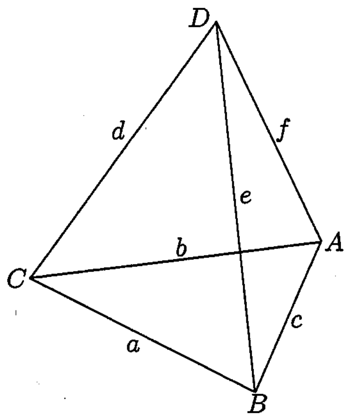
Heron-formula tetraéderre

STACHÓ LÁSZLÓ

A minap egy kémikus barátom jött hozzám azzal a kérdéssel, *hogyan fejez-ető ki a tetraéder térfogata az oldalaival.* Ez szinte középiskolás problémának űnik, mégsem találta a képletet az Interneten. Hogyhogy, kérdeztem magamban, át Leonard Euler nem csinálta ezt meg egy szabad délutánján? Nekiálltam, és émi komputeralgebrai (MAPLE) segítséggel sikerült is megadnom a formulát. Így angzik:

egyenek a, b, c, d, e, f egy tetraéder oldalai, ahol a, b, c egy lapot határolnak, $\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}$ pedig átellenes párok. Ekkor a tetraéder V térfogatára



$$
\begin{aligned}
144V^2 = {} & a^2f^2\big[(b^2+c^2+d^2+e^2)-(a^2+f^2)\big]+ \\
& + b^2e^2\big[(a^2+c^2+d^2+f^2)-(b^2+e^2)\big]+ \\
& + c^2d^2\big[(a^2+b^2+r^2+f^2)-(c^2+d^2)\big]- \\
& - \big[a^2b^2c^2+a^2d^2e^2+f^2b^2d^2+f^2e^2a^2\big].
\end{aligned}
$$

A 2-dimenziós Heron-formula az a, b, c oldalú háromszög T területére ebben stílusban:

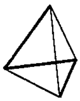
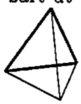
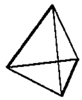
$$16T^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4),$$

akhogy ez szorzattá alakítható ($T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, ahol $2s = a+b+c$), íg a 3-dimenziós változat már nem.

A formula következő *gráfelméleti* átfogalmazása is érdekes lehet.

A tetraéder csúcsait és éleit egy gráf csúcsainak ill. éleinek tekintve,

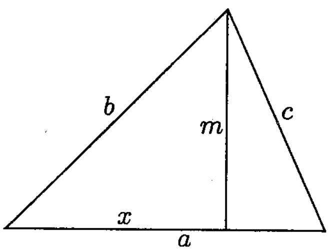
$$144V^2 = \sum_{\substack{\{p,q,r\} \\ \text{nyitott út}}} p^2q^2r^2 - \sum_{\substack{\{p,q,r\} \\ \text{zárt út}}} p^2q^2r^2 - \sum_{\substack{\{p,q\} \\ \text{diszjunkt élpár}}} (p^2q^4 + p^4q^2).$$

Mielőtt az elemi geometriai bizonyításra rátérnénk, még egy megjegyzést teszünk. Az Interneten sok weboldal van, amely kapcsolatos 3-dimenziós Heron-képletekkel, de csak speciális esetekre. Ezek közül több is felveti a kérdést, *lehet-e az oldallapok területeivel kifejezni a térfogatot.* A válasz meglepően egyszerű: *nem*, mert van olyan szabályos tetraéder, amelynek lapjai mind 1/2 területűek és a térfogata triviálisan nem-zéró, míg a síkbeli egységnégyzet csúcsai felfoghatók egy olyan 0 magasságú (és így 0 térfogatú) tetraéder csúcsaiként, amelynek oldalai 1/2 területű egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögek.

Bizonyítás. Általában is, a Pythagoras-tétel alapján kifejezhetők a háromszög bármelyik magassága és e magasság talppontjának távosága az alap csúcsaitól.

Magasság-formulák. Legyen m az a, b, c oldalú háromszög a feletti magassága, x pedig a b oldal vetülete a-ra (negatív, ha a, b közt tompa szög van). Ekkor

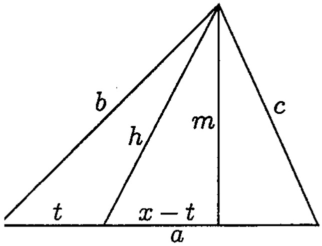


$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + m^2 \\ c^2 &= (a-x)^2 + m^2 \\ \hline x^2 - (a-x)^2 &= b^2 - c^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}, \quad m^2 = b^2 - x^2 = \frac{1}{4a^2}\left[2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)\right].$$

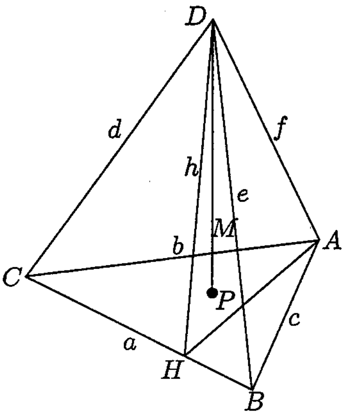
Megjegyzés. Az m^2-re kapott képlet $a^2/4$-gyel szorozva azonnal adja a 2-dimenziós Heron-formulát. Húrhosszak is könnyen számíthatók.

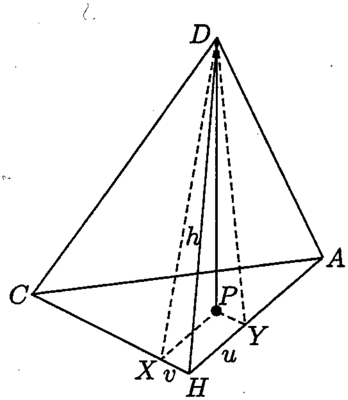
Húr-formula. Legyen H egy pont az a, b, c háromszög a oldalának egyenesén, amelynek előjelezett távolsága t az a, b közti C csúcstól (pozitív, ha $H \in a$ vagy $HC \supset a$). Ekkor az AH húr h hosszára (ahol A az a oldallal szemközti csúcs) a magasság-formulák szerint



$$h^2 = (x-t)^2 + m^2 = x^2 - 2xt + t^2 + m^2 \overset{x^2+m^2=b^2}{=}$$
$$= t^2 - 2xt + b^2 =$$
$$= t^2 - t\frac{a^2+b^2-c^2}{a} + b^2.$$

ι 2-dimenziós magasság- és húr-formulákkal visszavezethető a tetraéder magassága z oldalahosszakra. Ettől kezdve legyenek a, b, c, d, e, f egy tetraéder oldalai, ahol $, b, c$ egy lapot határolnak, $\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}$ pedig átellenes párok. Használjuk ovábbá a következő jelöléseket. Az a, b, c alapháromszög a feletti magassága m a H alppontttal, amelynek x a távolsága az a, b oldalak közös pontjától. A tetraédernek z a, b, c háromszög feletti magassága M, ennek talppontja P, a P pontnak pedig ζ a merőleges vetülete az a oldal egyenesére, az m magasság egyenesére pedig Y. 'égül h a H pont távolsága a tetraéder a, b, c feletti D csúcsától, míg v a $\overline{HX}$ ávolság ill. u a $\overline{HY}$ távolság.



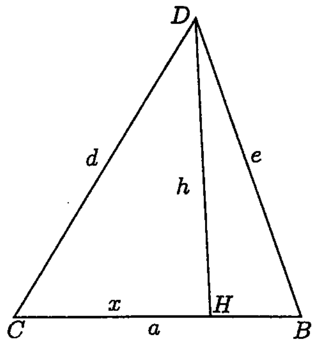


ι *tetraéder magassága.* Az a oldal egyenese merőleges m egyenesére, X és Y edig P merőleges vetületei ezen egyenesekre. Ezért X, H, Y, P egy téglalap az ζY ill. PH átlókkal az a, b, c hároszög síkjában. Az $M (= DP)$ szakasz merőleges z utóbbi síkra. Ezért a Pithagorasz tétel szerint $h^2 = \overline{DH}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{)P}^2 + (\overline{PY}^2 + \overline{YH}^2) = M^2 + u^2 + v^2$. Azaz

ι) $$M^2 = h^2 - u^2 - v^2 \; .$$

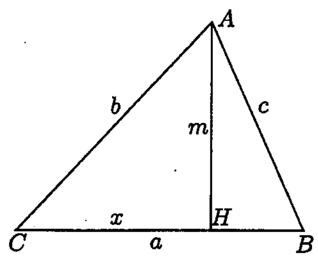
;t h kiszámítható a húr-formula segítségével: az a, d, e oldalú B, C, D csúcsú há-ɔmszög BC-t tartalmazó oldalegyenesén a H pont C-től x (előjelezett) távolságra van. Ezért

$$(2) \qquad h^2 = x^2 - x\frac{a^2 + d^2 - e^2}{a} + d^2.$$



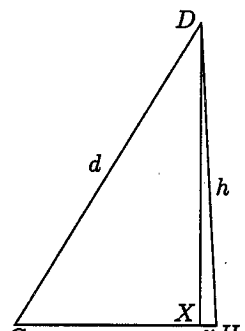
Az a, b, c oldalú háromszögben x definíció szerint a b szakasz vetületének előjelezett hossza a egyenesére. Innen a magasság-formulák szerint

$$(3) \qquad x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad m^2 = b^2 - x^2.$$

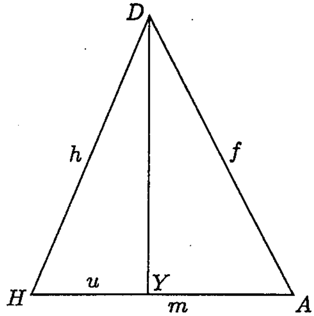


Maradt az u, v hosszak kifejezése az $a, \ldots, f$ oldalakkal. Vegyük észre, hogy D, P, X, H, Y egy olyan téglalap alapú gúla csúcsai, ahol a PD, PX, PY oldalak merőlegesek egymásra. Emiatt még az DY, YH és DX, XH oldalpárok is merőlegesek egymásra. Következésképpen az $x = CH$ alapú C, H, D háromszög magassága a DX szakasz, és u itt a $h = DH$ szakasz vetülete CH egyenesére. Vagyis a magasság-formulák szerint

$$(4) \qquad v = \frac{x^2 + h^2 - d^2}{2x}.$$



Iasonlóan az $m = AH$ alapú A, H, D háromszög magassága a DY szakasz, ahol u , $h = DH$ szakasz vetülete AH egyenesére, és a magasság-formulák szerint



$$u = \frac{m^2 + h^2 - f^2}{2m}. \tag{5}$$

;zzel az M magasság kiszámításához szükséges összes segédadatot visszavezettük az ,...,f oldalhosszakra. Csakhogy az (1),...,(5) formulák egymába helyettesítése ; egyszerűsítése manuálisan igen hosszadalmas „rabszolgamunka". Nem csodál- ató, ha a XX. század előtt ezt nem számolta végig senki. Ugyanakkor mi már endelkezünk egy erre tőkéletesen alkalmas „rabszolgával". Ez a *komputer-algebra.* 'l. MAPLE-ben mindössze ennyi kiadni a parancsot az M magasság (1),...,(5) lapján való kifejezésére:

```
x:=(a^2+b^2-c^2)/(2*a);    m:=sqrt(b^2-x^2);
h:=sqrt(x^2-x*(a^2+d^2-e^2)/a+d^2);
u:=(m^2+h^2-f^2)/(2*m);    v:=(x^2+h^2-d^2)/(2*x);
M:=sqrt(h^2-u^2-v^2);
```

.z eredmény egy közepes (2 MHz) sebességű PC-n is 1 mp-em belül megjön:

```
:= sqrt((- b^2*a^2*e^2 + b^2*a^2*c^2 - a^2*c^2*d^2 -
  - d^2*b^2*c^2 - e^2*b^2*c^2 - d^2*b^2*e^2 - d^2*c^2*e^2 +
  + b^2*d^2*f^2 - b^2*e^2*f^2 - c^2*d^2*f^2 + c^2*e^2*f^2 +
  + d^2*c^4 + e^2*b^4 - b^2*a^2*f^2 + a^4*f^2 + a^2*d^2*e^2 +
  + d^4*c^2 - a^2*d^2*f^2 + e^4*b^2 - a^2*e^2*f^2 -
  - a^2*c^2*f^2 + f^4*a^2) /
  / (- 2*b^2*a^2 + a^4 - 2*a^2*c^2 + b^4 - 2*b^2*c^2 + c^4))
```

z alsó sorbeli nevezőben épp a 2-dimenziós Heron-formula (ld. Megjegyzés) jelenik ıeg.

tetréder térfogata. Az előzőekben bevezetett jelölésekkel az $\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}$ .térő élpárokkal rendelkező tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{3}\left[\text{alap-}\Delta \text{ területe}\right]M(= \frac{1}{6}amM).$$

Az komputer-algebrai eredményünkből azonnal adódik a $144V^2$-re kimondott gyök- és koefficiens-mentes kifejezés.

Komputer-algebra nélkül (de felsőbb lineáris algebrával). Szinte véletlen szerencsének tűnik, hogy az $(1), \ldots, (5)$ egyenletek alapján igen hosszadalmas, de immár komputer-algebrával gyorsan megtehető számolások után a tetraéder magasságára olyan formula jön ki, amelynek nevezőjében épp az alapháromszög területe van, és mind a számláló, mind a nevező négyzete az oldalhosszak négyzeteinek polinomja. Van-e olyan megközelítés, amely a tetraéder térfogatának négyzetét azonnal az oldalnégyzetek polinomjaként adja? A válasz: igen, sőt a magyarázat is nagyon természetes, csakhogy ehhez ismerni kell a *determináns* fogalmát. Ismeretes, hogy ha egy tetraéder négy csúcsa A_0, A_1, A_2, A_3, és az A_k pont koordinátáit egy tetszőlegesen rögzített Descartes-koordinátarendszer szerint az

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{kx} \\ a_{ky} \\ a_{0z} \end{bmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

oszlopvektor alakba írjuk, akkor a tetréder térfogata

$$V = \frac{1}{6} \left|\det\left[a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0\right]\right| =$$
$$= \frac{1}{6} \left|\det \begin{bmatrix} a_{1x} - a_{0x} & a_{2x} - a_{0x} & a_{3x} - a_{0x} \\ a_{1y} - a_{0y} & a_{2y} - a_{0y} & a_{3y} - a_{0y} \\ a_{1z} - a_{0z} & a_{2z} - a_{0z} & a_{3z} - a_{0z} \end{bmatrix}\right|.$$

A döntő észrevétel: a mátrix-transzponálást $^{\mathbf{T}}$-vel jelölve, a determinánsok szorzástétele szerint általában is $\det(M^{\mathbf{T}}M) = \det(M^{\mathbf{T}})\det(M) = \det(M)^2$. Ezért

$$V^2 = \frac{1}{36}\det\Big(\left[a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0\right]^{\mathbf{T}} \left[a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0\right]\Big) =$$
$$= \det\left[\left\langle a_i - a_0, a_j - a_0\right\rangle\right]_{i,j=1}^{3},$$

ahol $\langle ., . \rangle$ az oszlopvektorok skaláris szorzása. Csakhogy az $\langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle$ skalárszorzat kifejezhető az $r_{k\ell} := \overline{A_k A_\ell}$ oldalhosszakkal: használva a rövid $v_\ell := a_k - a_0$ jelölést,

$$r_{ij}^2 = \langle a_i - a_i, a_i - a_j \rangle = \langle v_i - v_j, v_i - v_j \rangle = \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_j, v_j \rangle - 2\langle v_i, v_j \rangle =$$
$$= r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle,$$

ahonnan $2\langle v_i, v_j\rangle = r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - r_{ij}^2$. Ezért

$$\det\left[r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - r_{ij}^2\right]_{i,j=1}^3 = \det\left[2\langle v_i, v_j\rangle\right]_{i,j=1}^3 = 2^3 \cdot 36V^2.$$

Itt a baloldali determináns kifejtése $r_{ij}^2 r_{k\ell}^2 r_{mn}^2$ alakú szorzatokból áll automatikusan.

Stachó László, SZTE TTK, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
stacho@math.u-szeged.hu