rendezés után:

$$0 = 0.$$

Ez pedig ugye azt jelenti, hogy a háromszög belsejének minden pontja a mértani helyhez tartozik.

Egy másik síkrészben (no melyikben?) pedig:

$$-y + \frac{\sqrt{3}\cdot x + y - \sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3}\cdot x + y - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

azaz

$$-\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

vagyis üres halmaz. ■

Geometriailag az a legérdekesebb, hogy az egyes esetekben milyen alakzatok jönnek ki.

5. Az $n = 2$ eset: a teljes diszkusszió kellemes hétvégi (KöMaL) feladat, ízelítőül pár gondolat. $c \geq 0$ nyilván feltehető.

Legyen az egyenesek metszéspontja M (a párhuzamos esettel most nem foglalkozunk). A mértani hely mindenképpen M -re (középpontosan) szimmetrikus alakzat.

Ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, akkor $c = 0$ esetén nyilván csak az M pont a mértani hely.

Tehát $c > 0$. Ekkor $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ miatt M középpontú paralelogrammát kapunk, melynek csúcsai M -től c/α_2 illetve c/α_1 távolságra vannak.

Ha $\alpha_1 > 0 > \alpha_2$ és $c = 0$ akkor M-re illeszkedő két, egymásra merőleges egyenes (azaz négy félegyenes) a mértani hely.

Ha $\alpha_1 > 0 > \alpha_2$ és $c > 0$ akkor e_1 egyenesen nincs pontja a mértani helynek, míg e_2 egyenesen két pontot könnyen megtalálunk: M -től c/α_1 távolságra vannak amiket jelöljünk Q_1, Q_2 -vel. E két pontból kiinduló félegyeneseket kapunk mértani helyként, melyek e_1 -gyel nem párhuzamosak és nem is metszik e_1-et.

Szalkai István, Pannon Egyetem, Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu

Két általánosított Rolle-tétel

STACHÓ LÁSZLÓ

Rolle klasszikus tétele kimondja, hogy egy differenciálható $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény két gyökhelye között van olyan pont, ahol az f' differenciálhányados eltűnik. Ez persze csak egy szélsőségesen leegyszerűsített eset, de a virtuóz használatával Lagrange már röviden bebizonyított bonyolult közelítési tételeket. Tipikus példa:

Az $f(x) := \sin x$ függvényt a $[0, \pi/2]$ szakaszon már 0.005-nél pontosabban közelíti a $P(x) := x - x^3/6 + x^5/120$ polinom.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőlegesen rögzített $x_0 \in (0, \pi/2]$ helyet! Belátandó:

$$|f(x_0) - P(x_0)| < 0.005.$$

Lagrange alapgondolata a következő volt. A 0 helyen P értéke és az első hat deriváltja megegyezik f deriváltjával. Vegyük azt a λ számot, amelyre

$$f(x_0) = P(x_0) + \lambda x_0^7.$$

Ekkor a

$$g(x) := f(x) - P(x) - \lambda x^7$$

segédfüggvény értéke 0 az $x = 0$, x_0 helyeken, sőt $g^{(k)}(0) = 0$ a $k = 1, 2, \ldots, 6$-odik deriváltakra is. Hétszer alkalmazzuk Rolle tételét:

1) $g(0) = g(x_0) = 0$, ezért van olyan $x_1 \in (0, x_0)$ hely, ahol $g^{(1)}(x_1) = g'(x_1) = 0$;
2) $g^{(1)}(0) = g^{(1)}(x_1) = 0$, ezért van olyan $x_2 \in (0, x_1)$ hely, ahol $g^{(2)}(x_2) = [g^{(1)}]'(x_2) = 0$;
3) $g^{(2)}(0) = g^{(2)}(x_2) = 0$, ezért van olyan $x_3 \in (0, x_2)$ hely, ahol $g^{(3)}(x_3) = [g^{(2)}]'(x_3) = 0$;

$\vdots$

7) $g^{(6)}(0) = g^{(6)}(x_6) = 0$, ezért van olyan $x_7 \in (0, x_6)$ hely, ahol $g^{(7)}(x_7) = [g^{(6)}]'(x_7) = 0$.

Természetesen $x_7 \in (0, \pi/2)$, és

$$0 = g^{(7)}(x_7) = f^{(7)}(x_7) - P^{(7)}(x_7) - \lambda[x^7]'_{x=x_7} = f^{(7)}(x_7) - 7!\lambda.$$

Vagyis $\lambda = f^{(7)}(x_7)/7!$, és mivel

$$0 = f(x_0) - P(x_0) - \lambda x_0^7$$

így a λ szám választása miatt,

$$|f(x_0) - P(x_0)| = |\lambda x_0^7| = x_0^7 |f^{(7)}(x_7)/7!|$$
$$= x_0^7 \sin x_7/7! \le (\pi/2)^7/7! \approx 0.004682.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Láthatjuk rögtön, hogy a szinusz-függvény tulajdonságait csak az utolsó lépésben a becslésnél használtuk – lényeges az volt, hogy a P polinomra $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$, $k = 0, \dots, N$ teljesült valamely N-re. A konklúzió, amelyet a Rolle-tétel N-szeri alkalmazásával nyerünk, Lagrange ismert tétele a Taylor-polinom maradéktagjáról:

Ha I egy 0-t tartalmazó nyitott intervallumon az $f: I \to \mathbb{R}$ függvény N-szer differenciálható I-n, akkor teszőleges $x_0 \in I$ helyhez található olyan 0 és x_0 közti x_* pont, hogy

$$f(x_0) = P(x_0) + f^{(N)}(x_*) x_0^N / N!,$$

ahol

$$P(x) := \sum_{k=0}^{N-1} f^{(k)}(x_*) x^k / k!$$

az az $(N-1)$-edfokú polinom, amelynek a 0 helyen az értéke és az első $N-1$ deriváltja megegyezik f-ével.

Aki interpolációkról tanul, még több nagyon hasonló iterált alkalmazását ismerheti meg Rolle tételének. A szokásos tankönyvek azonban a g-nek megfelelő segédfüggvény megválasztására koncentrálnak, a Rolle-tétel rájuk való alkalmazását vagy részletezik, vagy kijelentik, hogy a fentebb elmondott Lagrange-féle tétel bizonyításában alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan lehet eljárni. Természetesen vetődik fel így a következő kérdés.

Van-e olyan egyszerűen kimondható általánosítása Rolle tételének, amely több pontban több deriválttal eltűnő függvényekre vonatkozik?

Válaszul bemutatunk két tételt. Az első átfogja a hagyományos tantermi alkalmazásokat, de akár kezdő kalkulus-kurzuson is tanítható. Lényegében a Hermite-interpoláció képlethiba-becslésénél használt Rolle-tételes érvek önálló tételként való kimondása. A második eredeti eredménynek tűnik, és azt mutatja meg, hogy a többszörös gyököknél jóval kevesebb kívánalom mellett is vannak egyszerűen bizonyítható nagyon általános Rolle-típusú eredmények.

1. Definíció. A nyitott $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $g: I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in I$ pont *legalább $m(\ge 1)$-edrendű zéróhelye*, ha g $(m-1)$-szer deriválható a-nak egy környezetében, és $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(m-1)}(a) = 0$.

Megjegyzés. 1) Egy g polinomnak az a pont akkor és csak akkor legalább m-edrendű zéróhelye, ha legalább m-szeres gyöke g-nek a szokásos algebrai értelemben, azaz ha valamilyen p polinommal $g(x) = (x-a)^m p(x)$.

2) A Taylor-polinom maradéktagjáról szóló Lagrange-tétellel belátható a következő.

Ha az a pont legalább m-edrendű zéróhelye g-nek, akkor $\lim_{x \to a} g(x)/(x-a)^{m-1} = 0$.

1. Tétel. *Legyenek $m_1, \dots, m_N$, $N > 1$ pozitív egészek, I egy nyitott intervallum és $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ pontok I-ben. Tegyük fel, hogy $g: I \to \mathbb{R}$ egy $(m_1 + \dots + m_N - 1)$-szer differenciálható függvény a nyitott I intervallumon, amelynek mindegyik a_k pont legalább m_k-adrendű zéróhelye. Ekkor van olyan $t \in I$ pont, amelyre $g^{(m_1 + \dots + m_N - 1)}(t) = 0$.*

Bizonyítás. Az $m_1 + \dots + m_N$ összeg szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. A minimális eset: $N = 2$ és $m_1 = m_2 = 1$. Ekkor feltevés szerint $g(a_1) = g(a_2) = 0$, vagyis Rolle eredeti tételét kapjuk vissza.

Legyen $m \ge 2$, és tegyük fel, hogy a tétel állítása teljesül minden olyan esetben, amikor $m_1 + \ldots + m_N \le m$. Tekintsünk ezután egy olyan esetet, amelynél $m_1 + \dots + m_N = m + 1$. Belátandó: ekkor is található olyan t hely, ahol $g^{(m)}(t) = 0$. Vegyük észre, hogy a g' deriváltnak az a_k pont legalább $(m_k - 1)$-szeres zéróhelye, ha $m_k > 1$. Ugyanakkor Rolle tétele szerint midegyik (a_k, a_{k+1}) intervallumban van egy további b_k zéróhelye g'-nek. Tehát alkalmazhatjuk az előbbi indukciós feltevésünket a g' deriváltra a $b_1, \dots, b_N - 1$ pontokkal és azokkal az a_k pontokkal, amelyeknél $m_k > 1$ (hiszen $(m_1 - 1) + 1 + (m_2 - 1) + 1 + \dots + (m_{N-1} - 1) + 1 + (m_N - 1) = m$). Eszerint van olyan t pont, ahol $[g']^{(m-1)}(t) = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy $g^{(m)}(t) = 0$, ami bizonyítandó volt.

2. Definíció. Legyen I egy nyitott intervallumon, a pedig I-nek egy pontja vagy egyik határpontja. A $g: I \to \mathbb{R}$ függvénynek az a pont *legalább $m(\ge 1)$-edrendű gyenge zéróhelye*, ha van olyan $a \ne x_n \to a$ sorozat I-ben, amelyre $g(x_n)/(x_n - a)^{m-1} \to 0$.

1. Lemma. (Gyenge Rolle-tétel). *Ha a differenciálható $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvénynek az a, b határpontok legalább elsőrendű gyenge zéróhelyei, akkor van olyan $t \in (a,b)$ pont, ahol $g'(t) = 0$ és amely egyben legalább elsőrendű gyenge zéróhelye a g' deriváltnak.*

Bizonyítás. A $g \equiv 0$ eset triviális. Ha $g \not\equiv 0$ van $s \in (a,b)$, amelyre $g(s) \ne 0$. Feltevés szerint van olyan $a_n \to a$ ill. $b_n \to b$ sorozat, hogy $g(a_n), g(b_n) \to 0$. Valamely N indexre tehát $a_N < s < b_N$ és $|g(x_N)|, |g(y_n)| < |g(s)|/2$. Mivel g

folytonos, az (a_N, s) intervallumon felvesz minden $g(a_N)$ és $g(s)$ közötti értéket. Speciálisan van olyan $a_* \in (a_N, s)$ hely is, ahol $g(a_*) = g(s)/2$. Hasonlóan van olyan $b_* \in (s, b_N)$ hely, ahol $g(b_*) = g(s)/2$. Mivel $g(a_*) = g(b_*)$, Rolle tétele szerint van olyan $t \in (a_*, b_*)$ hely, ahol $g'(t) = 0$. Definíció szerint

$$\frac{g(t+1/n) - g(t)}{1/n} \to g'(t) = 0.$$

Lagrange középérték-tétele szerint (ami szintén egy Rolle-tétel variáns) mindegyik $(t, t+1/n)$ intervalluban (ha már $t + 1/n < b$) van olyan t_n pont, ahol

$$g'(t_n) = \frac{g(t+1/n) - g(t)}{1/n}.$$

A kapott (t_n) sorozattal $t < t_n \to t$ és

$$\frac{g'(t_n)}{(t_n - t)^0} = g'(t_n) \to 0$$

áll, azaz t legalább elsőrendű zéróhelye g'-nek.

2. Lemma. *Ha a g függvény differenciálható, és az a pont legalább $1 < m$-edrendű gyenge zéróhelye g-nek, akkor a legalább $(m-1)$-szeres gyenge zéróhelye g'-nek.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül vehető $a = 0$. Most feltevés szerint van olyan $0 \neq x_n \to 0$ sorozat, amelyre $g(x_n)/x_n^{m-1} \to 0$. Ennek van olyan $x_1, x_2, \dots$ részsorozata, amelynél az az x_{n_k} számok előjele azonos és azonos a $g(x_{n_k})$ értékek előjele is. Ezért – áttérve egy ilyen részsorozatra, f helyett pedig a $\pm g(\pm x)$ függvények valamelyikére – az általánosság megszorítása nélkül vehető az is, hogy $0 < x_n \to 0$ és $0 \leq g(x_n) \to 0$. A sorozat további ritkításával végül azt is feltehetjük, hogy

$$x_{n+1} < x_n/2 \quad \text{és} \quad 0 \leq g(x_{n+1}) \leq g(x_n)$$

minden n-re. Megmutatjuk, hogy ekkor minden n indexre vagy van olyan $t_n \in (x_{n+1}, x_n)$ pont, hogy

$$(*) \quad g'(t_n) = 0, \qquad \text{vagy} \qquad t_n \in (x_n/2, x_n) \text{ és } 0 \leq \frac{g'(t_n)}{t_n^{m-2}} \leq 2^{m-1}\frac{g(x_n)}{x_n^{m-1}}.$$

Valóban, mivel

$$0 \leq g(x_{n+1}) \leq g(x_n) \quad \text{és} \quad 0 < x_{n+1} < x_n,$$

ezért

vagy $g(x_n/2) \leq g(x_{n+1})$ vagy $g(x_{n+1}) < g(x_n/2) < g(x_n)$ vagy $g(x_n) \leq g(x_n/2)$.

Ha $g(x_n/2) \leq g(x_{n+1})$, akkor – mivel g folytonos és $g(x_{n+1} \leq g(x_n)$ – van olyan $u_n \in [x_n/2, x_n]$ pont, ahol $g(u_n) = g(x_{n+1})$, és ekkor Rolle tétele szerint van olyan $t_n \in (x_{n+1}, u_n)$, amelyre $g'(t_n) = 0$. Hasonlóan, ha $g(x_n/2) \geq g(x_n)$, akkor van olyan $v_n \in [x_{n+1}, x_n/2]$, ahol $g(u_n) = f(x_n)$, és ekkor van olyan $t_n \in (v_n, x_n)$, amelyre $g'(t_n) = 0$. Végül tekintsük a $0 < x_{n+1} < x_n/2 < x_n$ és $0 \leq g(x_{n+1}) \leq g(x_n/2) \leq g(x_n)$ esetet! Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint van olyan $t_n \in (x_n/2, x_n)$ hely, ahol

$$0 \leq g'(t_n) = \frac{g(x_n) - f(x_n/2)}{x_n - x_n/2} \leq \frac{g(x_n)}{x_n/2},$$

$$0 \leq \frac{g'(t_n)}{t_n^{m-2}} \leq 2\frac{g(x_n)}{t_n^{m-2}x_n} \leq 2\frac{g(x_n)}{(x_n/2)^{m-2}x_n} = 2^{m-1}\frac{g(x_n)}{x_n^{m-1}}.$$

Azaz $(*)$ teljesül. Eszerint minden n indexre található olyan $0 < t_n < x_n$ pont, ahol

$$0 \leq \frac{g'(t_n)}{t_n^{m-2}} \leq \frac{2^m g(x_n)}{x_n^{m-1}}.$$

Mivel $x_n \downarrow 0$ és $g(x_n)/x_n^{m-1} \to 0$, fennáll $0 \neq t_n \to 0$ és $g'(t_n)/t_n^{m-2} \to 0$, ami bizonyítja a lemmát.

2. Tétel. *Legyenek $m_1, \dots, m_N$, $N > 1$ pozitív egészek, és legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ $\mathbb{R}$-beli pontok. Tegyük fel, hogy g egy olyan $(m_1 + \dots + m_N - 1)$-szer differenciálható függvény az $I := (a_1, a_N)$ intervallumon, amelynek mindegyik a_k pont legalább m_k-adrendű gyenge zéróhelye. Ekkor van olyan $t \in I$ pont, amelyre $g^{(m_1 + \dots m_N - 1)}(t) = 0$.*

Bizonyítás. A két Lemma alapján szó szerint le lehet másolni az 1. Tétel bizonyítását a *zéróhely* terminus technicust a *gyenge zéróhely* kifejezéssel helyettesítve.

Megjegyzés. Az I intervallum pontjaiban a legalább m-szeres gyenge zéróhely fogalma nem megy lényegesen túl a legalább m-edrendű zéróhely hagyományos fogalmán. Ugyanis a Taylor-formula Lagrange-maradéktagos alakjával bebizonyítható a következő.

Ha f $(m-1)$-szer folytonosan deriválható az a pont egy környezetében, és f-nek a legalább m-edrendű gyenge zéróhelye, akkor az a pont f-nek legalább m-edrendű zéróhelye is.

A 2. Tétel bizonyításakor azonban nem használtuk ezt a tényt.

Stachó László, SZTE TTK, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
stacho@math.u-szeged.hu