Holomorf endomorfizmusok C_0-félcsoportjai

L.L. STACHÓ

17/02/2023, Szeged

ALAPFOGALMAK

$\mathbf{E}$ komplex Banach-tér, $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ korlátos tartomány

$\mathrm{Hol}(\mathbf{D}) := \{$holomorf $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ leképezések $\}$

Fréchet koeff. $D^n f(\mathbf{z})\mathbf{v}_1 \cdots, \mathbf{v}_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(\mathbf{z}+t_1\mathbf{v}_1+\cdots+t_n\mathbf{v}_n)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n}\Big|_{t=0}$

Taylor sor: $f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[D^n_{\mathbf{z}=\mathbf{a}} f(\mathbf{z})\right]\mathbf{v}^n.$

$d_{\mathbf{D}} := \left[\text{Carathéodory-távolság } \mathbf{D}\text{-n}\right],$

$f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{D})$ mindig $d_{\mathbf{D}}$-kontrakció.

Cauchy becslések:

$$\left\| \left[D^n_{\mathbf{z}=\mathbf{a}} f(\mathbf{z})\right]\mathbf{v}^n \right\| \leq \mathrm{diam}(\mathbf{D})\mathrm{dist}(\mathbf{a}, \partial\mathbf{D})^{-(n+1)} \|\mathbf{v}\|^n.$$

$$\mathbf{K} \subset\subset \mathbf{D} \text{ konvex} \Rightarrow \mathrm{Lip}\big(f|\mathbf{K}\big) \leq \mathrm{diam}(\mathbf{D})\mathrm{dist}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{D})^{-1};$$

ALAPFOGALMAK

$f_j \to f$ pontonként $\mathrm{Hol}(\mathbf{D})$-ben $\implies$ $[D^n f_j]\mathbf{v}^n\big|_{\mathbf{K}} \overset{\to}{\to} [D^n f]\mathbf{v}^n\big|_{\mathbf{K}}$ ha $K \subset\subset \mathbf{D}$

$[\Phi^t : t \in \mathbb{R}_+]$ *erősen folyt.1-par. félcsoport* (C_0-fcs.) $\mathrm{Hol}(\mathbf{D})$-ben ha

$$\Phi^0 = \mathrm{Id},$$
$$\Phi^{t+h} = \Phi^t \circ \Phi^h \ (t, h \in \mathbb{R}_+),$$
$$t \mapsto \Phi^t(\mathbf{x}) \text{ folytonos } \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{D}.$$

$[\Phi^t : t \in \mathbb{R}_+]$ *infinitezimális generátora*

$$\Phi' := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0+} \Phi^t,$$
$$\mathrm{dom}(\Phi') = \{\mathbf{x} : \exists\, \mathbf{v} \ \ \Phi^h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + h\mathbf{v} + \mathbf{o}(h)\}$$

KLASSZIKUS PÉLDA

$\mathbf{E} = \mathbf{H}, \langle .|. \rangle$ Hilbert-tér, $\mathbf{D} = \mathbf{B} = B(\mathbf{H}) =$ [egység-gömb]

$L^t = \Phi^t \in \mathrm{Iso}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H}) \subset \mathrm{Hol}(\mathbf{D})$ linearis op.

L' zárt antiszimm. lin. op. egy *sűrű* lin. alsokaságon.
Ha L' def. a teljes $\mathbf{H}$-n, $\Rightarrow L' = i \cdot [$ korl. önadj.$]$, L^t szürj. unitér

Vesentini (1979):
$d_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, 0) = \mathrm{artanh}(\|\mathbf{x}\|)$
Φ $d_{\mathbf{B}}$-izometria $\Rightarrow \Phi$ holom. vagy konj.hol.
$\Phi \in \mathrm{Iso}(\mathbf{B}) \Leftrightarrow \Phi$ hol. $d_{\mathbf{B}}$-izom. $+ \Phi(0) = 0$.

Vesentini (1987): Φ' $\Phi^t \in \mathrm{Iso}(d_{\mathbf{B}})$-hoz
Stachó (2017): Pontos Jordan-algebrai formulák Φ^t-ra

LINEÁRIs HILLE-YOSIDA ELMÉLET [Engel-Nagel]

E tetsz. Banach-tér, $[T^t : t \in \mathbb{R}^+]$ C_0-fcs.korl. lin. operátorokból

(1) $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(T') \Leftrightarrow t \mapsto T^t(\mathbf{x})$ folyt. differenciálható

(2) $\mathrm{dom}(T')$ T^t-invariant: $T'\big(T^t(\mathbf{x})\big) = T^t\big(T'(\mathbf{x}\big)$

(3) $\mathrm{graph}(T')$ zárt

(4) T^t egyértelműen meghatározott $\mathrm{dom}(T')$-on

(5) $\mathrm{dom}(T')$ sűrű lin. alsokaság **E**-ben

$T^t(\mathbf{x_0})$ differenciál-egyenlete $\dot{\mathbf{x}} = T'(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$
megoldás Dyson-Phillps sorokkal.

A HOLOMORF HILLE-YOSIDA ELMÉLET FELÉ

Stachó 2018:

(1) $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\Phi') \implies t \mapsto \Phi^t(\mathbf{x})$ folyt. diff.

$$\Phi^h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + h\mathbf{v} + \mathbf{w}_h, \;\; \mathbf{w}_h = \mathbf{o}(h) \; (h \searrow 0) \qquad [\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\Phi')]$$

Differenciálhatóság jobbról:

$$\Phi^{t+h}(\mathbf{x}) - \Phi^t(\mathbf{x}) = \Phi^t\big(\mathbf{x} + h\mathbf{v} + \mathbf{w}_h\big) - \Phi^t(\mathbf{x}) =$$
$$= h[D\Phi^t(\mathbf{z})]\mathbf{v} + \mathbf{o}(h) \qquad \Big[\; \exists \; \tfrac{d^+}{dt}\Phi^t(\mathbf{x}) \;\Big]$$

$$t \mapsto \tfrac{d^+}{dt}\Phi^t(\mathbf{x}) = \Phi'\big(\Phi^t(\mathbf{x})\big) = \big[D\Phi^t(\mathbf{x})\big]\Phi'(\mathbf{x}) \;\; \text{continuous}$$

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (1)

Baloldali derivált $t > 0$-nál:

$$\left[\Phi^{t-h}(\mathbf{x}) - \Phi^{t}(\mathbf{x})\right]/(-h) =$$

$$= \left[\Phi^{t-h}(\mathbf{x}) - \Phi^{t-h}(\mathbf{x} + h\mathbf{v} + \mathbf{w}_h)\right]/(-h) =$$

$$= \left[D\Phi^{t-h}(\mathbf{x})\right]\mathbf{v} + \left[D\Phi^{t-h}(\mathbf{x})\right](\mathbf{w}_h/h) + \sum_{n>1} h^{n-1}\left[D^n\Phi^{t-h}(\mathbf{x})\right]\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}_h/h\right)^n.$$

Mivel $\{\mathbf{x}\}$ kompakt, $\left[D\Phi^{t-h}(\mathbf{x})\right]\mathbf{v} \to \left[D\Phi^{t}\right]\mathbf{v}$ as $h \searrow 0$.

Cauchy-becslésekkel,

$$\delta := \mathrm{dist}\left(\{\Phi^s(\mathbf{x}) : 0 \le s \le t\}, \partial\mathbf{D}\right) > 0,$$

mellett kapjuk:

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (1),(2)

$$\left\| \left[D\Phi^{t-h}(\mathbf{x}) \right] (\mathbf{w}_h / h) \right\| \leq \mathrm{diam}(\mathbf{D}) \delta^{-1} \|\mathbf{w}_h / h\| \to 0 \quad (h \searrow 0),$$

$$\left\| \left[D^n\Phi^{t-h}(\mathbf{x}) \right] (\mathbf{v} + \mathbf{w}_h / h) \right\| \leq \mathrm{diam}(\mathbf{D}) \delta^{n-1} \|\mathbf{v} + \mathbf{w}_h / h\|^n$$

ahonnan

$$\left\| \sum_{n>1} h^{n-1} \left[D^n \Phi^{t-h} \right] (\mathbf{v} + \mathbf{w}_h / h) \right\| \to 0 \quad (h \searrow 0)$$

Újra $\quad \frac{d^-}{dt} \Phi^t(\mathbf{x}) = \Phi' \big(\Phi^t(\mathbf{x}) \big) = \left[D\Phi^t(\mathbf{x}) \right] \Phi'(\mathbf{x}) = \frac{d^+}{dt} \Phi^t(\mathbf{x})$

(2) szintén azonnal jön $\uparrow$.

(3) A Φ' gráf zárt.

Legyen $\mathbf{x}_n \in \mathrm{dom}(\Phi')$, $\mathbf{v}_n := \Phi'(\mathbf{x}_n)$, $\quad \mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v} \in \mathbf{E}$.

Biz: $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\Phi')$, $\mathbf{v} = \Phi'(\mathbf{x})$ i.e. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$.

$$\frac{\Phi^h(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n}{h} = \int_{s=0}^{h} \Big[\frac{d}{ds}\Phi^s(\mathbf{x}_n)\Big]\, ds = \\ = \int_{s=0}^{h} \big[D\Phi^s(\mathbf{x}_n)\big]\mathbf{v}_n\, ds = \int_{s=0}^{1} \big[D\Phi^{sh}(\mathbf{x}_n)\big]\mathbf{v}_n\, ds,$$

$$\big[D\Phi^s(\mathbf{x}_n)\big]\mathbf{v}_n - \mathbf{v} = \big[D\Phi^{sh}(\mathbf{x}_n)\big] v_n - \big[D\Phi^0(\mathbf{x}_n)\big]\mathbf{v} = \\ = \big[D\Phi^{sh}(\mathbf{x}_n)\big](\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) + \Big(\big[D\Phi^{sh}(\mathbf{x}_n)\big] - \big[D\Phi^0(\mathbf{x}_n)\big]\Big)\mathbf{v}.$$

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (3)

Mivel $\mathbf{K} := \{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{D}$ kompakt,

$$[D\Phi^{sh}]v\big|\mathbf{K} \rightrightarrows \mathbf{v} = [D\Phi^0]\mathbf{v}\big|\mathbf{K} \text{ ha } t \searrow 0,$$

$$\big\|\big[D\Phi^t(\mathbf{x}_n)\big](\mathbf{v}_n - \mathbf{v})\big\| \leq M\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|$$

$$\text{ahol} \quad M := \mathrm{diam}(\mathbf{D})\mathrm{dist}(K, \partial\mathbf{D})^{-1}.$$

Vagyis a

$$f_n(t) := \big[D\Phi^t(\mathbf{x}_n)\big]\mathbf{v}_n$$

fgv.-ekre teljesül

$$\|f_n(t) - \mathbf{v}\| \leq \max_{\mathbf{z}\in\mathbf{K}} \|\mathbf{v} - D\Phi^t(\mathbf{z})]v\| + M\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|.$$

Ezért, ha $h \searrow 0$,

$$h^{-1}\big(\Phi^h(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\big) = \lim_n h^{-1}\big(\Phi^h(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\big) = \int_{s=0}^{1} f_n(sh)\, ds \to \mathbf{v}.$$

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (4)

(4) Legyenek $[\Phi^t : t \in \mathbb{R}_+], [\Psi^t : t \in \mathbb{R}_+]$ C_0-fcs.-ok $\mathrm{Hol}(\mathbf{D})$-ben,
úgy, hogy $\Phi' = \Psi'$.
Ekkor egybeesnek $\mathrm{dom}(\Phi')\big(= \mathrm{dom}(\Psi')\big)$ fölött.

$t, s, h \geq 0$ és $t \geq s + h$ mellett

$$\frac{1}{h}\Big[\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s+h}(\mathbf{x})\Big) - \Phi^{t-s}\Big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\Big)\Big] =$$
$$= \frac{1}{h}\Big[\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s+h}(\mathbf{x})\Big) - \Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\Big)\Big] -$$
$$- \frac{1}{h}\Big[\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\Big) - \Phi^{t-s}\Big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\Big)\Big];$$

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (4)

Első tag

$$\frac{1}{h}\Big[\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s+h}(\mathbf{x})\Big)-\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\Big)\Big]=$$

$$\frac{1}{h}\int_{u=0}^{1}\left[\frac{d}{du}\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\Big)\right]=$$

$$=\int_{u=0}^{1}\Big[D\Phi^{t-(s+h)}\big(\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\big)\Big]\Big[\frac{1}{h}\frac{d}{du}\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\Big]\,du=$$

$$=\int_{u=0}^{1}\Big[D\Phi^{t-(s+h)}\big(\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\big)\Big]\Psi'\big(\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\big)\,du\xrightarrow{h\to 0}$$

$$\xrightarrow{h\to 0}\Big[D\Phi^{t-(s+h)}\big(\Psi^{s+uh}(\mathbf{x})\big)\Big]\Psi'\big(\Psi^{s}(\mathbf{x})\big)$$

HOLOMORF H.-Y. ELMÉLET (4)

Második tag hasonlóan

$$\frac{1}{h}\Big[\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^s(\mathbf{x})\Big) - \Phi^{t-(s+h)}\Big(\Psi^s(\mathbf{x})\Big)\Big] = -\frac{1}{h}\int_{u=0}^{1}\Big[\frac{d}{du}\Phi^{t-(s+h)}\Big(\Phi^h\big(\Psi^s(\mathbf{x}$$

$$= -\int_{u=0}^{1}\Big[D\Phi^{t-(s+h)}\big(\Psi^s(\mathbf{x})\big)\Big]\Big[\frac{1}{h}\,\frac{d}{du}\Phi^{uh}\big(\Psi^s(\mathbf{x})\big)\Big]\,du \xrightarrow{h\to 0}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} -\Big[D\Phi^{t-(s+h)}\big(\Psi^s(x)\big)\Big]\Phi'\big(\Psi^s(\mathbf{x})\big)$$

mivel $(\mathbf{y},\tau,\mathbf{w}) \mapsto \Big[D\Phi^\tau(\mathbf{y})\Big]\mathbf{w}$ resp. $(\mathbf{y},\tau,\mathbf{w} \mapsto \Big[D\Psi^\tau(\mathbf{y})\Big]\mathbf{w}$ folytonosak $\mathbf{K}\times[0,t]\times\mathbf{W}$ fölött, ahol $\mathbf{K}\subset\mathbf{D}$ kompakt ($\mathbf{K} := \{\Psi^s(x) : s\in[0,t]\}$) és $\mathbf{W}\subset\mathbf{E}$ körszerű kompakt, $\mathbf{K}+\mathbf{W}\subset\mathbf{D}$.

Ezért $\frac{d}{ds}\Phi^{t-s}\Big(\Psi^s(\mathbf{x})\Big) = \Psi'\big(\Psi^s(\mathbf{x})\big) - \Phi'\big(\Psi^s(\mathbf{x})\big) = 0$, ahonnan

$[0,t]\ni s\mapsto \Phi^{t-s}\Big(\Psi^s(\mathbf{x})\Big)$ konstans.

Speciálisan, az $s=0$ ill. $s=t$ esetekban $\Phi^t(\mathbf{x}) = \Psi^t(\mathbf{x})$.

NYITOTT PROBLÉMÁK

(5) Sűrű-e Φ' **D**-ben?

Megjegyzés. $\exists$ valós-analitikus C_0-fcs. üres generátorral.

Kérdés. Korlátos-e Φ' ha mindenütt van definiálva?
hasonlán a Hilbert-térbeli lineáris önadjungált operátokhoz.

Megjegyzés. Reich-Shoikhet 1996: Ha $\mathrm{dom}(\Phi') = \mathbf{D}$ és Φ' korlátos, továbbá **D** konvex akkor az orbit diff.-egy. $\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi'\big(\mathbf{x}(t)\big)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ max. megoldásai az egész $\mathbb{R}_+$-on vannak tetsz. $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ kiinduópont esetén.

Probléma. A klaszikus lineáris reprezentáció:
$\widehat{\Phi^t} : F \mapsto F \circ \Phi^t$ for linear functions $F : \mathbf{D} \to \mathbf{F}$

Sokk ismert cikk in tárgyalja Fréchet-tereken, de az ottani becslések nem elegendők.

BOLDOG 80-ADIKAT

KEDVES LACI