POLYGON
II. kötet 2. szám 1992.

MŰHELYSAROK

Felhívás Olvasóinkhoz!

Az eddigi tapasztalatok alapján lapunknak a Műhelysarok rovat a legnépszerűbb része. Ezért különös gondot kívánunk fordítani az itt megjelenő cikkekre. Kerjük Olvasóinkat, hogy akinek van valamilyen érdekes anyaga, ami másokat is érdekelhet, írja meg és küldje be lapunknak. Ez biztosítja, hogy e rovatban sokféle hasznos olvasmány jelenhessen meg. Nagyon várunk olyan dolgozatokat is, amelyekben valamely téma tanításával kapcsolatos tapasztalatokról olvashatunk.

A természetes logaritmusról történeti megközelítésben

STACHÓ LÁSZLÓ

1. Nemrégiben egy cikk jelent meg Huhn Péter tollából [1], amelyben a szerző az exponenciális függvények néhány, a konvexséggel kapcsolatos tulajdonságát eredeti módon elemi úton tárgyalva jut el az $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ szám „természetességének" magyarázatához. Mint a bevezetőjéből kiderül, írását nem kis mértékben az motiválta, hogy a szokásos tankönyvek és előadások az ilyen kérdésekre már szinte nem is fordítanak figyelmet. Be kell vallanom, hogy rajtam is a „deus ex machina" érzése lett úrrá a témával való első találkozásomkor. Szerencsémre azonban kezembe került Feynman „Mai fizika" c. könyve [2], amely egy matematikával foglalkozó passzusban leírta, hogyan készítette Briggs a világ első logaritmustábláját.

Itt most azt szeretném kifejteni, hogy az a módszer, amely meglehetősen híven tükrözi (természetesen mai felfogásban) az eredeti műhelymunkát, alkalmas egy elemi formában az eddigieknél jobban előadható tárgyalására a logaritmus és exponenciális függvényeknek.

Valójában mi is volt, amit Briggs csinált?

14-jegyű logaritmustáblázatot. Számára még „kézenfekvő" volt, hogy alapul a 10-es számot válassza, bár annak a célnak, hogy a szorzást táblázat segítségével összeadásra vezessük vissza, akármilyen (pozitív) szám megfelelt volna. Terve az volt, hogy kiszámítja először 10-nek a 10^{14}-ik gyökét 16 jegy pontossággal, majd rendre megállapítja, hogy az egyes számok ennek hányadik hatványai.

10^{14}-ik gyökvonásra olyan algoritmust, mint a négyzetgyökvonásra (vagy Kepler a köbgyökvonásra) „szerencsére" nem ismert. Így hát 54-szer egymás után gyököt vonva ($2^{54} = 18014398509481984$!) próbálta 10-nek a 10^{14}-ik gyökét $1/2^k$ alakú 10-hatványokból összeszorozva jó közelítéssel kiszámítani.

$$
\begin{array}{llll}
10^{1/2} = \sqrt{10} & & \approx & 3,16228 \\
10^{1/4} \approx \sqrt{3,16228} & & \approx & 1,77828 \\
10^{1/8} & \approx \sqrt{1,77828} & \approx & 1,33352 \\
10^{1/16} & \approx \sqrt{1,33352} & \approx & 1,15478 \\
10^{1/32} & \approx \sqrt{1,15478} & \approx & 1,074607 \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

Észrevette, hogy az 1 utáni törtrész a lépések során mind nagyobb pontossággal csak feleződik.

$$
\begin{array}{lll}
10^{1/2^{25}} & \approx & 1,0000000\underbrace{6862238}_{6862238:2=3431119} \\
10^{1/2^{26}} & \approx & 1,0000000\underbrace{\overbrace{34311192}}_{34311192:2=17155596} \\
10^{1/2^{27}} & \approx & 1,0000000\overbrace{17155596}
\end{array}
.
$$

Briggs a 27-ik gyökvonás után már nem is tett mást, csak felezett (de persze sokkal több értékes jeggyel számolt):

$$
\begin{aligned}
10^{1/2^{28}} &\approx \sqrt{1,000000017155596} \approx 1,000000008577798 \\
&\approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,000000017155596
\end{aligned}
$$

és így tovább. Hogyan írhatjuk fel általános formában Briggs megfigyelését? Ha $10^{1/2^n} = 1 + h_n$, akkor

$$10^{1/2^{n+1}} = 1 + h_{n+1} \approx 1 + \frac{h_n}{2},$$

ahonnan $2h_{n+1} \approx h_n$, vagy szimmetrikusabban $2^{n+1}h_{n+1} \approx 2^n h_n$. Így sejthető, hogy a

$$2^n[10^{1/2^n} - 1] = 2^n h_n$$

sorozat beáll egy állandó érték felé. Azaz, mivel

$$2^{27}[10^{1/2^{27}} - 1] \approx 2^{27} \cdot 0,000000017155596 = 2,302585,$$

nagyon jó közelítéssel

$$10^{1/2^n} \approx 1 + \frac{1}{2^n} \cdot 2,302585 \qquad (n > 27).$$

Valóban, visszaszorzással azt kapjuk pl., hogy $[1 + \frac{1}{2^{40}} \cdot 2,302585]^{2^{40}} \approx 10,00027$.

Az „igazi" persze az volna, ha a 10 helyett egy olyan e szám volna az alap, amelynél a furcsa 2,302585 konstans nem lépne fel. Az utolsó formula analógiájára sejthetjük, hogy ez a kitüntetett szám jó közelítéssel $e \approx (1 + \frac{1}{2^{27}})^{2^{27}}$ lesz.

2. Most vizsgáljuk meg pontosan az előző gondolatmenetet! Legyen a egy tetszőlegesen rögzített $a > 1$ szám. A meglehetősen „misztikus alapon" választott 10 alapszám helyett egy ilyen általános lehetőséget tekintsünk. Vegyük először az egymás utáni gyökvonásokkal kapott

$$a,\ a^{1/2},\ a^{1/4},\ a^{1/8},\ \ldots,\ a^{1/2^n},\ \ldots$$

sorozatot. Vajon konvergál-e az ebből képzett

$$L_n(a) := 2^n[a^{1/2^n} - 1] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

egy, a 10 esetében 2,302585-nek megfelelő számhoz? Az alapgondolat az, hogy

$$a = \left(1 + \frac{L_n(a)}{2^n}\right)^{2^n}.$$

Ebből meglepően egyszerű kapcsolatot kapunk $L_n(a)$ és $L_{n+1}(a)$ között.

$$\left(1+\frac{L_n(a)}{2^n}\right)^{2^n}=\left(1+\frac{L_{n+1}(a)}{2\cdot 2^n}\right)^{2\cdot 2^n}$$

$$1+\frac{L_n(a)}{2^n}=\left(1+\frac{L_{n+1}(a)}{2\cdot 2^n}\right)^2=1+\frac{L_{n+1}(a)}{2^n}+\frac{L_{n+1}(a)^2}{4^{n+1}}$$

$$L_n(a)=L_{n+1}(a)+\frac{L_{n+1}(a)^2}{4\cdot 2^n}.$$

Azaz

$$L_1(a)>L_2(a)>L_3(a)>\cdots>0.$$

Mivel pozitív tagú csökkenő sorozat konvergens, létezik mindig a 10-nél 2,302585-nek megfelelő

$$L(a):=\lim_{n\to\infty}L_n(a)=\lim_{n\to\infty}2^n[a^{1/2^n}-1]$$

határérték.

Most ellenőrizzük, hogy $L_n(a)$ helyett $L(a)$-t írva jól visszakapjuk-e az $a=\left(1+\frac{L_n(a)}{2^n}\right)^{2^n}$ számot.

$$\frac{\left(1+\frac{L(a)}{2^n}\right)^{2^n}}{a}=\frac{\left(1+\frac{L(a)}{2^n}\right)^{2^n}}{\left(1+\frac{L_n(a)}{2^n}\right)^{2^n}}=\left[\frac{1+\frac{L(a)}{2^n}}{1+\frac{L_n(a)}{2^n}}\right]^{2^n}=\left[1+\frac{\omega_n}{2^n}\right]^{2^n}$$

ahol $$\omega_n:=\frac{1+\frac{L(a)}{2^n}}{1+\frac{L_n(a)}{2^n}}-1=\frac{L(a)-L_n(a)}{2^n\left(1+\frac{L(a)}{2^n}\right)}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

2.1. Lemma. *Ha $\omega_n\to 0$ $(n\to\infty)$, akkor*

$$\left[1+\frac{\omega_n}{2^n}\right]^{2^n}\to 1\quad(n\to\infty).$$

Bizonyítás. Általában is, ha $-1\le\omega\le 0$, akkor a Bernoulli egyenlőtlenség szerint (az itt használt változatot elemileg is egyszerű bizonyítani), $1\ge(1+\frac{\omega}{2^n})^{2^n}\ge 1+2^n\frac{\omega}{2^n}=1+\omega$. Tehát

$$1\ge\left[1+\frac{\omega_n}{2^n}\right]^{2^n}\ge 1+\omega_n\qquad\text{ha}\quad -1\le\omega_n\le 0.$$

Vagyis az a részsorozat, amelynek tagjaiban az ω_n kifejezés negatív, 1-hez tart. Képezzük a reciprokát annak a részsorozatnak, amelynek tagjaiban $\omega_n \geq 0$. Itt

$$\frac{1}{(1+\frac{\omega_n}{2^n})^{2^n}} = \left(1+\frac{\omega_n'}{2^n}\right)^{2^n}$$

írható az $\omega_n' := -\dfrac{\omega_n}{1+\frac{\omega_n}{2^n}}$ zéróhoz tartó sorozattal. Ezért az a részsorozat is 1-hez konvergál, amelynek tagjaiban $\omega_n \geq 0$.

□

2.2. KÖVETKEZMÉNY. $\left(1+\dfrac{L(a)}{2^n}\right)^{2^n} \to a \quad (n \to \infty)$.

Most vizsgáljuk meg, hogyan változik $L(a)$ értéke különböző a-knál!

2.3. LEMMA. $L(a^p) = p \cdot L(a) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$.

Bizonyítás. Az $A^p - 1 = (A-1)(A^{p-1} + A^{p-2} + \cdots + 1)$ azonosságot használva, $n \to \infty$ mellett

$$\begin{aligned} L_n(a^p) &= 2^n\left((a^p)^{1/2^n} - 1\right) = 2^n\left((a^{1/2^n})^p - 1\right) \\ &= 2^n(a^{1/2^n} - 1)[a^{(p-1)/2^n} + \cdots + 1] = L_n(a)[a^{(p-1)/2^n} + \cdots + 1] \\ &\to L(a)[1 + \cdots + 1] = L(a)p\,. \end{aligned}$$

□

2.4. KÖVETKEZMÉNY. $L(a^x) = xL(a)$ *pozitív racionális* x*-re.*

Bizonyítás. Ha $p, q = 1, 2, \ldots$, akkor

$$L(a) = L([a^{1/q}]^q) = qL(a^{1/q}) \qquad \text{ahonnan} \quad L(a^{1/q}) = \frac{1}{q}L(a),$$

$$L(a^{p/q}) = pL(a^{1/q}) = \frac{p}{q}L(a)\,.$$

□

2.5. KÖVETKEZMÉNY. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x \cdot L(a)}{2^n}\right)^{2^n} \to a^x$ *pozitív racionális* x*-ekre.*

3. Természetes módon vetődik fel a kérdés, vajon minden pozitív valós x szám előfordulhat-e $L(a)$ alakban. Ha igen, akkor mindig konvergálnia kell az $\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$ sorozatnak.

3.1. TÉTEL. *Az* $\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$ *sorozat*

a) rögzített pozitív x-re növő és felülről korlátos,

b) rögzített negatív x-re valahonnan kezdve pozitív és csökkenő.

Bizonyítás. a) Legyen $x \geq 0$. Ekkor

$$\left(1+\frac{x}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}} = \left[\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^n}\right)^2\right]^{2^n} = \left(1+\frac{x}{2^n}+\frac{x^2}{4^{n+1}}\right)^{2^n} \geq \left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}.$$

Másrészt, pl. $L(10) > 0$. (Ezt nem Briggs „kísérleti" adataiból, hanem a 2.2. Következményből tudjuk!) Ezért vehetünk olyan N-et, melyre $x < N\cdot L(10) = L(10^N)$. Most

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^n}\right)^{2^n} < \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{L(10^N)}{2^n}\right)^{2^n} < \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{L_n(10^N)}{2^n}\right)^{2^n} = 10^N$$

függetlenül $n = 1, 2, \ldots$-től.

b) Legyen $x \leq 0$. Ekkor elegendően nagy n-re $x/2^n > -1$, és ilyenkor

$$0 \leq \left(1+\frac{x}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}} = \left[\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^n}\right)^2\right]^{2^n} = \left(1+\frac{x}{2^n}+\frac{x^2}{4^{n+1}}\right)^{2^n} \leq$$
$$\leq \left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n} \leq 1.$$

□

3.2. DEFINÍCIÓ. A fenti tétel alapján bevezetjük az

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$$

exponenciális függvényt a valós számegyenesen, $\mathbf{R}$-en.

Jegyezzük meg, hogy a 2.2. Következmény szerint $\exp(L(a)) \equiv a$.

3.3. TÉTEL. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R})$.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbf{R}$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor

$$\frac{\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}\left(1+\frac{y}{2^n}\right)^{2^n}}{\left(1+\frac{x+y}{2^n}\right)^{2^n}} = \left[\frac{\left(1+\frac{x}{2^n}\right)\left(1+\frac{y}{2^n}\right)}{1+\frac{x+y}{2^n}}\right]^{2^n}$$
$$= \left[1+\frac{\omega_n}{2^n}\right]^{2^n} \to 1 \qquad (n\to\infty)$$

a 2.1. Lemma szerint, mivel a maradéktagra fennáll

$$\omega_n = \frac{xy}{2^n+x+y} \to 0 \qquad (n\to\infty)\,.$$

□

3.4. KÖVETKEZMÉNY. $e := \exp(1)$-re $e^x = \exp(x)$ $(x \in \mathbf{R})$.

Bizonyítás. A 3.1. Tétel a) pontjából rögtön adódik, hogy $\exp(x) > 1$ ha $x > 0$. Ha tehát $x > y$, akkor az előző tétel szerint

$$\exp(y) = \frac{\exp(y+|y|)}{\exp|y|} > 0\ , \qquad \exp(x) = \exp(y)\exp(x-y) > \exp(y).$$

Vagyis az exp függvény pozitív és szigorúan növő. A 2.5. Következmény szerint pozitív racionális x-re $e^x = \exp(x)$. Az $x \mapsto e^x$ függvényről tudjuk, hogy folytonos és növő. Így az exp függvény növősége miatt minden pozitív x-re $\exp(x) = e^x$. Befejezésül csak annyit kell még megjegyeznünk, hogy most már negatív x-nél is $\exp(x) = \exp(0)/\exp(-x) = 1/\exp(-x) = 1/e^{-x} = e^x$.

□

JELÖLÉS. Szokásosan Euler-féle számnak nevezik, és standard módon e-vel jelölik az $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ számot. Az e-alapú logaritmusfüggvényt természetes logaritmusnak hívják, és egyszerűen log-nak (az elméleti matematikusok) vagy ln-nek (logarithmus naturalis) írják.

Mivel, mint megjegyeztük 3.3.-ban, a pozitív féltengelyen az $L(\cdot)$ függvény inverze az exp, a 3.4. Következmény egy olyan „slusszpoénhoz" vezet, amelyet a Briggs-féle gondolatmenet alapján közvetlenül nem is vártunk.

3.6. TÉTEL. *Minden $x > 0$-ra* $\log x = \lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n} - 1)$.

Bizonyítás. $x > 1$-re $e^{L(x)} = \exp(L(x)) = \lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n} - 1)$, mint láttuk. Az $x = 1$ eset triviális. Az $x < 1$ eset $y := 1/x$ vételével visszavezethető az előzőre. Most $y > 1$, és így $n \to \infty$-re $2^n(y^{1/2^n} - 1) \to \log y$ és $y^{1/2^n} \to 1$. Ezért kapjuk, hogy $2^n(x^{1/2^n} - 1) = 2^n(y^{-1/2^n} - 1) = y^{1/2^n} \cdot 2^n(1 - y^{1/2^n}) \to -\log y = \log x$.

□

4. Tekintsük át, milyen matematikai apparátust használtunk az előzőekben, és hogyan lehet tovább menni.

Ha a középiskolai oktatás szempontjaiból indulunk ki, az $L_n(a)$ sorozat monotonitásáig leírtak mindenütt elmondhatók. A konkrét számításokat érdekes lehet PC-n is bemutatni. IBM-kompatibilis kisgépen az itt közölteknél jobb pontosság csak nagy nehézséggel – pl. a kézi gyökvonás imitálásával – érhető el.

Ettől kezdve a határérték fogalmának a látszólag teljesen szabad alkalmazása tűnhet fel először.

A határérték elemi körülírása (ami rutinszerűen véghezvihető) kétségtelenül elfedi a gondolatokat. Ezzel szemben, igazából elég kevés tételt kell ezzel kapcsolatban tudnunk.

Alapvető szerepet játszik a korlátos monoton sorozatok limeszének a létezése — mind az $L(\cdot)$ mind az exp függvény definíciójánál. Ez a probléma azonban eleve a hátterében van már a gyökvonás elvégezhetőségének is.

A 2.1. Lemma bizonyításában direkt adódik, hogy

$$1 \geq \left[1 + \frac{\omega_n}{2^n}\right]^{2^n} \geq 1 + \omega_n > \varepsilon \qquad \text{ha} \quad -\varepsilon < \omega_n \leq 0.$$

Másrészt, a reciprokok sorozatának 1-hez tartását elemi becslésre nem természetellenes lefordítani a speciális határérték miatt.

Az utolsó új fogás határértékkel kapcsolatban a 3.4. Következményben jelenik meg. Itt arról van szó, hogy ha két folytonos függvény a racionális számokon egybeesik, akkor egyenlők. Ha persze csak racionális hatványokban vagyunk érdekeltek, akkor ezt az elvet nem is kell bevetni. Ha azonban az összes valós hatványt is tekinteni akarjuk, akkor egyenesen célszerű az $x \mapsto a^x$ függvények folytonosságát az $L_n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat konvergenciájából levezetni (a függvény monotonitását kihasználva).

Elemi matematikai oldalról mindössze az $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, illetve $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$ azonosságokra és a Bernoulli egyenlőtlenségnek az $(1+a)^n \geq 1+na \quad (a \geq -1,\ n = 1,2,\ldots)$ speciális esetére van szükség. (Szigorúan véve, az utóbbi kettő bizonyítása teljes indukciót kíván.)

Talán azt érdemes kiemelnünk, hogy a binomiális tételt a szokásos tárgyalásoktól eltérően nem használjuk. Ezért az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ sorozat konvergenciáját mi csak az $n = 1,2,4,8,\ldots$ diadikus indexű részsorozatra tudjuk. Hol jelenthet ez később hátrányt? Maga a binomiális tétel elkerülhetetlennek látszik, ha az $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ sorfejtést az $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ relációból kívánjuk levezetni. Egy másik jól ismert megközelítése az e^x sorfejtésének a $f' = f$ differenciálegyenleten keresztül történik. Huhn Péter konvexitáson alapuló tárgyalásánál az említett differenciálegyenlet igen természetes módon adódik (bár sajnos ez a cikkében nincs kihangsúlyozva). Hogyan érdemes ezt a mi megközelítésünk után bebizonyítani? A Bernoulli egyenlőtlenség említett verziójából $1+x \leq (1+x/2^n)^{2^n} \to e^x$ következik $x > -1$-re (és itt a konvergencia monoton). Tehát $1+x \leq e^x = 1/e^{-x} \leq 1/(1-x)$ ha $\|x\| < 1$. Mivel a közrefogó $1+x$ illetve $1/(1-x)$ függvények differenciálhányadosa a 0 helyen 1, fennáll $\frac{d}{dx}e^x|_{x=0} = 1$ is. Ezeket az érveket a speciális $1+x$, $1/(1-x)$, ill. e^x függvényekre elemileg is elő lehet adni. A $\frac{d}{dx}e^x|_{x=0} = 1$ relációból szokásos szinte minden tankönyvben standard algebrai átalakításokkal a $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ egyenletet kimutatni.

IRODALOM

[1] Huhn P., A természetes logaritmus alapszámáról, Polygon, I/1 (1991),27-43.

[2] R.P. Feynman - R.B. Leighton - M. Sands, Mai fizika (2. kötet 22.4), Műszaki Könyvkiadó, (Budapest, 1968).

Stachó László, JATE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

Bármilyen hosszú és végtelen hosszú

CSÚRI JÓZSEF

Melyik matematikatanár ne tapasztalta volna — akár általános iskolában, akár középiskolában — hogy a tanulók között mindig akadnak olyanok, akik az egyenes „szomszédos" pontjairól beszélnek. Egyetemi hallgatók körében történt az alábbi eset: Az egyik feladatban szerepelt, hogy „Az