/L^2\} \nearrow X$. Így $\forall Y, A \in \mathcal{F}_+ \;\; \exists \ell, \lambda > 0 \;\; \{x \in Y : \; p^\ell(x,A) \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_+$. $\square$

Tétel. $(\mathrm{D}_N) + (\Sigma) + (E) \implies$ *vannak olyan* $M, r \in \mathbb{N}$ *indexek, és van olyan* $\{X_0, \ldots, X_{r-1}\}$ *φ-partíciója az* X *állapottérnek**, *hogy* $\ell = 0, \ldots, r-1$ *mellett*

$$p^{nr}(x,A) \to \pi_\ell(A) \qquad (n \to \infty, \; \forall_\varphi x \in X_\ell \;\; \forall A \in \mathcal{F}),$$

ahol mindegyik π_ℓ *olyan valószínűségi mérték* X*-en, amelyre* $\pi(X_\ell) = 1$.

Bizonyítás. A fő technikai lemma alapján veszünk egy $(*)$ tulajdonságú $A, B \in \mathcal{F}_+$ halmazpárt. A $\succ$-relációkkal és a ρ^{p^n} helyetti ρ^n rövidítéssel $(*)$ interpretációja:

$$A \succ\!\!\succ^{2N} B \ .$$

Az (E') elérhetőségi tulajdonság miatt

$$\exists C \in [B \cap \mathcal{F}]_+ \;\; \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad C \succ^{m_0} A \ .$$

* Azaz $X = \bigcup_{k=0}^{r-1} X_k$, $X_i \in \mathcal{F}_+$, $X_i \cap X_j \in \mathcal{F}_0$ $(i,j = 0, \ldots, r-1)$.

Mivel $C \subset B$, triviálisan $A \ggcurly^{2N} C$ is. Tehát $C \succ^m A \ggcurly^{2N} C$, ahonnan $C \ggcurly^{m_0+2N} C$. Azaz $N^* := m_0 + 2N$ mellett

$$C \ggcurly^{N^*} C \ , \qquad \text{sőt} \quad C \ggcurly^{N^*} C' \ggcurly^{N^*} C \quad \forall C' \in [C \cap \mathcal{F}]_+ \ .$$

Legyen

$$\mathcal{N} := \{ n \in \mathbb{N} : \ C \succ^n C \}$$

Tudjuk: $N^* \in \mathcal{N}$, és $m, n \in \mathcal{N} \Rightarrow C \succ^m C \succ^n C \Rightarrow C \succ^{m+n} C \Rightarrow m+n \in \mathcal{N}$. Tehát $(\mathcal{N}, +)$ részfélcsoportja $(\mathbb{N}, +)$-nak, és így valamely $M \in \mathcal{N}$ mellett

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cup \{ M + nr : \ n = 0, 1, \dots \}, \text{ ahol } \mathcal{N}_0 < M, \ r = \mathrm{lnko}(\mathcal{N}).$$

Definiáljuk:

$$X_\ell := \{ x \in X : \exists \, n \in \mathbb{N} \ \ \mathrm{mod}_r(n) = \ell, \ p^n(x, C) > 0 \} \quad (0 \le \ell < r) \ .$$

Állítás: 1) $\{X_0, \dots, X_{r-1}\}$ *φ-particiója X-nek,*
2) $\{x \in X_k : \ p^n(x, X_\ell) > 0\} \in \mathcal{F}_0$ *ha* $\mathrm{mod}_r(\ell + n) \neq k$.

Bizonyítás. 1) (E) szerint $X = \{x : \ \exists \, n \in \mathbb{N} \ \ p^n(x, C) > 0\} = \bigcup_{\ell=1}^r X_\ell$. Legyen $0 \le k < \ell < r$. Az $X_{k,i} := \{x : \ p^{k+ir}(x, C) > 0\}$ halmazokkal $X_k \cap X_\ell = \bigcup_{i,j=0}^\infty X_{k,i} \cap X_{\ell,j}$. Ha $X_k \cap X_\ell \in \mathcal{F}_+$, akkor $\exists \, i, j \ \ X_{k,i} \cap X_{\ell,j} \in \mathcal{F}_+$. Észrevétel: $\forall \, x \in X_{k,i} \cap X_{\ell,j} \quad p^{k+ir}(x, C) > 0$. Hasonlóan $\forall \, x \in X_{k,i} \cap X_{\ell,j} \quad p^{\ell+jr}(x, C) > 0$. Ezért van olyan $\lambda > 0$, amelynél az $F := \{x \in X_{k,i} \cap X_{\ell,j} : \ p^{k+ir}(x, C), p^{\ell+jr}(x, C) > \lambda\}$ halmaz φ szerint > 0 mértékű, vagyis $F \succ^{k+ir} C$ és $F \succ^{\ell+jr} C$. Ehhez $\exists \, C' \in [C \cap \mathcal{F}]_+$ $\exists \, m \ \ C' \succ^m F$. Azonban ekkor $C \succ^{N^*} C' \succ^m F \succ^{k+ir} C$, ahonnan $C \succ^{N^*+m+k+ir} C$, azaz $N^* + m + k + ir \in \mathcal{N}$ következik. Ugyanígy $N^* + m + \ell + jr \in \mathcal{N}$. Csakhogy ezzel az $r = \mathrm{lnko}(\mathcal{N}) \, \big| \, \ell - k < r$ ellentmondásra jutunk.

2) Tegyük fel, hogy $\{x \in X_x : \ p^n(x, X_\ell) > 0\} \in \mathcal{F}_+$. Ekkor $\exists \, i, j$ $\exists \, A \in [X_{k,i} \cap \mathcal{F}]_+ \ \ A \succ^n X_{\ell,j}$. Másrészt (E$'$) szerint $\exists \, m \ \ \exists \, C' \in [C \cap \mathcal{F}]_+$ $C' \succ^m A$. Ekkor

$$C \succ^{N^*} C' \succ^m A \succ^{k+ir} C, \qquad C \succ^{N^*} C' \succ^m A \succ^n X_{\ell,j} \succ^{\ell+jr} C \ .$$

Eszerint $r \big| N^* + m + k + ir$ és $r \big| N^* + m + n + \ell + jr$, ahonnan $r \big| n + \ell - k$.

A Tétel bizonyításának befejezése.
Tekintsünk egy tetszőlegesen rögzített $\ell \in \{1, \dots, r\}$ indexet. Legyen

$$X_\ell^0 := X_\ell \setminus \bigcup_{\substack{k: \ k \neq \ell \\ n: \ k \neq \mathrm{mod}_r(\ell+n)}} \{x \in X_\ell : \ p^n(x, X_k) > 0\} \ , \quad p_\ell := p^r \big| X_\ell^0 \times [X_\ell^0 \cap \mathcal{F}] \ .$$

Állítás $\Longrightarrow \quad X_\ell^0 = X_\ell \setminus [\varphi\text{-nullhalmaz}]$ és $p_\ell(x, X_\ell^0) = 1 \ \ \forall \, x \in X_\ell^0$.

Észrevétel: p_ℓ teljesíti a $\mathrm{D}_N + (\Sigma) + (\mathrm{E})$ feltételeket X^0_ℓ-on. Hozzá is van $C_\ell \in [X^0_\ell \cap \mathcal{F}]_+$ ill. $N_\ell, r_\ell \in \mathbb{N}$, hogy $C_\ell \ggcurly^{2N_\ell} C' \ggcurly^{2N_\ell} C_\ell$ $(C' \subset C_\ell)$, és az $\mathcal{N}_\ell := \{n \in \mathbb{N} : C_\ell \succ^{p^n_\ell} C_\ell\}$ halmaz valahonnantól egy r_ℓ differenciájú számtani sorozat.

Megmutatjuk, hogy $r_\ell = 1$ lehet csak. Mivel $p_\ell = p^r | X^0_\ell$, ez rögtön adódik onnan, hogy $\mathcal{M} := \{n \in \mathbb{N} : C_\ell \succ^n C_\ell\}$ valahonnantól r differenciájú számtani sorozat [azaz lnko$(\mathcal{M} = r = $lnko$(\mathcal{N})$]. Ugyanis (E′) szerint vannak olyan $A \in [C \cap \mathcal{F}]_+, B \in [C_\ell \cap \mathcal{F}]_+$ halmazok, amelyekre $C \succ^{N^*} A \succ^m B \succ^{2N_\ell} C_\ell \succ^s C_\ell \succ^{2N_\ell} B \succ^n C \succ^t C$ valamilyen m, n és tetszőleges $s \in \mathcal{N}_\ell, t \in \mathcal{N}$ mellett. Innen pedig $m + n + s + t \in \mathcal{N}$ $(s \in \mathcal{N}_\ell), t \in \mathcal{N}$ következik. Ez csak úgy lehet, ha $\mathrm{lnko}(\mathcal{N}_\ell) \big| \mathrm{lnko}(\mathcal{N})$. Hasonlóan $\mathrm{lnko}(\mathcal{N}) \big| \mathrm{lnko}(\mathcal{N}_\ell)$.

Ezután a tételbeli π_ℓ mértékek létezése [X^0_ℓ helyén X-et, p_ℓ helyén p-t tekintve] az alábbi lemmából jön.

Lemma. *Ha* $(\mathrm{D}_N) + (\mathrm{E})$ *áll és* $C \in \mathcal{F}_+$ *egy olyan halmaz, amelyre* $\exists\, M \ \ \forall n \geq M \ \ C \succ^n C$, *akkor van olyan* $\pi : \mathcal{F} \to [0,1]$ *valószínűségi mérték, amelyre* $p^n(x, A) \to \pi(A)$ $(x, \in X,\ A \in \mathcal{F})$.

Bizonyítás. Mivel $C \ggcurly^{N^*} C$, a második technikai lemma szerint $C \ggcurly^{N^* + M + n} C$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Ezért van olyan $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > 0$ sorozat, hogy

$$\min_{k=0}^{n} p^{M+N^*+k}(x, A) \geq \lambda_n \varphi(A) \qquad (x \in C,\ A \in [C \cap \mathcal{F}],\ n \geq 0)\ .$$

Láttuk: van olyan $L_C \in \mathbb{N}$, amelyre $s_{L_C}(x, C) = \sum_{n=1}^{L_C} p^n(x, C) \geq \varepsilon / L_C$ bármely $x \in C$ állapotnál. Mivel egy összegben van átlagosnál nem rosszabb tag, minden $x \in C$ mellett van $n_x \in [0, L_C]$, amellyel

$$p^{n_x}(x, C) \geq \varepsilon / L_C^2 \qquad (x \in C)\ .$$

Következésképpen, ha $x \in C$, $A \in C \cap \mathcal{F}$, akkor

$$\begin{aligned} p^{M+N^*+L_C}(x, A) &\geq \int_{z \in C} p^{n_x}(x, dz) p^{M+N^*+(L_C - n_x)}(z, A) \geq \\ &\geq \int_{z \in C} p^{n_x}(x, dz) \lambda_{L_C - n_x} \varphi(A) = \\ &= \lambda_{L_C - n_x} p^{n_x}(x, C)\, \varphi(A) \geq \\ &\geq \lambda_{L_C}\, \varepsilon L_C^{-2}\, \varphi(A)\ . \end{aligned}$$

Vagyis a $\psi(A) := \left[\lambda_{L_C}\, \varepsilon L_C^{-2}\right] \varphi(A)$ $(A \in C \cap \mathcal{F})$ mértékkel (és N helyén $N + N^* + L_C$-vel) alkalmazhatjuk a 17. oldalon levő tételt. $\square$

A fő technikai lemma bizonyítása

Feltesszük, hogy $(\mathrm{D}_N)+(\Sigma)$ teljesül. Az $X^2(=X\times X)$ téren a φ-szerinti szorzatmértéket $\varphi^{(2)}$-vel fogjuk jelölni (tehát $\varphi^{(2)}(A{\times}B)=\varphi(A)\,\varphi(B)$). A kétváltozós $(\mathcal{F},\mathcal{F})$-mérhető $X^2\to\mathbb{R}_+$ függvényekre is használni fogjuk (az összetévesztés veszélye nélkül) a

$$u{\bullet}v\,(x,y):=\int_{z\in X}u(x,z)\,\varphi(dz)v(z,y)$$

jelölést. Ekkor $(*)$ bizonyítása a következő lépésekben történik.

1) Lemma. $\varphi^{(2)}$*-majdnem mindenütt* $p_0^{(m+n)}\geq p_0^{(n)}{\bullet}p_0^{(m)}\qquad(m,n\geq 1)$.

Bizonyítás. Általában is: ha $f\in L^\infty(\varphi)$. akkor

$$\int_{z\in X\setminus Z_x}p^m(x,dz)f(z)=\int_{z\in X}p_0^m(x,z)f(z)\ \varphi(dz)\ .$$

[Biz.: Az $f:=1_A$ esetekre ez igaz (Σ) szerint, innen lineáris kombinációkkal φ-lépcsős függvényekre, majd Lebesgue-tétellel $L^\infty(\varphi)$-re is.] Ezért ha $x\in X$ és $A\subset X\setminus Z_x$, akkor

$$\int_{z\in A}p_0^{m+n}(x,z)\ \varphi(dz)=p^{m+n}(x,A)\geq\int_{z\in X\setminus Z_x}p^m(x,dz)p^n(z,A)=$$
$$=\int_{z\in X}p_0^m(x,dz)p^n(z,A)\ \varphi(dz)=\int_{z\in X}p_0^m(x,z)\Big[\int_{y\in A}p_0^n(z,y)\ \varphi(dy)\Big]\varphi(dz)=$$
$$=\int_{y\in A}\Big[\int_{z\in X}p_0^m(x,z)p_0^n(z,y)\ \varphi(dz)\Big]\varphi(dy)=\int_{y\in A}p_0^{(m)}\bullet p_0^{(m)}(x,y)\varphi(dy).\square$$

2) Észrevétel: $A,B,E\in\mathcal{F}_+$, esetén $1_{A\times E}\bullet 1_{E\times B}=\varphi(E)^2 1_{A\times B}$. Sőt, ha $H_1\subset A\times E$, $H_2\subset E\times B$ olyan halmazok, hogy az összes $A'_x:=\{z\in E:\ (x,z)\in H_1\}$, $B'_y:=\{z\in E:\ (z,y)\in H_2\}$ szeletekre $\varphi(A_z),\varphi(B_z)\geq(1-\delta)\varphi(E)$ valamely $0<\delta<1/2$ mellett, akkor

$$\begin{aligned}1_{H_1}\bullet 1_{H_2}(x,y)&=\int_{z\in E}1_{H_1}(x,z)1_{H_2}(z,y)\,\varphi(dz)=\\&=\int_{z\in E}\underbrace{\varphi(A'_x\cap B'_y)}_{\geq(1-2\delta)\,\varphi(E)}\ \varphi(dz)\geq\\&\geq\ (1-2\delta)\ \varphi(E)^2\ .\end{aligned}$$

3) Ettől kezdve a (D_N)-beli $\varepsilon \in (0,1)$ mellett, továbbá a (Σ)-beli $p_0^{(N)}$ Radon–Nikodým deriválttal és $Z \subset X^2$ halmaz $Z_x := \{z : (x,z) \in Z\}$ szeleteivel legyen

$$\begin{aligned} &H := \left\{(x,y) \in X^2 : \ p_0^{(N)}(x,y) \geq \varepsilon\right\} , \\ &A_z := \{x : (x,z) \in H\} , \\ &B_z := \{y : (z,y) \in H\} ; \\ &X_0 := \{x \in X : \ \varphi(Z_x) = 0\} . \end{aligned}$$

Mivel a Radon–Nikodým-deriváltak egy null-halmazon teszőlegesen változtathatók, 1) alapján vehetjük, hogy mindenütt $p_0^{(m+n)} \geq p_0^{(m)} \bullet p_0^{(n)}$.

Lemma. (A Doeblin-feltétel használata). $\varphi(A_x) > 0 \ \ \forall x \in X_0$.

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy $x \in X_0$ és $\varphi(A_x) = 0$. Ekkor $\varphi(A_x \cup Z_x) = 0$. Vagyis (D_N) miatt $p^N\big(x, A_x \cup Z_x\big) \leq 1 - \varepsilon$. Másrészt $p_0^{(N)}(x,y) < \varepsilon \ \forall_\varphi y \in X$. Így $p^N\big(x, X \setminus [A_x \cup Z_x]\big) \leq \int_{z \in X} p_0^{(N)}(x,z)\, \varphi(dz) < \varepsilon$. Ez az

$$1 = p^N\big(x, A_x \cup Z_x\big) + p^N\big(x, X \setminus [A_x \cup Z_x]\big) < (1-\varepsilon) + \varepsilon = 1$$

ellentmondáshoz vezet.

4) Emlékeztető. (H Lebesgue-pontjai $\mathcal{F}$-téglalapok szerint).
Az $\mathcal{F}$-téglalapok családja szerinti véges lépcsős függvények

$$\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i 1_{A_i \times B_i} : \gamma_i \in \mathbb{R},\ A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n \text{ diszjunkt} \in \mathcal{F}^2 \Big\}$$

tere sűrű $L^2(\varphi^{(2)})$-ben. Ezért van olyan $h_n = \sum_{i=1}^{d_n} \gamma_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)} \times B_i^{(n)}} \in \mathcal{T}$ sorozat, amelyre $\|h_n - 1_H\|_2 \leq 1/2^n$. Az általánosság megszorítása nélkül vehető, hogy az $\big\{A_i^{(n)} \times B_i^{(n)} : \ i = 1, \ldots, d_n\big\}$ halmazcsaládok X^2-nek egyre finomodó $\big\{A_i^{(n)} \times A_j^{(n)} : \ i,j = 1, \ldots, d_n\big\}$ alakú particiói. Tudjuk: az átlagolás javítja az L^2-beli közelítést. Tehát

$$\begin{aligned} &\|\widehat{h}_n - 1_H\|_2 \leq 1/2^n \quad (n = 1, 2, \ldots), \text{ ahol} \\ &\widehat{h}_n := \sum_{i,j=1}^{d_n} \widehat{\gamma}_{ij}^{(n)} 1_{A_i^{(n)} \times A_j^{(n)}} , \qquad \widehat{\gamma}_{ij}^{(n)} := \frac{\varphi^{(2)}\big(H \cap \big[A_i^{(n)} \times A_j^{(n)}\big]\big)}{\varphi\big(A_i^{(n)}\big)\varphi\big(A_j^{(n)}\big)} . \end{aligned}$$

A Riesz–Weyl-lemma szerint $\widehat{h}_n(x,y) \to 1_H(x,y) \quad \forall_{\varphi^{(2)}} (x,y) \in X^2$.

5) Lemma. *Van olyan* $A, B \in \mathcal{F}_+$, *amelyekre* $\inf p_0^{(2N)}(A, B) > 0$.

Bizonyítás. Az előzőek szerint a

$$H_0 := \{(x, y) \in H : \widehat{h}_n(x, y) \to 1 \ (n \to \infty)\}$$

halmaz csak egy $\varphi^{(2)}$-nullhalmazban különbözik H-tól. Másrészt $\varphi(X_0) = \varphi^{(2)}(X_0^2) = 1$, mivel $\varphi^{(2)}(Z) = 0$. Ezért az

$$X_1 := \{x \in X_0 : \ \varphi\{z\colon (x, z) \in H \setminus H_0\} = 0\}$$

halmazra is $\varphi(X_1) = \varphi^{(2)}(X_1^2) = 1$. Tehát a 3)-beli Lemma alapján $\varphi^{(2)}(H_0 \cap X_1^2) > 0$. Vegyünk egy tetszőleges $(x_0, z_0) \in H_0 \cap X_0^2$ alakú pontot. Mivel $z_0 \in X_0$, szintén a 3)-beli Lemma szerint $A_{z_0} \neq \emptyset$. Azaz *rögzíthetünk egy*

$$(x_0, z_0), (z_0, y_0) \in H_0 \cap X_1^2$$

alakú H-beli $\mathcal{T}$-Lebesgue-pontpárt. Valamilyen n indexre

$$\widehat{h}_n(x_0, z_0), \widehat{h}_n(z_0, y_0) > 1 - (1/3).$$

Ekkor valamilyen $i, j, k \in \{1, \ldots, d_n\}$ indexek mellett

$$x_0 \in A_i^{(n)}, \quad z_0 \in A_j^{(n)}, \quad y_0 \in A_k^{(n)},$$
$$\frac{\varphi^{(2)}(H \cap [A_i^{(n)} \times A_j^{(n)}])}{\varphi(A_i^{(n)})\, \varphi(A_j^{(n)})}, \frac{\varphi^{(2)}(H \cap [A_j^{(n)} \times A_k^{(n)}])}{\varphi(A_j^{(n)})\, \varphi(A_k^{(n)})} > 1 - (1/3) .$$

Metszetek integráljaként

$$\varphi^{(2)}(H \cap [A_i^{(n)} \times A_j^{(n)}]) = \int_{x \in A_i^{(n)}} \varphi\{z \in A_j^{(n)} : \ (x, z) \in H\}\, \varphi(dx) =$$
$$> [1 - (1/3)]\, \varphi(A_i^{(n)})\, \varphi(A_j^{(n)}) .$$

Ez csak úgy lehet, ha itt az $x \mapsto \varphi\{z \in A_j^{(n)} : \ (x, z) \in H\}$ integrandusz $> [1 - (1/3)]\varphi(A_j^{(n)})$ egy φ szerint pozitív mértékű halmazon. Vagyis van olyan $A \in [A_i^{(n)} \cap \mathcal{F}]_+$ halmaz, amelyre

$$\varphi\Big\{z \in A_j^{(n)} : \ (x, z) \in H \cap [A \times A_j^{(n)}]\Big\} > [1 - (1/3)]\varphi\big(A_j^{(n)}\big) \quad (x \in A).$$

Hasonlóan van olyan $B \in [A_k^{(n)} \cap \mathcal{F}]_+$ halmaz, amelyre

$$\varphi\Big\{z \in A_k^{(n)} : \ (z, y) \in H \cap [A_j^{(n)} \times B]\Big\} > [1 - (1/3)]\varphi\big(A_j^{(n)}\big) \quad (x \in A).$$

Észrevétel: az $E := A_j^{(n)}$, $H_1 := H \cap [A \times E]$, $H_2 := H \cap [E \times B]$, $\delta := 1/3$ esetre alkalmazva a 2)-beli észrevételt, kapjuk, hogy

$$p_0^{(2N)}(x, y) \geq [\varepsilon 1_{H_1}] \bullet [\varepsilon 1_{H_2}](x, y) \geq \frac{\varepsilon^2}{3} \varphi(E)^2 \quad (x \in A, \ y \in B). \square$$

KONTRAKCIÓ-FÉLCSOPORT LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA

E fejezetben $\big(\mathcal{L}, \|.\|\big)$ valós Banach tér (komplexet is valósnak tekintve).
$L(\mathcal{L}) := \big\{$korlátos lineáris $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$-operátorok$\big\}$,

$\|A\| := \sup_{\|f\|=1} \|Af\|$ az *operátor-norma* $L(\mathcal{L})$-en,

$A_i \xrightarrow{\text{st}} A$ konvergencia az *erős* topológiában: $\forall f \in \mathcal{L} \quad A_i f \to Af$.

$\big[U^t : t \in \mathbb{R}_+\big]$ rögzített *erősen folytonos* kontrakció-félcsoport $\mathcal{L}$-en:

$$U^t \in L(\mathcal{L}), \quad \|U^t\| \le 1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$
$$U^{t+s} = U^t U^s \quad (s, t \ge 0), \quad U_0 = I \ ,$$
$$t \mapsto U^t f \ \text{ folytonos } \ \forall f \in \mathcal{L} \ .$$

Definíció. Tetszőleges korlátos lineáris $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ operátor mellett

$$\exp(tA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \qquad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Megjegyzés. 1) $\exp(tA)$ invertálható: $\big[\exp(tA)\big]^{-1} = \exp(-tA)$.
2) Általában is $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$, ha $AB = BA$.
3) Az $A \mapsto \exp(A)$ leképezés folytonos az operátor-norma topológiában.

Elemi észrevételek. Az $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ esetben szükségképpen

$$U^t = \exp(ta) \ , \quad \text{ahol } \ a := \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(U^h - 1) \ , \ \ \mathrm{Re}\, a \le 0 \ ,$$

$$\lim_{h \searrow 0} \exp\Big(t \frac{U^h - 1}{h}\Big) = U^t \ .$$

Jelölés. $\quad U_h^t := \exp\Big(t \dfrac{U^h - 1}{h}\Big), \qquad p_n^{(\lambda)} := e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}.$

Lemma. *Az U_h^t operátorok kontrakciók, mivel a $p_n^{(\lambda)}$ Poisson súlyokkal*

$$U_h^t = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} U^{nh} \ .$$

Bizonyítás. Tetszőleges $t \ge 0$ mellett

$$\exp\Big(t \frac{U^h - I}{h}\Big) = \exp\Big(\Big[\frac{t}{h} U^h\Big] + \Big[-\frac{t}{h} I\Big]\Big) = \exp\Big(-\frac{t}{h} I\Big) \exp\Big(\frac{t}{h} U^h\Big) =$$
$$= e^{-t/h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/h)^n}{n!} [U^h]^n = e^{-t/h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/h)^n}{n!} U^{nh} \ . \quad \square$$

Tétel. $f \in \mathcal{L}, \implies U_h^t f \to U^t f \quad (h \to 0,\ t \geq 0).$

Bizonyítás. Legyen az $f \in \mathcal{L}$ vektor tetszőlegesen adott. Feltevés szerint a $t \mapsto U^t f$ függvény folytonos. Ezért véges zárt intervallumokon egyenletesen is folytonos, és a

$$\rho(t) := \sup_{0 \leq x \leq t} \|U^t f - f\|$$

folytonossági modulusra $\rho(t) \searrow 0 \quad (t \searrow 0)$. Mivel

$$U_h^t f - U^t f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} U^{nh} f - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)}}_{1} U^t f =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} [U^{nh} f - U^t f] \ ,$$

ahol

$$U^{nh} f - U^t f = \begin{cases} U^t [U^{nh-t} f - f] & (nh \geq t) \\ -\underbrace{U^{nh}}_{\|\cdot\| \leq 1} [U^{t-nh} f - f] & (nh \leq t) \end{cases} ,$$

a következőképpen becsülhetünk ρ-val

$$\begin{aligned} \|U_h^t f - U^t f\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{nh} f - U^t f\| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{|t-nh|} f - f\| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \rho\big(|t - nh|\big) \ . \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ehhez vehető $\delta > 0$, amelyre $\rho(x) \leq \varepsilon \ \ (0 \leq x \leq \delta)$. Ezzel

$$\begin{aligned} \|U_h^t f - U^t f\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \rho(|t - nh|) \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{n: |t-nh| \leq \delta} p_n^{(t/h)} + 2 \sum_{n: |t-nh| > \delta} p_n^{(t/h)} \leq \\ &\leq \varepsilon + 2 \sum_{n: |t/h - n| > \delta/h} p_n^{(t/h)} \ . \end{aligned}$$

Itt egy $\lambda := t/h$ paraméterű Poisson-eloszlású ξ valószínűségi változóval

$$\sum_{n:|t/h-n|>\delta/h} p_n^{(t/h)} = \mathbf{P}\big(|\xi - t/h| > \delta/h\big) \le$$
$$\le \frac{\mathbf{D}(\xi)^2}{(\delta/h)^2} = \frac{t/h}{(\delta/h)^2} = \frac{t}{\delta^2} h \ .$$

Vagyis $\|U_h^t f - U^t f\| \le 3\varepsilon$, valahányszor $(t/\delta^2)h < \varepsilon$, azaz ha $h < \delta^2\varepsilon/t$. Tehát rögzített $t > 0$ paraméter mellett $h \searrow 0$ esetén $\|U_h^t f - U^t f\| \to 0$.
$\square$

Megjegyzés. A Tétel bizonyítását kicsit módosítva, az $U^t := e^{-Mt}V^t$ kontrakciókkal belátható a következő.
Ha $\big[V^t \ : \ t \ge 0\big]$ *olyan erősen folytonos egy-paraméteres félcsoport* $L(\mathcal{L})$*-beli operátorokból, amelyekre* $\exists\, \tau, M > 0 \quad \forall\, t > \tau \quad \|V^t\| \le e^{Mt}$*, akkor* $V^t = \lim\limits_{h\searrow 0} \exp\Big(\dfrac{t}{h}[V^h - I]\Big) f \quad (t \ge 0)$.

Definíció. Legyen $t \mapsto f_t$ egy szakaszonként folytonos $(0, \infty) \to \mathcal{L}$ függvény, amelyre, $\int_0^\infty \|f_t\| \ dt < \infty$. Ennek a *Laplace-transzformáltja*

$$\big[t \mapsto f_t\big]^\wedge := \Big[(0, \infty) \ni \lambda \mapsto \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f_t \ dt\Big] \ .$$

Példa. Véges dimenzóban $\mathcal{L} := \mathbb{C}^N$, $\|f\| := \big[\sum_{k=1}^N |f_k|^2\big]^{1/2}$ esetén az $U^t := \exp(tA)$ $(t \ge 0)$ mátrixok erősen folytonos kontrakció-félcsoportot alkotnak, ha $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ és $\mathrm{Re}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\alpha_N \le 0$. Ekkor

$$\big[t \mapsto U^t\big]^\wedge = \big[\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}\big] \ , \quad A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U^t \ ,$$

mivel $\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\alpha_k t} dt = 1/(\lambda - \alpha_k)$ és $\alpha_k = d/dt\big|_{t=0} e^{\alpha t}$. Tehát ekkor az $[U^t \ : \ t > 0]$ félcsoport generátora a $d/dt\big|_{t=0} U^t$ derivált, a Laplace-transzformáltja pedig az A generátor *rezolvenseiből* áll.

Megjegyzés. Ha $t \mapsto f_t$ olyan szakaszonként folytonos $(0, \infty) \to \mathcal{L}$ függvény, amelyre $\int\limits_0^\infty \|f_t\| \ dt < \infty$, akkor az

$$\int_0^\infty f_t \ dt := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty f_{t_{nk}} \ ,$$

ahol $t_{nk} \in \big\{[(k-1)/n, k/n] \ni t \mapsto \|f_t\| \text{ min-helyei}\big\}$

formula jól-definiált. Ebben az általánosságban is érvényes a Newton–Leibniz-tétel: *ha az* $F : (0, a) \ni t \mapsto F_t \in \mathcal{L}$ *függvény folytonosan differenciálható, akkor*

$$F_\beta - F_\alpha = \int_\alpha^\beta \Big[\frac{d}{dt}F_t\Big]dt \qquad (0 < \alpha < \beta < a) ,$$

ahol $dF_t/dt := \lim_{h\to 0} h^{-1}\big[F_{t+h} - F_t\big]$ *és* $\int_\alpha^\beta g_t\ dt := \int_0^\infty 1_{[\alpha,\beta]}(t)\, g\ dt.$

Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $B \in L(\mathcal{L})$ *operátorra*

$$\|\exp(tB)\| \le 1 \qquad (t \ge 0) .$$

Ekkor
1) $B - \lambda I$ *invertálható minden* $\lambda > 0$ *mellett;*
2) $\big[t \mapsto (\exp tB)f\big]^\wedge = \big[\lambda \mapsto (\lambda I - B)^{-1} f\big]$ *minden* $f \in \mathcal{L}$ *mellett.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{L}$ rögzítve. Mivel a $t \mapsto \exp(tB)f$ függvény folytonos és korlátos, az $\int\limits_0^\infty e^{-t\lambda}(\exp tB)f$ Laplace-transzformált jól-definiált minden $\lambda > 0$ mellett. Ekkor

$$\begin{aligned}
(B-\lambda I)\int_0^\infty & e^{-t\lambda}(\exp tB)f\ dt = \\
&= \int_0^\infty (B - \lambda I)\exp(tB - t\lambda I)\ f\ dt = \\
&= \int_0^\infty \Big[\frac{d}{dt}\exp\big[t(B - \lambda I)\big]f\Big]\ dt = \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\int_{1/\tau}^\tau \Big[\frac{d}{dt}\exp\big[t(B - \lambda I)\big]f\Big]\ dt = \\
&= \lim_{t\to\infty}\Big[\exp\big[t(B - \lambda I)\big]f - \exp\big[t^{-1}(B - \lambda)\big]f\Big] = \\
&= \big[0 - I\big]f = -f .
\end{aligned}$$

Hasonlóan $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t\lambda}\exp(tB)(B - \lambda I)f\ dt\ =\ -f.$ □

Jelölés. Ettől kezdve

$$A_h := \frac{1}{h}[U^h - I], \quad R_h(\lambda) := (\lambda I - A_h)^{-1} \qquad (\lambda, h > 0) .$$

A Tétel szerint ezen operátorok jól-definiáltak, és a rezolvensekre

$$R_h(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U_h^t\ dt \qquad (\lambda, h > 0) .$$

Ezzel motiválva bevezetjük a következő jelölést is:

$$R(\lambda)f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f \, dt \qquad (\lambda > 0,\ f \in \mathcal{L}) \ .$$

Megjegyzés. Mindegyik $R(\lambda)$ λ^{-1}-kontrakció, mivel

$$\big\|R(\lambda)f\big\| \le \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \|U^t f\| \, dt \le \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \|f\| \, dt = \frac{1}{\lambda}\|f\| \ .$$

Kérdés. $\exists ?\ A \in L(\mathcal{L}) \qquad A_h \xrightarrow{\text{st}} A \ \ (h \searrow 0)$ és $R(\lambda) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$.

Példa. További feltételek nélkül általában NEM:

$$\mathcal{L} := C_0\big([0,\infty)\big), \qquad U^t f : x \mapsto f(x+t)$$

esetén $\big[U^t :\ t \ge 0\big]$ erősen folytonos operátor-félcsoport. Ennél azonban $A_h f(x) = \frac{f(x+h)-f}{h} \to f'$ $(h \searrow 0)$ volna. Csakhogy vannak nem-differenciálható függvények $\mathcal{L}$-ben. Az $\mathcal{L}' := \{f \in \mathcal{L} :\ f' \text{ létezik}\}$ altéren az $Af = \lim_{h\searrow 0} A_h f = f'$ operátor már *nem korlátos.*

Jelölés. Ettől kezdve

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}' := \big\{f \in \mathcal{L} :\ \exists g \in \mathcal{L} \ \ A_h f \to g \ \ (h \to 0)\big\} \ , \\ &Af := \lim_{h \searrow 0} A_h f \qquad (f \in \mathcal{L}') \ . \end{aligned}$$

Propozíció. $(\lambda I - A_h) R(\lambda) f \to f \quad (h \searrow 0,\ \lambda > 0,\ f \in \mathcal{L})$.

Bizonyítás. Akármilyen $f \in \mathcal{L}$ mellett, rögzített $\lambda > 0$ és $h \searrow 0$ esetén

$$\begin{aligned} A_h R(\lambda) f &= \int_0^\infty h^{-1}(U^h - I) e^{-\lambda t} U^t f \, dt = \\ &= h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^{t+h} f \, dt - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f \, dt = \\ &= h^{-1}\, e^{\lambda h} \int_{s=h}^\infty e^{-\lambda s} U^s f \, ds - h^{-1} \int_{s=0}^\infty e^{-\lambda s} U^s f \, ds = \\ &= \underbrace{\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}}_{\to \lambda} \int_{s=0}^\infty e^{-\lambda s} U^s f \, ds - \frac{1}{h} \int_{s=0}^h \underbrace{e^{-\lambda s} U^s f}_{\to f} \, ds \ \to \\ &\longrightarrow \lambda R(\lambda) f - f \ . \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} (\lambda I - A_h) R(\lambda) f = \ &\lambda R(\lambda) f - A_h R(\lambda) f \longrightarrow \\ &\to \lambda R(\lambda) f - [\lambda R(\lambda) f - f] = f \ . \quad \square \end{aligned}$$

Tétel 1) $\mathcal{L}'$ *sűrű altér* $\mathcal{L}$*-ben;* 2) $(\lambda - A)R(\lambda) = I \quad (\lambda > 0)$*;*
3) $R(\lambda) : \mathcal{L} \longleftrightarrow \mathcal{L}'$ *és* $R(\lambda)(\lambda I - A)f = f \quad (f \in \mathcal{L}',\ \lambda > 0)$.

Bizonyítás. A Propozíció bizonyítása szerint

$$A_h\big[R(\lambda)f\big] \to \lambda R(\lambda)f - f \qquad (h \searrow 0).$$

Következésképpen bármely $f \in \mathcal{L}$ mellett $R(\lambda)f \in \mathcal{L}'$, és $AR(\lambda)f = [\lambda R(\lambda) - I]f$, azaz 2) áll és $\mathrm{ran}R(\lambda) \subset \mathcal{L}'$. Mivel az $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ operátorcsalád kommutatív ($U^sU^t = U^{s+t} = U^tU^s$), a tagjaiból lineáris kombinációkkal és limesszel képzett $\{A_h, R_h(\lambda), R(\lambda), U^t : \lambda, h, t > 0\}$ $L(\mathcal{L})$-beli operátorcsalád is kommutatív. Speciálisan

(∗) $$R(\lambda)(\lambda I - A_h)f = (\lambda I - A_h)R(\lambda)f \to f \qquad (h \searrow 0,\ \lambda > 0,\ f \in \mathcal{L}).$$

Ez mutatja, hogy minden $f \in \mathcal{L}$ vektor tetszőlegesen megközelíthető $R(\lambda)g$ alakú vektorokkal, azaz $\mathrm{ran}R(\lambda)$ és ezzel $\mathcal{L}'$ sűrű $\mathcal{L}$-ben minden $\lambda > 0$ mellett. Másrészt $(*)$ szerint

$$R(\lambda)(\lambda I - A)f = \lim_{h \searrow 0} R(\lambda)(\lambda I - A_h)f = f \ , \quad \text{ha} \ \ f \in \mathcal{L}' \ .$$

Vagyis bármely λ esetén $R(\lambda)(\lambda I - A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}'}$ és $(\lambda I - A)R(\lambda) = I = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}$. Ennek jelentése: $R(\lambda) : \mathcal{L} \leftrightarrow \mathrm{ran}R(\lambda) = \mathcal{L}'$, amelynek inverze $\lambda I - A : \mathcal{L}' = \mathrm{ran}R(\lambda) \leftrightarrow \mathcal{L}$. □

Tétel. (Tauber-típusú tétel). $\lambda R(\lambda) \xrightarrow{\mathrm{st}} I \quad (\lambda \to \infty)$.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{L}$ tetszőlegesen adott. Vehető $\|f\| = 1$. Belátandó: $\big[\lambda R(\lambda) - I\big]f \to 0 \ \ (\lambda \to \infty)$. Észrevétel:

$$\lambda R(\lambda)f = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} U^t f \, dt = \int_0^\infty e^{-s} U^{s/\lambda} f \, ds \ ,$$

és itt $\int_0^\infty e^{-s} \, ds = 1$, $U^{s/\lambda}f \to U^0 f = f \quad (\lambda \to \infty,\ s \geq 0)$. Egy vektor-integrálokra való Lebesue-típusú tételből azonnal következhet az állítás. Ilyen sem szükséges azonban. Azonnal látható a definicióból: $\big\| \int_0^\infty g_s \, ds \big\| \leq \int_0^\infty \|g_s\| \, ds$ ha az $s \mapsto g_s (\in \mathcal{L})$ függvény folytonos. Ezért

$$\|\lambda R(\lambda f - f\| = \left\| \int_0^\infty e^{-s} \big[U^{s/\lambda} f - f\big] \, ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-s} \big\|U^{s/\lambda} f - f\big\| \, ds \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

a klasszikus Lebesgue-féle konvergenciatétel szerint, hiszen $2e^{-s} \geq e^{-s}\big\|U^{s/\lambda}f - f\big\| \to 0 \ \ (\lambda \to \infty)$ pontonként, a majoráló függvényre pedig $\int_0^\infty 2e^{-s} \, ds = 2 < \infty$. □

Összefoglalás. *Ha* $\mathcal{L}$ *Banach-tér és* $\left[U^t : \ t \geq 0\right]$ *erősen folytonos egyparaméteres kontrakció-félcsoport* $L(\mathcal{L})$*-ben, amelynél* $U^0 = I = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}$*, akkor*

1) $\left[U_h^t : \ t \geq 0\right]$ *norma-folytonos egyparaméteres félcsoport* $L(\mathcal{L})$*-ben,*
$U_h^t := \exp(tA_h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} U^{nh} \qquad (h > 0)$
ahol $A_h := h^{-1}(U^h - I), \quad p_n^{(t/h)} := e^{-h/n}\dfrac{h^n}{n!}$ *(Poisson-súlyok);*
2) $U_h^t \xrightarrow{\mathrm{st}} U^t \quad (h \searrow 0, \ t \geq 0)$*;*
3) *az* $R(\lambda) := \int\limits_0^\infty e^{-t\lambda} U^t \, dt$ *Laplace-transzformáltak* λ^{-1}*-kontrakciók;*
4) $\lambda R(\lambda) \xrightarrow{\mathrm{st}} I, \ 1 \geq \|\lambda R(\lambda)\| \to 1 \quad (\lambda \to \infty)$*;*
5) *az* $\mathcal{L}' := \left\{f \in \mathcal{L} : \ \exists g \in \mathcal{L} \ \ A_h f \to g \ (h \searrow 0)\right\}$ *altér sűrű* $\mathcal{L}$*-ben;*
6) *az* $Af := \lim\limits_{h \searrow 0} A_h f \quad (f \in \mathcal{L}')$ *nem-korlátos opeátor rezolvenseire*
$R(\lambda) : \mathcal{L} \longleftrightarrow \mathcal{L}', \quad (\lambda I - A)R(\lambda) = I \quad (\lambda > 0).$

Cél. Fordított elmélet, amely a rezolvensekből indul ki.

Lemma. *Ha* $C \in L(\mathcal{L})$ *és* $\|C\| \leq 1$*, akkor* $\big\| \exp[t(C - I)] \big\| \leq 1 \quad (t \geq 0)$*.*

Bizonyítás. A feltételek mellett

$$\big\| \exp[t(C-I)] \big\| = \left\| e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^n \right\| \leq e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\|C^n\|}_{\leq 1} \leq e^{-t} e^t = 1. \ \square$$

Tétel. (Hille–Yosida-tétel). *Legyen* $\mathcal{L}'$ *sűrű altér* $\mathcal{L}$*-ben, és legyen* $A : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ *egy nem-korlátos lineáris operátor. Tegyük fel hogy*

1) $\lambda I - A : \mathcal{L}' \longleftrightarrow \mathcal{L} \quad (\lambda > 0)$*;*
2) $R(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}$ $\frac{1}{\lambda}$*-kontrakció:* $\|(\lambda I - A)g\| \geq \lambda \|g\| \ \ (\lambda > 0, \ g \in \mathcal{L}')$*;*
3) $\lambda R(\lambda) \xrightarrow{\mathrm{st}} I, \ 1 \geq \|\lambda R(\lambda)\| \to 1 \quad (\lambda \to \infty)$.

Ekkor van olyan $\left[U^t : \ t \geq 0\right]$ *erősen folytonos kontrakció-félcsoport, amelynek generátora* A*, vagyis amelyre* $Ag = \lim_{h \searrow 0} h^{-1}(U^h - I)g$ *valahányszor* $g \in \mathcal{L}'$*,* $\mathcal{L}' := \{g \in \mathcal{L} : \ \exists f \in \mathcal{L} \ \ f = \lim_{h \searrow 0} h^{-1}(U^h - I)g\}$ *és teljesülnek az előző tétel* 1)+2) *állításai.*

Bizonyítás. Az 1)+2) feltevések miatt bármely $\lambda > 0$ mellett $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$, azaz $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$. Mivel 3) szerint a $\lambda R(\lambda)$ opeátorok kontrakciók, az

$$A_{[\lambda]} := A[\lambda R(\lambda)] \, , \quad U_{[\lambda]}^t := \exp\left(tA_{[\lambda]}\right) \qquad (\lambda > 0, \ t \geq 0)$$

operátorok jól-definiáltak $L(\mathcal{L})$-ben, sőt a Lemma alapján

$$\|U^t_{[\lambda]}\| \leq 1 \qquad (\lambda > 0,\ t \geq 0)\ .$$

Szintén 1)+2) miatt automatikusan fennáll

2′) $g = (\lambda I - A)R(\lambda)g = R(\lambda)(\lambda I - A)g \quad (g \in \mathcal{L}')$.

Állítás: az $\{U^t_{[\lambda]} :\ \lambda > 0,\ t \geq 0\}$ operátorcsalád kommutatív.
Bizonyítás. Elég csak az $A_{[\lambda]}A_{[\mu]} = A_{[\mu]}A_{[\lambda]}$ felcserélhetőségeket kimutatni. Mivel $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$,

$$A_{[\lambda]} = \lambda[\lambda R(\lambda) - I]\ ,$$

ehhez elegendők az $R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$ felcserélhetőségek. Ezek bizonyítása:

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda I - A)R(\mu)f &= R(\lambda)[(\lambda - \mu)I + (\mu I - A)]R(\mu)f = \\ &= (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)f + R(\lambda)f\ . \end{aligned}$$

Másrészt 2′)-ot a $g := R(\mu)f \in \mathcal{L}'$ vektorra alkalmazva

$$R(\lambda)(\lambda I - A)R(\mu)f = R(\mu)f\ .$$

A két egyeletből $0 = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)f + [R(\lambda) - R(\mu)]f$, azaz

$$R(\lambda)R(\mu)f = \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} f\ .$$

A $\lambda \leftrightarrow \mu$ cserével ugyanazt a jobb-oldalt kapjuk.
Ezután megmutatjuk: bármely rögzített $t \geq 0$ és $f \in \mathcal{L}$ mellett az

$$U^t f := \lim_{\lambda \to \infty} U^t_{[\lambda]} f$$

határérték létezik. Ehhez megmutatjuk, hogy

(∗∗) $$\left\|U^t_{[\lambda]}g - U^t_{[\mu]}g\right\| \to 0 \qquad (\lambda, \mu \to \infty,\ g \in \mathcal{L}')\ .$$

Ennek jelentése ugyanis az, hogy rögzített t-nél az $L_\lambda : \mathcal{L} \ni f \mapsto U^t_{[\lambda]}f$ $(\lambda > 0)$ kontrakcióknak van határértéke az $\mathcal{L}$ Banach térben sűrű $\mathcal{L}'$ altér pontjaiban $\lambda \to \infty$ mellett. A kondenzációs elv szerint (ld. a 2. oldal lábjegyzete) innen következik az L_λ függvények mindenütt való konvergenciája $\lambda \to \infty$-re, és ezzel az összes $U^t f$ $(f \in \mathcal{L})$ vektorok jól-definiáltsága.
(∗∗) bizonyítása. Tudjuk: bármely rögzített $\lambda > 0$ mellett $\left[U^t_{[\lambda]} :\ t \geq 0\right]$ norma-folytonos kontrakció-félcsoport $L(\mathcal{L})$-ben, és $U^0_{[\lambda]} = I$. Ezért az előző tételek szerint akármilyen (nemcsak $\mathcal{L}'$-beli) $f \in \mathcal{L}$ vektor esetén

$$U^t_{[\lambda]}f = \lim_{h \searrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} U^{nh}_{[\lambda]} f$$

írható a $p_n^{(t/h)} := e^{-t/h}(t/h)^n/n!$ Poisson-súlyokkal. Következésképpen

$$\|U^t_{[\lambda]} - U^t_{[\mu]} f\| \le \limsup_{h\searrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{nh}_{[\lambda]} f - U^{nh}_{[\mu]} f\|$$

Mivel $U^{nh}_{[\lambda]} = (U^h_{[\lambda]})^n$ és $U^{nh}_{[\mu]} = (U^h_{[\mu]})^n$ egymással felcserélhető kontrakciók, továbbá mivel

$$U^n - V^n = (U^{n-1} + U^{n-2}V + \ldots + V^{n-1})(U - V) \quad \text{ha } UV = VU \ ,$$

itt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{nh}_{[\lambda]} f - U^{nh}_{[\mu]} f\| \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{(n-1)h}_{[\lambda]} + U^{(n-2)h}_{[\lambda]} U^h_{[\mu]} + \cdots + U^{(n-1)h}_{\mu}\| \cdot \|U^h_{[\mu]} f - U^h_{[\mu]} f\| \le$$
$$\le \sum_{n=1} p_n^{(t/h)} n \|U^h_{[\lambda]} f - U^h_{[\mu]} f\| \ .$$

Emlékeztető: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n^{(t/h)} n = t/h$ egy t/h paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke. Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t/h)} \|U^{nh}_{[\lambda]} f - U^{nh}_{[\mu]} f\| \le \frac{t}{h} \|U^h_{[\lambda]} f - U^h_{[\mu]} f\| =$$
$$= t \left\| \frac{1}{h}(U^h_{[\lambda]} - I) f - \frac{1}{h}(U^h_{[\mu]} - I) f \right\| \ .$$

Vagyis minden $\lambda, \mu > 0$ és $t \ge 0$ mellett

$$\|U^t_{[\lambda]} f - U^t_{[\mu]} f\| \le \lim_{h\searrow 0} t \left\| \frac{1}{h}(U^h_{[\lambda]} - I) f - \frac{1}{h}(U^h_{[\mu]} - I) f \right\| =$$
$$= t \, \|A_{[\lambda]} f - A_{[\mu]} f\| \ .$$

Tudjuk 2′)-ből: $g \in \mathcal{L}'$-nél $A_{[\lambda]} g = \lambda A R(\lambda) g = \lambda R(\lambda) A g$. Szintén 2′) ill. 3) szerint

$$A_{[\lambda]} g = \lambda A R(\lambda) g = \lambda R(\lambda) A g \ , \quad A_{[\lambda]} g \to A g \qquad (\lambda \to \infty, \ g \in \mathcal{L}') \ .$$

Ez befejezi $(**)$ bizonyítását, hiszen ezzel

$$\|U^t_{[\lambda]} g - U^t_{[\mu]} g\| \le t \, \|A_{[\lambda]} g - A_{[\mu]} g\| \to \|Ag - Ag\| = 0 \quad (\lambda, \mu \to \infty, \ g \in \mathcal{L}').$$

Észrevétel: ez utóbbi már biztosítja az összes $[t \mapsto U^t f]$ $(f \in \mathcal{L})$ függvény folytonosságát is. Ugyanis $\lim_{\mu\to\infty}$ vételével kapjuk, hogy

$\left\|U^t_{[\lambda]}g - U^t g\right\| \le T\ \left\|\lambda R(\lambda)Ag - Ag\right\|$ valahányszor $0 \le t \le T$ és $g \in \mathcal{L}'$. Legyen $T > 0$ tetszőlegesen adott, és tekintsük az $F_\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{C}\big([0,T], \mathcal{L}\big)$, $F_\lambda(f) := \big([[0,T] \ni t \mapsto U^t_{[\lambda]} f\big]$ lineáris leképezéseket. Ezek tehát bármely rögzített $g \in \mathcal{L}'$ helyen $\lambda \to \infty$-nél konvergálnak a $\mathcal{C}\big([0,T],\mathcal{L}\big)$-beli max-normában. Mivel $U^t_{[\lambda]}$ kontrakció, a max-norma szerint $\|F_\lambda\| \le 1\ \ (\lambda > 0)$. Ezért alkalmazhatjuk a kondezációs elvet, amelynek konkluziója: az F_λ leképezések minden $f \in \mathcal{L}$ helyen konvergálnak $\lambda \to \infty$ esetén. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\lim_{\lambda\to\infty} F_\lambda(f) = \big[[0,T] \ni t \mapsto U^t f\big]\ \ (f \in \mathcal{L})$ függvények mind folytonosak.

A tétel bizonyításához már csak azt kell belátnunk, hogy

a) $U^{t+s} = U^t U^s\ \ (s,t \ge 0)$, b) $h^{-1}(U^h - I)g \to Ag\ \ (h \searrow 0,\ g \in \mathcal{L}')$.

Lemma. *Ha (X,d) metrikus tér, $F, G, F_i, G_i : X \to X\ \ (i \in \mathcal{I})$ kontrakciók, amelyekre $F_i \to F$, $G_i \to G$ pontonként, akkor $F_i \circ G_i \to F \circ G$ pontonként.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$, $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Feltevés szerint $\exists\, i_0\ \ \forall\, i \ge i_0\ \ d\big(G_i(x), G(x)\big), d\big(F_i(G(x)), F(G(x))\big) < \varepsilon/2$. Ha $i \ge i_0$, akkor

$$d\big(F_i(G_i(x)\big), F(G(x)\big) \le d\big(F_i(G_i(x)), F_i(G(x)\big) + d\big(F_i(G(x)), F(G(x)\big) \le$$
$$\le d\big(G_i(x), G(x)\big) + d\big(F_i(G(x)), F(G(x)\big) < \varepsilon\ . \quad \square$$

A Lemmából azonnal következik $U^t_{[\lambda]} U^s_{[\lambda]} \xrightarrow{\text{st}} U^t U^s\ \ (\lambda \to \infty,\ s,t \ge 0)$, hiszen az $U^t_{[\lambda]}, U^t$ operátorok mind kontrakciók. Mivel pedig $U^t_{[\lambda]} U^s_{[\lambda]} = U^{t+s}_{[\lambda]} \to U^{t+s}$ is, kapjuk, hogy $U^t U^s = U^{t+s}\ \ (s,t \ge 0)$, vagyis a) áll.

Már tudjuk: $\big[U^t :\ t \ge 0\big]$ erősen folytonos félcsoport. Ezért alkalmazhatjuk rá az Összefoglalás eredményeit. Így áll az ottani 1)+2) is.

b) bizonyítása. Legyen $\widetilde{\mathcal{L}}' := \big\{f \in \mathcal{L} :\ \exists\, g \in \mathcal{L}\ \ h^{-1}(U^h f - f) \to g\ \ (h \searrow 0)\big\}$ és $\widetilde{A}g := \lim\limits_{h\searrow 0} h^{-1}(U^h - I)\quad (g \in \widetilde{\mathcal{L}}')$. Az Összefoglalás alapján $\widetilde{\mathcal{L}}'$ sűrű altér $\mathcal{L}$-ben, és minden $\lambda > 0$ mellett $\lambda I - \widetilde{A} : \mathcal{L} \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}'$ az $\widetilde{R}(\lambda) f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f\ dt\quad (f \in \mathcal{L})$ inverzzel. Innen b) rögtön adódik:

$$g \in \mathcal{L}' \Longrightarrow g = \overbrace{R_{[\mu]}(\lambda)}^{\int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t_{[\mu]} dt}\ (\lambda I - A_{[\mu]})g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t_{[\mu]} (\lambda I - A_{[\mu]}) g\ dt \to$$
$$\longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t (\lambda I - A) g\ dt = \widetilde{R}(\lambda)(\lambda I - A) g\ .$$

Vagyis $1) + 2)$ alapján $\widetilde{R}(\lambda) = R(\lambda)\ \ (\lambda > 0)$. Így $\widetilde{A} = A$. $\square$

BOLYONGÁS RÁCSON, DISZKRÉT POTENCIÁLELMÉLET

Az egész fejezeten át

$$H := \mathbb{Z}^d\,, \quad d > 2 \qquad \big(\text{ahol } \ \mathbb{Z} = \{\text{egészek}\}\big)\,,$$
$$\big[X(t):\ t=0,1,2,\ldots\big]\,, \quad X(t):\Omega\to H \ \text{ bolyongás } H\text{-n}\,,$$

olyan sztochasztikus folyamat, amelynél az $e_1,\ldots,e_d$ egységvektorokkal

(B)
$$X(t+1)-X(t) \perp \{X(1),\ldots,X(t)\} \qquad (t=0,1,\ldots)\,,$$
$$\mathbf{P}\Big(X(t+1)=x+\sigma e_k\Big|X(t)=x\Big) = \frac{1}{2d} \qquad (x\in H, \sigma=\pm 1,\ k=1,\ldots,d).$$

Megjegyzés. [A *bolyongás* elnevezés eredete]. Tekintsünk egy részecskét, amely egy $x_0 \in H$ pontból indul ki, és minden időegység elteltével teljesen véletlenszerűen egy szomszédos H-beli rácspontba megy át. Ennek modellje egy olyan, a (B) axiómát teljesítő folyamat, ahol $\mathbf{P}\big(X(0) = x_0\big) = 1$. Ekkor $\mathbf{P}\big(X(t) = y\big)$ annak a valószínűsége, hogy a részecske a t időpontban az y rácspontban van.
Az általános eset fizikai interpretációja: részecskék egy rendszere mozog H pontjain, úgy hogy minden egyes individuum a mozgása többiektől független bolyongás. Ekkor $\mathbf{P}\big(X(t) \in A\big) = \big[$a részecskék hányadrésze van az A halmazban a t időpontban$\big]$.

Propozíció. $\big[X(t)\ :\ t = 1,2\ldots\big]$ *időfüggetlen átmenetű Markov-folyamat, amelynek átmeneti mátrixa*

$$\Pi = \Big[\Pi_{xy}\Big]_{x,y\in H}\,, \qquad \Pi_{xy} = \Big[(2d)^{-1} \text{ ha } \|x-y\|_1 = 1,\ 0 \text{ egyébként}\Big]\,.$$

Bizonyítás. Belátandó: mindig
$$\mathbf{P}\big(X(0)=x_0,\ldots,X(t)=x_t\big) = \mathbf{P}\big(X(0)=x_0\big)\Pi_{x_0x_1}\cdots\Pi_{x_{t-1}x_t}.$$
A (B) axióma szerint az $X(0), X(1)-X(_0),\ldots,X(t)-X(t-1)$ valószínűségi változók függetlenek, és $\Pi_{xy}\neq 0 \iff \|x-y\|_1 = 1$. Ezért

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(X(0)=x_0,\ldots,X(t)=x_t\big) = \\
&= \mathbf{P}\big(X(0)=x_0, X(1)-X(0)=x_1-x_0,\ldots,X(t)-X(t-1)=x_t-x_{t-1}\big) = \\
&= \mathbf{P}\big(X(0)=x_0\big)\prod_{s=1}^{t}\mathbf{P}\big(X(s)-X(s-1)=x_s-x_{s-1}\big) = \\
&= \mathbf{P}\big(X(0)=x_0\big)\left\{\begin{matrix}(2d)^{-t} \text{ ha } \|x_1-x_0\| = \cdots = \|x_t-x_{t-1}\| = 1, \\ 0 \text{ egyébként}\end{matrix}\right\} = \\
&= \mathbf{P}\big(X(0)=x_0\big)\Pi_{x_0x_1}\cdots\Pi_{x_{t-1}x_t}\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Jelölés. $p(n,x,y) = \mathbf{P}\big(X(t+n)=y \big| X(t)=x\big) := \big[\Pi^n\big]_{xy}$,

$$g(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n,x,y) \ .$$

Fizikai interpretáció:

$p(n,x,y) = \mathbf{P}[$egy részecske n idő alatt x-ből y-ba jut$]$,

$g(x,y) = g(y,x) = [x$-ből várhatóan hányszor jut y-ba a részecske$]$.

Térbeli eltolási és tükrözési invariancia:

$$p(n,x,y) = p(n,y,x) = P(n,y-x,0), \quad p(1,x\pm e_k,x) = 1/(2d).$$

Konvenció. Az általánosság megszorítása nélkül

$\Omega := \Big\{\{0,1,2,\ldots\} \to H$ függvények$\Big\}$,

$X(t) : \Omega \ni \omega \mapsto \omega(t) \quad (t=0,1,\ldots)$,

$\big\{$valószínűségi változók$\big\} = \big\{X(0), X(1), \ldots$-ből véges műveletekkel és pontonkénti limesszel képzett függvények$\big\}$.

Ekkor $1 = \mathbf{P}\big\{\omega\in\Omega : \ \|\omega(t+1)-\omega(t)\|_1 = 1 \ \ (t=0,1,\ldots)\big\}$.

Jelölés. $\mathbf{P}_x(A) := \big[\mathbf{P}(A)$ annál a folyamatnál, ahol $X(0)$ eloszlása az $\langle x\rangle$ pontban koncentrálódik$]$,

$\mathbf{E}_x(\xi) := \big[$a $\ \xi : \Omega \to H$ valószínűségi változó várható értéke $\mathbf{P}_x$ szerint$\big]$.

Ekkor

$$p(n,x,y) = \mathbf{P}_x\{\omega : \ \omega(n)=y\}$$
$$g(x,y) = \mathbf{E}_x[\omega \mapsto \#\{t : \omega(t)=y\}] \ .$$

Gyakorlat. $\mathbf{E}_x\Phi\big(X(0),\ldots,X(t)\big) =$
$= \sum_{z_1,\ldots,z_{n-1}} \Phi(x,z_1,\ldots,z_{z-1},y)\Pi_{x,y_1}\Pi_{y_1z_2}\cdots\Pi_{z_{n-2}z_{n-1}}\Pi_{z_{n-1}y}$.

Tétel. $g(x,y) < \infty$.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$\mathbb{R}^d \ni \theta \mapsto F_n(\theta) := \sum_y p(n,x,y) e^{i\langle\theta,y\rangle}$$

karakterisztikus függvényeket. Ezekkel

$$\int_{\theta_1=-\pi}^{\pi}\cdots\int_{\theta_d=-\pi}^{\pi} F_n(\theta)e^{-i\langle\theta,z\rangle}d\theta_1\dots\ d\theta_n =$$

$$= \sum_y p(n,x,y)\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,y-z\rangle}\ d\theta =$$

$$= \sum_y p(n,x,y)\cdot\delta_{yz}\cdot(2\pi)^d =$$

$$= p(n,x,z)\cdot(2\pi)^d\ ,$$

$$g(x,y) = (2\pi)^{-d}\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\theta)\ e^{-i\langle\theta,y\rangle}d\theta\ .$$

Észrevétel:

$$F_n(\theta) = \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(n)\rangle})\ .$$

Mivel $X(1)-X(0),\dots,X(n)-X(n-1)$ azonos eloszlású független valószínűségi változók,

$$\begin{aligned} F_n(\theta) &= \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(n)\rangle}) = \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(0)+[X(1)-X(0)]+\dots+[X(n)-X(n-1)]\rangle} = \\ &= \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(0)\rangle}e^{i\langle\theta,X(1)-X(0)\rangle}\cdots e^{i\langle\theta,X(n)-X(n-1)\rangle}] = \\ &= \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(0)\rangle})\mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(1)-X(0)\rangle})\cdots\mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(n)-X(n-1)\rangle}) = \\ &= \mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(0)\rangle})\mathbf{E}_x(e^{i\langle\theta,X(1)-X(0)\rangle})^n\ . \end{aligned}$$

Itt $X(1)-X(0)$ $\mathbf{P}_x$-szerinti eloszlása: $\mathbf{P}_x\Big(X(1)-X(0)=e_k\Big) = \mathbf{P}_x\Big(X(1)-X(0)=-e_k\Big) = 1/(2d)$. Ezért

$$F_n(\theta) = e^{i\langle\theta,x\rangle}\left[\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}\left(e^{i\theta_k}+e^{-i\theta_k}\right)\right]^n =$$

$$= e^{i\langle\theta,x\rangle}\left[\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos\theta_k\right]^n\ ,$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (2\pi)^{-d}\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,x\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\ \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos\theta_k\ \right]}_{\|.\|<1\ \theta-\text{m.m.}}^n e^{-i\langle\theta,y\rangle}\ d\theta = \\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,x-y\rangle}\frac{1}{1-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos\theta_k}\ d\theta = \\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,x-y\rangle}\frac{1}{\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}(1-\cos\theta_k)}\ d\theta = \\ &= d(2\pi)^{-d}\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,x-y\rangle}\frac{1}{2\sum_{k=1}^{d}\sin^2(\theta_k/2)}\ d\theta\ . \end{aligned}$$

Észrevétel: mivel $d > 2$ és $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$,

$$\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\sum_{k=1}^d \sin^2(\theta_k/2)} d\theta < \int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^d \theta_k^2} d\theta < \infty \ . \quad \square$$

Következmény. *Az x-ből kiinduló részecske-utak 1 valószínűséggel csak véges sokszor térnek vissza x-be:* $\mathbf{P}\Big\{\omega: \ \#\{t : \omega(t) = x\} = \infty\Big\} = 0.$

Definíció. Bármely $B \subset H$ halmaz esetén

$$\pi_B(x) := \mathbf{P}_x\big(\exists\, t \quad X(t) \in B\big) \ ,$$

B tranziens: $\exists\, x \quad \pi_B(x) < 1$,

B rekurrens: nem tranziens, azaz $\forall\, x \quad \pi_B(x) = 1$.

Példa. $\pi_{\{y\}}(x) = \mathbf{P}_x\Big(\bigcup_{t=1}^{\infty}[X(t) = y]\Big) \leq \sum_{b=0}^{\infty} P_x\big(X(t) = y\big) =$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} p(t, x, y) = g(x, y) \ ,$$

$$\pi_B(x) \leq \sum_{y\in B} g(x, y) \ .$$

Tétel. $g(x, y) \to 0 \quad \big(\|x - y\| \to \infty\big).$

Bizonyítás. Az eltolás-invariancia miatt $g(x, y) = g(0, x-y)$. Másrészt

$$g(0, v) = (2\pi)^{-d} \frac{d}{2} \int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle\theta,v\rangle} \Big(\sum_{k=0}^{d} \sin^2\frac{\theta_k}{2}\Big)^{-1} d\theta \ .$$

Általában is, hasonlóan a Riemann-Lebesgue lemmához,

$$\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle\theta,v\rangle} f(\theta)\, d\theta \to 0 \quad \big(\|v\| \to \infty\big) \qquad \forall\, f \in L^1(-\pi, \pi)^d \ . \quad \square$$

Megjegyzés. Bizonyítás nélkül: $g(x, y) \asymp \|x - y\|^{2-d}$ $(\|x - y\| \to \infty)$.

Következmény. *B véges,* $\Longrightarrow \exists\, r > 0 \ \ \forall\, x \quad \|x\| > r \Rightarrow \sum_{y\in B} g(x, y) < 1.$
Azaz véges halmaz tranziens.

Jelölés. A továbbiakban bármely $f : H \to \mathbb{R}$ függvényre

$$Pf(x) := \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}\big[f(x+e_k)+f(x-e_k)\big] \qquad (x \in H)\ .$$

Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény

harmonikus, ha $f = Pf$,

szuperharmonikus, ha $f \geq Pf$.

Megjegyzés. 1) f harmonikus $\iff$ $(I-P)f = 0$;
2) f szuperharmonikus $\iff (I-P)f \geq 0$;
3) $f \geq 0 \Rightarrow\ Pf \geq 0, \quad f \geq g \Rightarrow\ Pf \geq Pg$;

Propozíció. π_B *szuperharmonikus, sőt*

$$x \notin B \Longrightarrow\ \pi_B(x) = \sum_{k=1}^{d}\frac{1}{2d}\Big[\pi_B(x+e_k)+\pi_B(x-e_k)\Big].$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy x-ből induló részecskét. Ha $x \in B$, akkor egyszerűen $\pi_B(x) = 1 = P1_H(x) \geq P\pi_B(x)$. Ha $\notin B$, akkor

$$\begin{aligned}
\pi_B(x) &= \mathbf{P}_x\big(\exists\, t \quad X(t) \in B\big) = \\
&= \sum_{k=1}^{d}\Big[\mathbf{P}_x\big(X(1) = x+e_k,\ \ \exists\, t \geq 1 \quad X(t) \in B\big) + \\
&\qquad + \mathbf{P}_x\big(X(1) = x-e_k,\ \ \exists\, t \geq 1 \quad X(t) \in B\big)\Big] = \\
&= \sum_{k=1}^{d}\Big[P_x\big(X(1) = x+e_k\big)P_{x+e_k}\big(\exists\, t \geq 0 \quad X(t) \in B\big) + \\
&\qquad + P_x\big(X(1) = x-e_k\big)P_{x-e_k}\big(\exists\, t \geq 0 \quad X(t) \in B\big)\Big] = \\
&= \sum_{k=1}^{d}\Big[\frac{1}{2d}\pi_B(x+e_k)+\frac{1}{2d}\pi_B(x-e_k)\Big]\ . \quad \square
\end{aligned}$$

Jelölés.
$\overline{\pi}_B(x) := \mathbf{P}_x\Big(\text{az }\ X(0) = x\text{-ből induló részecske } \infty\text{-szer megy }\ B\text{-be}\Big)$.

Lemma. $\overline{\pi}_B$ *harmonikus.*

Bizonyítás. A Propozíció bizonyításához hasonló, $x \in B$ nem releváns.
$\square$

Tétel. *Korlátos harmonikus függvény konstans.*

Bizonyítás. Általában is, ha $g : H \to \mathbb{R}$ egy felülről korlátos harmonikus függvény, $x_1, x_2, \ldots$ pedig egy olyan sorozat, amelynél $g(x_n) \to \sup g$, akkor bármely $u \in H$ egységvektor irányában

$$g(x_n + u) = 2dg(x_n) - \sum_{e:e \neq u, \|e\|_1 = 1} g(x_n + e) \geq$$
$$\geq 2dg(x_n) - (2d-1)\sup g \to \sup g \ .$$

Ezért $g(x_n + h) \to \sup g$ minden $h \in H$ vektorral.
Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ egy korlátos harmonikus függvény. Az előbbi észrevételt g helyén a szintén korlátos harmonikus

$$f_e(x) := f(x+e) - f(x) \quad (x \in H, \ \|e\|_1 = 1)$$

eltolási differenciafüggvényekre alkalmazva megmutatjuk, hogy $f_e \leq 0$ minden e egységvektor mellett, ami csak az $f \equiv kostans$ lehetőséget engedi meg. Valóban, tetszőleges $\ell > 0$ ill. e egységvektor mellett egy $f_e(x_n^e) \to \sup f_e \ \ (n = 1, 2, \ldots)$ sorozattal

$$\sup f - \inf f \geq f(x_n^e + \ell e) - f(x_n^e) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\ell-1} f_e(x_n^e + ke) \longrightarrow \ell \sup f_e \ .$$

Innen $\sup f_e \leq \ell^{-1}[\sup f - \inf f] \to 0 \ \ (\ell \to \infty)$. □

Következmény. $\overline{\pi}_B \equiv 0$ *vagy* $\overline{\pi}_B \equiv 1$ *bármely* $\emptyset \neq B \subset H$ *halmazra.*

Bizonyítás. Legyen $\emptyset \neq B \subset H$ adott. Mivel $0 \leq \overline{\pi}_B \leq 1$, a Lemma alapján $\overline{\pi}_B \equiv$ konstans. Vegyünk egy tetszőleges x pontot. Definíció szerint

$$\overline{\pi}_B(x) = \mathbf{P}_x(A) \ , \quad \text{ahol} \ \ A := \{\omega : \#\{t : \omega(t) \in B) = \infty\} \ .$$

Észrevétel: az A esemény független a teljes eseményalgebrától, mivel

$$A \perp \big(X(\overline{t}) = y\big) \qquad \forall \, \overline{t}, y \ .$$

Bizonyítás: $\mathbf{P}_x\big[A \cap \big(X(\overline{t}) = y\big)\big] = \mathbf{P}_x\Big\{\omega : \#\{t : \omega(t) \in B\} = \infty, \ \omega(\overline{t}) = y\Big\} = \mathbf{P}_x\big(\omega(\overline{t}) = y\big)\mathbf{P}_y\{\omega : \ \#\omega(t) = B\} = \infty\big\}$. A Rényi-féle 0-1 tétel szerint ez csak úgy lehet, ha $\mathbf{P}_x(A) \in \{0, 1\}$. □

Tétel. *B rekurrens* $\Longleftrightarrow \overline{\pi}_B \equiv 1$, *$B$ tranziens* $\Longleftrightarrow \overline{\pi}_B \equiv 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy B tranziens. Ekkor definíció szerint valamely $x \in H$ pontnál $\pi_B(x) = \mathbf{P}_x\{\omega :\ \exists t\ \ \omega(t) = B\} < 1$. Mivel triviálisan $\overline{\pi}_B \le \pi_B(x)$, szükségképpen $\overline{\pi}_B \equiv 0$.
Tegyük fel, hogy B rekurrens. Észrevétel: ekkor bármely $x \in H$ mellett a $\pi_B(x) = 1$ reláció jelentése

$$\mathbf{P}_x\big(A_n\big) = 0\ , \quad \text{ahol}\ \ A_n := \big\{\omega :\ \omega(t) \notin B\ \ \forall t \ge n\big\}\ .$$

Vagyis $0 = \mathbf{P}_x\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 1 - \overline{\pi}_B(x) = 1 - \overline{\pi}_B$ definíció szerint. □

Megjegyzés. A Tétel motiválja a rekurvens-tranziens elnevezést

Megjegyzés. Analógia:

$$I - P \sim \Big[\Delta\ \ \mathbb{R}^d\ \text{fölött}\Big]\ ,$$

ahol

$$\Delta f(x) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{r^2}\Big[\Big\{\text{átlag a}\ \big\{z \in \mathbb{R}^d :\ \|z - x\|_2 = r\big\}\ \text{gömbön}\Big\} - f(x)\Big]$$

az $\mathbb{R}^d$-beli Laplace-operátor $\Big(\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} f,\ \text{ha}\ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)\Big)$. Egy $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ töltéssűrűség* esetén a Coulomb-féle potenciál-függvény

$$f(x) := c \cdot \int \frac{\varphi(z)}{\|z - x\|_2^{d-z}}\ dz$$

alakú (valamely c konstanssal), és ez teljesíti a

$$\Delta f = \varphi$$

Laplace-egyenletet.

Cél. Az $I - P \sim \Delta$ analógia alapján H-fölötti potenciál-elmélet az

$$(I - P) f = \varphi$$

egyenlet f megoldásaira. Formálisan $(I - P)^{-1}\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + \cdots$ a szokásos Neumann-sorfejtés. Látni fogjuk: *ez működik, ha* $\varphi = (I - P) f$, *ahol a* $\varphi \ge 0$ *függvény szuperharmonikus* (pl. a $\varphi = (I - P)\pi_B$ esetben), és vele egy klasszikus Riesz-féle felbontási tétel analogonját nyerjük.

* $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) := \big\{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) :\ \exists\, r > 0\ \ \varphi(z) = 0\ (\|z\|_2 \ge r)\big\}$ a kompakt tartójú folytonos függvények halmaza.

Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény *excesszív*, ha $f, (I-P)f \geq 0$.
A $g : H \to \mathbb{R}$ függvény *potenciál-függvény*, ha $\exists\, \varphi\ \ g = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \varphi$.

Jelölés. $G\varphi := \sum_{n=0}^{\infty} P^n \varphi$ a Green-operátor, $G\varphi$ φ potenciálja.

Lemma. *Ha az f függvény excessziv, akkor Pf is excesszív, és*

$$f \geq Pf \geq P^2 f \geq \cdots \searrow \overline{f}\ , \quad \text{ahol } \overline{f} \geq 0 \text{ harmonikus függvény.}$$

Bizonyítás. Általában is, $f_1 \geq f_2 \Rightarrow Pf_1 \geq Pf_2$. Legyen f excesszív függvény. Ekkor a $f \geq Pf \geq$ relációból indukcióval kapjuk, hogy $P^{n+1} f = P(P^n f) \geq P^n f \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Következésképpen az $\overline{f} := \lim_{n\to\infty} P^n f \geq 0$ függvény jól-definiált. Ezzel

$$\begin{aligned}
P\overline{f} &= \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2d}\Big[(\overline{f}(x+e_k) - 2\overline{f}(x) + \overline{f}(x-e_k)\Big] = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2d}\Big[P^n f(x+e_n) - 2P^n f(x) + P^n f(x-e_k)\Big] = \\
&= \lim_{n\to\infty} P(P^n f) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} f = \overline{f}\ . \quad \square
\end{aligned}$$

Tétel. *Minden excesszív függvény felbontható* $\big[$potenciál-függvény$\big]$ + $\big[$nem-negatív harmonikus$\big]$ *alakban. Nevezesen, ha az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény excesszív, akkor*

$$f = G\varphi + \overline{f}\ ,$$

ahol $\overline{f} := \lim_{n\to\infty} P^n f$ *és* $\varphi := (I - P)f \geq 0$.

Bizonyítás. $N \to \infty$ mellett

$$\sum_{n=0}^{N} P^n \varphi = \sum_{n=0}^{N} (P^n f - P^{n+1} f) = f - P^{N+1} f \longrightarrow f - \overline{f}\ . \quad \square$$

Cél. Alkalmazás $f := \pi_B$-re.

Lemma. *Legyen $\varphi : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$P^n \varphi(x) = \sum_{y} p(n, x, y)\varphi(y) = \mathbf{E}_x \varphi\big(X(n)\big) \qquad (x \in H)\ .$$

Bizonyítás. Indukció n szerint. Az $n=0$ eset triviális ($p(0,x,y)=\delta_{xy}$). Az indukciós lépés

$$\begin{aligned}P^{n+1}\varphi(x) &= \big[P^n(P\varphi)\big](x) = \sum_y p(n,x,y)P\varphi(y) = \\ &= \sum_y p(n,x,y)\ \frac{1}{2d}\ \sum_{k=1}^{d}\Big[\varphi(\overbrace{y+e_k}^{z}) + \varphi(\overbrace{y-e_k}^{z})\Big] = \\ &= \sum_z \frac{1}{2d}\ \sum_{k=1}^{d}\ \Big[p(n,x,z-e_k) + p(n,z+e_k)\Big]\,\varphi(z) = \\ &= \sum_z\ p(n+1,x,z)\,\varphi(z)\ . \quad \square\end{aligned}$$

Tétel. 1) $P^n\pi_B(x) = P_x(A_n)$, *ahol* $A_n := \big(\exists\, t \geq n\ X(t) \in B\big)$.
2) *Ha* B *tranziens, akkor* $\pi_B(x) = G\varphi_B(x)$, *ahol*
$$\varphi_B := (I-P)\pi_B, \quad \varphi_B(x) = \mathbf{P}_x\Big(X(0)\in B,\ \forall\, t>0\ X(t)\notin B\Big).$$

Megjegyzés. Triviálisan B rekurrens $\Rightarrow \pi_B \equiv 1$.

Bizonyítás. 1) Akármilyen $\emptyset \neq B \subset H$ esetén

$$\begin{aligned}p(n,x,y)\pi_B(y) &= \mathbf{P}_x\big(X(n)=y\big)\,\mathbf{P}_y\big(\exists\, t\geq 0\ X(t)\in B\big) = \\ &= \mathbf{P}\Big(x\text{-ből induló részecske } n \text{ lépésben } y\text{-ba jut, majd onnan } B\text{-be}\Big) = \\ &= \mathbf{P}_x\Big(X(n)=y,\ \exists\, t\geq 0\ X(t+n)\in B\Big) = A_n \cap \big(X(n)=y\big)\ .\end{aligned}$$

Innen
$$\begin{aligned}P^n\pi_B(x) &= \sum_y p(n,x,y)\pi_B(y) = \\ &= \sum_y \mathbf{P}_x\Big(A_n \cap \big(X(n)=y\big)\Big) = \mathbf{P}_x(A_n)\ .\end{aligned}$$

2) Tudjuk: $\pi_B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P^n\varphi_B(x) + \overline{\pi_B}(x)$, ahol $\varphi_B(x) := (I-P)\pi_B(x)$ és $\overline{\pi_B}(x) := \lim\limits_{n\to\infty} P^n\pi_B(x)$. Az 1)-beli $A_0, A_1, A_1 \ldots$ eseményekkel $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, és

$$\overline{\pi_B}(x) = \lim_{n\to\infty} P_x(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(x)\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\Big)\ ,$$
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \Big(\forall\, n\ \exists\, t\geq n\ X(t)\in B) = \Big(\#\big\{t:\ X(t)\in B)\big\} = \infty\Big)\ .$$

így $\overline{\pi_B}(x) \equiv 0$, mivel B tranziens. Vagyis

$$\begin{aligned}\varphi_B(x) &= \pi_B(x) - P\pi_B(x) = \mathbf{P}_x(A_0) - \mathbf{P}_x(A_1) =^{A_0 \supset A_1} \\ &= P_x\big(A_0 \setminus A_1\big) = \mathbf{P}_x\big(X(0)\in B,\ \nexists t>0\ X(t)\in B\big)\ . \quad \square\end{aligned}$$

Jelölés. $\tau_B := \min\big\{t:\ X(t)\in B\big\}$ $\big($azaz $\tau_B(\omega) = \min\big\{t:\ \omega(t)\in B\big\}\big)$. Interpretéció: az $\omega : \{0,1,\ldots\} \to H$ mozgás a $\tau_B(\omega)$ időpontban jut először B-be.

Lemma. $\sum\limits_y \mathbf{P}_x\big(X(t)=y\big)\mathbf{E}_y\big(\varphi\big(X(t)\big)\big) = \mathbf{E}_x\big(\varphi\big(X(\tau+t)\big)\big)$. $\square$

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f = G\varphi$ *a* φ *függvény potencálja. Ekkor*

1) $f(x) = \sum\limits_{n,y} p(n,x,y)\varphi(y) = \sum\limits_y g(x,y) = \mathbf{E}_x \sum\limits_{t=0}^{\infty} \varphi\big(X(t)\big)$*;*
2) $\mathbf{E}_x f\big(X(\tau_B)\big) = \mathbf{E}_x \sum\limits_{t\geq\tau_B} \varphi\big(X(t)\big)$.

Bizonyítás. 1) Tudjuk: $P^n\varphi(x) = \sum\limits_y p(n,x,y)\varphi(y)$, $g(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n,x,y)$. Triviálisan $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P^n\varphi(x) = \sum\limits_{n,y} p(n,x,y) = \sum\limits_y g(x,y)\varphi(y)$. Ezért

$$\mathbf{E}_x\varphi\big(X(t)\big) = \sum_y \varphi(y)\mathbf{P}_x\big(X(t)=y)\big) = \sum_y \varphi(y)p(t,x,y)\ .$$

2) Legyen $q(n,y) := \mathbf{P}_x\big(\tau_B=n, X(n)=y\big)$ (a részecskék ennyied része ér B-be először az y pontnál az n időpontban). Észrevétel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q(n,y) = \mathbf{P}_x\big(X(\tau_B)=y\big)$. Ezzel

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x f\big(xX(\tau_B)\big) &= \sum_{n,y} f(y)\mathbf{P}_x\big(\tau_B=n, X(\tau_B)-X(n)=y\big) = \\ &= \sum_{n,y} q(n,y)f(y) =^{1)\ \text{miatt}} \\ &= \sum_{n,y} q(n,y)\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{E}_y\varphi\big(X(t)\big) = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n,y} q(n,y)\ \mathbf{E}_y\varphi\big(X(t)\big) = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{y} \mathbf{P}_x\big(X(\tau_B)=y\big)\ \mathbf{E}_y\varphi\big(X(t) = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{E}_x\varphi\big(X(\tau_B+t)\big)\ . \quad \square\end{aligned}$$

Következmény. *Az* $f = G\varphi$ *potenciál-függvény esetében*

$$f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \varphi(X(t)) = \mathbf{E}_x f\big(X(\tau_B)\big) + \sum_{t<\tau_B} \mathbf{E}_x \varphi\big(X(t)\big) \ .$$

Ha $\operatorname{supp}\varphi \subset B$, *akkor* $\varphi\big(X(t)\big) = 0$ $(t < \tau_B)$, *és* $f(x) = \mathbf{E}_x f\big(X(\tau_B)\big)$.
□

Definíció. Mint az elektrosztatikai esetben, a B halmaz *kapacitása*

$$C(B) := \sup\Big\{ \sum_{y\in B} \varphi(y) : \ 0 \le \varphi, \ \operatorname{supp}(\varphi) \subset B, \ G\varphi \le 1 \Big\} \ .$$

Tétel. *Ha a* B *halmaz tranzienes, akkor*

$$\exists!\, \varphi \ge 0 \qquad \operatorname{supp}(\varphi) \subset B, \quad G\varphi \le 1, \quad \sum_{y\in B} \varphi(y) = C(B) \ ,$$

mégpedig a $\varphi = \varphi_B := (I - P)\pi_B$ *függvény* $\big($*amellyel* $G\varphi_B = \pi_B\big)$.

Bizonyítás. Tudjuk: $\varphi_B(x) = \mathbf{P}_x\big(X(0)\in B, \ \forall t>0 \ X(t)\notin B)$.
Mivel $\operatorname{supp}(\varphi_B) \subset B$ és $0 \le G\varphi_B = \pi_B \le 1$,

$$x \notin B \Longrightarrow \ \varphi_B(x) \le \mathbf{P}_x\big(X(0)\in B\big) = \mathbf{P}\big(X(0)=x\in B\big) = 0 \ .$$

Tegyük fel, hogy $0 \le \varphi$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B$ és $f := G\varphi \le 1$. Ekkor

$$f(x) = \mathbf{E}_x f\big(X(\tau_B)\big) \le \mathbf{P}_x\big(\tau_B < \infty\big) = \pi_B(x) \ ,$$

$$\sum_y \varphi(y) = \big\langle \varphi \big| \pi_B \big\rangle \quad \text{ahol} \quad \big\langle f_1 \big| f_2 \big\rangle := \sum_y f_1(y) f_2(y)$$

Észrevétel: G szimmetrikus operátor a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalárszorzat szerint, mivel $f_1, f_2 \ge 0$ esetén

$$\big\langle G f_1 \big| f_2 \big\rangle = \sum_y \Big[\sum_z g(y,z) f_1(z) \Big] f_2(y) =$$

$$= \sum_{y,z} \underbrace{g(y,z)}_{=\,g(z,y)} \ f_1(z) f_2(y) = \big\langle f_1 \big| G f_2 \big\rangle \ .$$

Innen

$$\sum_y \varphi(y) = \big\langle \varphi \big| G\varphi_B \big\rangle = \big\langle G\varphi \big| \varphi_B \big\rangle \le \big\langle 1 \big| \varphi_B \big\rangle = \sum_B \varphi(y) \ . \ \square$$

Következmény. $C(B) = \sum\limits_{y \in B} \varphi_B(y)$.

Lemma. *Véges sok tranziens halmaz uniója tranziens.*

Bizonyítás. Legyenek $B_1, \ldots, B_\ell$ H-beli tranziens halmazok, azaz $P^n \pi_{B_1}, \ldots, P\pi_{B_\ell} \to 0$ $(n \to \infty)$. Ekkor $\pi_{B_1 \cup \cdots \cup B_\ell} \leq \sum\limits_{k=1}^{\ell} B_k$ és így $P^n \pi_{B_1 \cup \cdots \cup B_\ell} \leq \sum\limits_{k=1}^{\ell} P^n \pi_{B_k} \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Tétel. $d = 3$ *dimenzióban* B *tranziens, ha*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} < \infty, \quad \text{ahol} \quad B_k := \left\{ x : \ 2^{k-1} < \|x\|_2 \leq 2^k \right\} .$$

Bizonyítás. Döntő észrevétel (még belátandó):

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{B_k}(0) < \infty \quad \Longleftarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} < \infty .$$

$(*)$ alapján ugyanis vehető olyan n, amelynél

$$\sum_{k=n}^{\infty} \pi_{B_k}(0) < 1$$

Ekkor a $B_* := \bigcup_{k \geq n} B_k$ halmaz tranziens, mivel $\pi_{B_*}(0) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \pi_{B_k}(0)$. Következésképpen

$$\begin{aligned} B = B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup B_* &= [\text{véges}] \cup [\text{tranziens}] = \\ &= [\text{tranziens}] \cup [\text{tranziens}] = [\text{tranziens}] . \end{aligned}$$

(*) bizonyítása. Tudjuk: $\pi_{B_k}(0) = \sum\limits_{y} g(0,y) \varphi B_k(y)$, ahol valamely $\gamma > 0$ konstanssal $g(x,y) \leq \gamma \|x - y\|^{-1}$ $(x, y \in H)$. Tehát

$$\begin{aligned} g(0,y) &\leq \frac{\gamma}{2^{k-1}} \qquad (y \in B_k) , \\ \pi_k(0) &\leq \frac{\gamma}{2^{k-1}} \sum_y \varphi_{B_k}(y) = \frac{\gamma}{2^{k-1}} C(B_k) . \end{aligned}$$

Vagyis $\sum\limits_k \pi_{B_k}(0) \leq \sum\limits_k \frac{\gamma}{2^{k-1}} C(B_k)$, ahonnan $(*)$ közvetlenül adódik.
□

Megjegyzés. Érdekesebb (de nehezebb) a fordított:
$d = 3$ *és* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} = \infty$ *esetén a* B *halmaz rekurrens.*

FÜGGELÉK

Kiterjesztési elv

Definíció. Egy $\phi : X \to Y$ leképezés M*-kontrakció* az $(X, \delta), (Y, d)$ metrikus terek között, ha

$$d\big(\phi(x_1)\phi(x_2)\big) \leq M\delta(x_1, x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X).$$

Tétel. *Ha* (Y, d) *teljes tér, akkor minden sűrű halmazon értemezett* $\phi : X_0 \to Y$ M*-kontrakció kiterszhető folytonosan az egész* X*-re. Ez a szükségképpen egyértelmű* $\overline{\phi} : X \to Y$ *kiterjesztés egyben* M*-kontrakció.*

Bizonyítás. ISMERT.

Kondenzációs elv

Tétel (nem-lineáris változat). *Tegyük fel, hogy* (X, δ) *metrikus tér,* (Y, d) *teljes metrikus tér,* X_0 sűrű $\subset X$, *és a* $\phi_1, \phi_2, \ldots : X \to Y$ M*-kontrakciók konvergálnak pontonként egy* $\phi : X_0 \to Y$ *leképezéshez. Ekkor* ϕ *is* M*-kontrakció, és a* $\overline{\phi_1}, \overline{\phi_1}, \ldots : X \to Y$ *folytonos kiterjesztések is konvergálnak* X *minden pontjánál* $\overline{\phi}$*-hoz.*

Bizonyítás. Könnyen látható: M-kontrakciók pontonkénti limesze is M-kontrakció. Tehát a $phi : X_0 \to Y$ leképezés is M-kontrakció, és így az $\overline{\phi} : X \to Y$ kiterjesztés is M-kontrakció. Hasonlóan a kiterjesztett $\overline{\phi_n} : X \to Y$ leképezések is mind M-kontrakciók. Legyen $x \in X$ tetszőleges pont. Az $\overline{\phi_n}(x) \to \overline{\phi}(x)$ konvergencia bizonyítása: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel X_0 sűrű $\subset X$, van olyan $x_0 \in X_0$ pont, amelyre $\delta(x, x_0) \leq \varepsilon$. Feltevés szerint itt $\phi_n(x) \to \phi(x)$. Vagyis van olyan ν index, hogy $d(\phi_n(x_0), \phi(x_0)) \leq \varepsilon$ $(n > \nu)$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint, tovq'abbá mivel az $\overline{\phi_n}, \overline{\phi}$ folytonos kiterjesztések M-kontrakciók,

$$\begin{aligned} n > \nu \Longrightarrow\ & d(\overline{\phi_n}(x), \overline{\phi}(x)) \leq \\ & \leq d(\overline{\phi_n}(x), \phi_n(x_0)) + d(\phi_n(x_0), \phi(x_0)) + d(\phi(x_0, \overline{\phi}(x)) \leq \\ & \leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = \text{Const.}\, \varepsilon\ . \quad \square \end{aligned}$$

Riesz-Weyl lemma

Tétel (Riesz-Weyl lemma). *L^1-térbeli másodrenben véges utat alkotó függvénysorozat majdem mindenütt konvergens: ha $f_1, f_2, \ldots \in L^1(\mu)$ olyan függvények, hogy*

$$\|f_1 - f_2\|_{L^1(\mu)}^{1/2} + \|f_2 - f_3\|_{L^1(\mu)}^{1/2} + \cdots < \infty \ ,$$

akkor $f_n \to f$ pontonként μ-majdnem mindenütt egy $f \in L^1(\mu)$ függvényhez.

Bizonyítás. Legyen az $n = 1, 2, \ldots$ indexekre

$$\varepsilon_n := \|f_n - f_{n+1}\|_{L^1(\mu)}^{1/2}, \quad S_n := \{\omega : \ |f_n(\omega) - f_{n+1}(\omega)| > \varepsilon_n\} \ .$$

Az $\widehat{\Omega} \setminus S_n$ halmazon $|f_n - f_{n+1}|S_n \le \varepsilon_n$, és így az

$$\Omega_k := \bigcap_{n=k}^{\infty} (\widehat{\Omega} \setminus S_n) = \widehat{\Omega} \setminus \bigcup_{n=k}^{\infty} S_n$$

halmazokon a $\sum_n (f_n - f_{n+1})$ sor pontonként abszolut konvergens:

$$\sum_{n=k}^{\infty} |f_n(\omega) - f_{n+1}(\omega)| \le \sum_{n=k}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \qquad (\omega \in \Omega_k, \ k = 1, 2, \ldots).$$

Sőt abszolut konvergens ezek egyesítésén, az

$$\widehat{\Omega}_* := \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \widehat{\Omega} \setminus \Big(\bigcap_n \bigcup_{k \ge n} S_k\Big) = \widehat{\Omega} \setminus \liminf_n S_n$$

halmazon is. A Markov-egyenlőtlenség szerint

$$\mu(S_n) \le \|f_n - f_{n+1}\|_{L^1(\mu)} / \varepsilon_n = \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) < \infty$, és így $\mu(\liminf_n S_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \varepsilon_n = 0$.
$\square$

Következmény. *$L^1(\mu)$-beli Cauchy-sorozatnak van pontonként μ-majdnem mindenütt konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $f_1, f_2, \ldots$ Cauchy-sorozat $L^1(\mu)$-ben, úgy, hogy $\|f_k - f_\ell\|_{L^1(\mu)} \le \varepsilon$ $\big(k, \ell \ge \nu(\varepsilon), \ \varepsilon > 0\big)$. ekkor pl. az $\big[f_{\nu(1/4^n)} : \ n = 1, 2, \ldots\big]$ részsorozatra $\|f_{\nu(1/4^n)} - f_{\nu(1/4^{n+1})}\|_{L^1(\mu)} \le 1/4^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ez pontonként μ-majdnem mindenütt konvergál, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1/4^n} = 1 < \infty$. $\square$