TARTALOMJEGYZÉK

Stachó László

BEVEZETÉS A TÖBBVÁLTOZÓS KOMPLEX FÜGGVÉNYTANBA

Bolyai Intézet
Szeged, 2004

ELŐSZÓ

Amikor Cauchy alapvető munkásságát betetőzve 1884-ben Goursat vonalintegrál-lemmája nyomán kiderült, hogy egy függvénynek elegendő csak a komplex értelemben való differenciálhatósága ahhoz, hogy minden pontja körül Taylor-sorba fejthető legyen, a matematikus közvélemény joggal tekintette ezt az eredményt mint Newton álmának beteljesedését: megtaláltuk azt a természetes kontextust, ahol minden függvény "végtelen polinom", és nincs helye az azidőtájt kialakuló valós függvénytan "patologikus függvényeinek". Ezzel világossá vált, hogy rengeteg végtelen egyenletrendszer kezelhető az analízis eszközeivel függvényegyenletekként, ill. differenciál-egyenletekként – sorfejtéseket használva. Csakhogy a fizikai alkalmazások jól-ismert végtelen egyenletrendszerei (amelyeket mi már nagyrészt csak analitikus formában látunk: mint parciális differenciálegyenleteket) általában többváltozós függvényekre vezetnek. Sőt, Heisenberg eredetileg "vegytisztán" végtelen lineáris egyenletrendszer formájában megfogalmazott határozatlansági relációi a szigorú matematikai tárgyalás során végtelen-dimenziós terek közötti függvények vizsgálatához vezettek. Ez utóbbiak ugyan kezdetben csak lineárisok voltak, a térelméletek későbbi fejlődése azonban már nemlineáris függvényeket is megkövetelt. A XIX. század matematikusai erről mit sem sejthettek. Természetes volt azonban, hogy az egyváltozós holomorf függvényeken túl n-változós analitikus (lokálisan n-változós hatványsorokkal megadható) leképezéseket is vizsgáljanak. Már Riemann talált olyan eredményeket, amelyek meglepően éles kontrasztban voltak az egyváltozós tapasztalatokkal. Például egy, az origón kívül mindenütt értelmezett komplex-analitikus függvény mindig folytatható holomorf módon az egész térre 1-nél több dimenzióban, szemben az $1/z$ függvény triviális esetével. Sőt, 2-dimenziótól kezdve még olyan korlátos tartományok is vannak, amelyek topologikusan egy gömbbel ekvivalensek, mégis minden rajtuk holomorf függvény folytatható holomorf módon egy nagyobb tartományra – szemben az egydimenziós konform leképezések alaptételével, mely szerint egy körlappal toplogikusan ekvivalens korlátos tartomány injektív holomorf módon ráképezhető az egységkörlapra; az egység-körlapon azonban léteznek a határ felé végtelenhez tartó, s így nagyobb tartományra holomorf módon nem folytatható holomorf függvények. A "végtelen polinomok képletszerű folytathatósága" a sorfejtés abszolútkonvergencia-tartományán túl – mint a $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ függvény esete az $(|z| < 1)$ körön kívül – megragadta már Euler figyelmét is. Őt ez a jelenség a divergens sorok vizsgálatára ösztönözte. A holomorfia–sorfejthetőség elv következetes alkalmazása egészen más irányt adott a kutatásoknak: a többrétű tartományok (Riemann-felületek), majd a komplex sokaságok és a homológiaelméletek felé vezetett. E fogalmi apparátus elemeit jelenlegi matematikai oktatásunk sajnos alig tárgyalja, így ennek a nagyon fontos témakörnek csak a többrétű holomorfiatartományokkal kapcsolatos alapismereteit tudjuk bemutatni a könyvben. Ennél messzebb jutunk egy másik irányban: a végtelen-dimenziós holomorfia felé.

A többváltozós komplex függvénytannal való első találkozásomkor, mely Edoardo Vesentini PhD-kurzusán történt a pisai Scuola Normale Superiore-n 1977-ben, megdöbbentett, de egyben nagy örömmel is töltött el, hogy az előadás második féléve már a Banach-terekbeli holomorfiával kezdődött, azaz hamar átugrottunk "végtelen változóra". Pedig ennek az oktatási koncepciónak természetes a magyarázata: amióta a modern, immár középiskolában is tanított függvényfogalom létezik, a "többváltozós" jelző paradoxul hangzik: minden függvénynek definíció szerint csak egyetlen változója lehet. Például a kétváltozósnak tekintett $z_1 + z_2$ függvény valójában nem más, mint a (ζ_1, ζ_2) rendezett komplex számpárhoz a $\zeta_1 + \zeta_2$ összeget rendelő függvény, amelynek értemezési tartománya a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ Descartes-szorzat, egyetlen változója tehát a (z_1, z_2) pár. Ebben a szellemben pedig már "első nekifutásra" is úgy célszerű a vizsgálatokat végezni, hogy valamilyen X vektortéren értelmezett függvényeket tekintünk, és megpróbálunk egy olyan kalkulust kialakítani, amelyben érvényes marad a Taylor-sorfejtés $f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n$ képlete. Mi lehet itt az $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ kifejezés értelme, ha x és a vektorok, és milyen értelemben összegezhető végtelen sok vektor? Az első kérdés, mint látni fogjuk, természetes módon vezet a vektorpolinomok tisztán algebrai fogalmához és a lineáris algebra kiterjesztéséhez. A második kérdésre is van kezdeti kézenfekvő válasz: a szám abszolútértékével analóg módon a vektorokhoz "hosszértéket", azaz normát kell rendelni, és olyan X terekben érdemes dolgozni, amelyekben a Cauchy-sorozatok a számok esetéhez hasonlóan konvergensek – azaz valóban célszerű tanulmányainkat Banach-terekben kezdeni.

Ez a könyv a Szegedi Tudományegyetemen matematikus, fizikus és matematikatanár szakos hallgatók számára tartott előadásaim kibővített változata. Eredetileg Wilhelm Kaup 1990-es briliánsan tömör tübingeni előadásait vettem mintául. Ezeket kb. III. éves, matematikusnak, ill. matematikatanárnak készülő hallgatók vették föl a szokásos egyváltozós komplex függvénytani kurzus, ill. egy metrikus és normált tereket is tárgyaló valós analízis után. Kaup indítótémául rögtön a Banach-terek fölötti hatványsorok konvergenciáját választotta, amit Riemann folytatási tételeinek új, az analitikus halmazokat is szokatlanul tárgyaló, és az ún. Weierstrass-féle preparációs tételt kikerülő, koordinátamentes bizonyításai követtek. Majd pedig sorra jöttek a Riemann-felületek és a holomorfia-burkolók konstrukciói függvénycsírák terein. A második félévben a komplex Banach-sokaságok és a holomorf-invariáns Finsler-metrikák következtek. E kiindulásból felépített szegedi elődadásom az évek során – oktatási tapasztalataimat követve – alaposan átalakult. Könyvem tükrözi e változásokat.

Az első fejezetben csak 2-változós holomorf függvényekkel foglalkozom. Olyan kérdést is tárgyalok, hogy mi a hatványsor konvergenciatartományát leíró Cauchy–Hadamard-formula 2-dimenziós változata. A Cauchy-féle integrálformulák 2-változós variánsa alpján pedig teljes részletességgel bebizonyítom Hartogs tételét a parciális holomorfia elegendőségéről. Ez aránylag ritka a tankönyvekben, pedig a hallgatók érdeklődnek iránta. Itt lehet alapismereteket szerezni a szubharmonikus függvényekről is.

A második fejezet már "végtelen-dimenziós", de csak az 1-dimenziós ismert elvek, mint pl. a maximum-elv közvetlen általánosítását visszük végbe olyan (ún. Gâteaux-holomorf) leképezésekre, amelyek 1-változós metszetei holomorfak a szokásos értelemben. Ez alkalmat ad a klasszikus anyag átismétlésére, másrészt a bizonyítások egyszerű 1-dimenziós sémája segíthet eloszlatni a "matematikai tériszonyt" (azaz, némi szójátékkal, az idegenkedést a többdimenziós terektől). Az elmélet erejét már ezen a szinten is demonstrálandó, a példák között bemutatom a nevezetes lineáris operátorelméleti Putnam–Fuglede-tétel Rosenblumtól származó, lélegzetelállítóan rövid bizonyítását az általánosított Liouville-tétel alkalmazásaként.

A harmadik fejezetet a vektorpolinomok algebrájával kezdem. A szokásos polarizációs formulák mellett bemutatom a Cauchy-féle integrálformula diszkrét változatát, amelyből Banach-terekben valóban megkapható határátmenettel az integrálformula – teljes általánosságban holomorf leképezésekre is (azonban a Banach-tereknél egy direktebb utat fogunk járni). A tiszta algebrai kezdet után áttérek vektor–vektor hatványsorfüggvényekre, majd a Fréchet- és Weierstrass-féle holomorfiafogalmakra normált terekben.

E három, bevezetőnek tekinthető fejezet után a negyedik az, amely az első igazán modern eredményeket tárgyalja immár a Banach-terek kontextusában. Megmutatom, hogy az általánosságnak mennyiben nem megszorítása az elmélet Banach-terekre való korlátozása. A fejezet fő témája a Banach-térbeli holomorfia két alaptétele: a folytonos gyengén Gâteaux-holomorf, ill. az egy pontnál korlátos Gâteaux-holomorf leképezések sorfejthetősége (Weierstrass-holomorfiája). A fejezet alkalmas önálló rövid kurzus anyagaként is a Banach-térbeli alapelveket ismerők számára. A könyv függelékében felsoroltam a szükséges előismereteket – valójában éppen az olyan alkalmazásokon keresztül lehet jól elsajátítani ezeket, mint amilyenek ebben a könyvben is találhatók. A folytonos Gâteaux-holomorf leképezések sorfejthetőségét a Hartogs-tétel helyett az elemi analízisből ismert, a parciális deriváltak folytonosságából a totális differenciálhatóságra következtető Lagrange-féle tétel alkalmazásával bizonyítom; s a másik alaptételnél is csak a 2-változós (tehát az első fejezetben teljességgel tárgyalt) Hartogs-tételt használom. E fejezet foglalkozik még a korlátos tartományok közti holomorf leképezések néhány alaptulajdonságával is.

Az ötödik fejezet legérdekesebb része Riemann már említett két folytatási tételének Kaup-féle bizonyítása. A Hartogs-cső itt használt fogalma tőlem származik ugyan, de pontosan az eredetileg vázlatos Kaup-előadás alapeszméjét tükrözi. Természetesen ez a fejezet a holomorfiatartományok és a pszeudokonvexitás klasszikus témakörét is felöleli, mégpedig koordinátamentes, végtelen dimenziós megközelítésben. A Levi-sejtés megoldását bizonyítás nélkül ismertetjük.

A hatodik fejezetben kerül sor a Riemann-felületekre. Úgy tűnik, ezek az egy dimenzióban is fontos struktúrák távol állnak oktatási hagyományainktól – a függvényosztályok univerzális holomorfia-tartományához szükséges függvénycsíra–kéve-konstrukciókról (az angol szakirodalomban "sheaf theory" néven ismert elmélet elemei) nem is beszélve. A többrétű tartományokhoz a többértékű holomorf függvényeket érintve jutok el . Az univerzális holomorfia-burkolók megalkotásához a topologikus "sheaf"-konstrukciók bevezetése helyett a holomorf függvények görbék mentén való kiterjesztését vettem alapul. A fogalom hasznosságát sokakhoz hasonlóan körszerű tartomány burkolójának példájával illusztrálom.

A két utolsó fejezet geometriai ihletésű, mondhatni bevezetés a korlátos tartományok holomorf geometriájába. E témakör jelentőségét az adja, hogy egyes tartományok holomorfautomorfizmus-csoportjai fizikai rendszerek dinamikai modelljeiként is tekinthetők. Itt a Bolyai-geometria Poincaré-féle komplex függvénytani modelljéből indulok ki, a távolságfüggvényből levezetve az alapfogalmakat (ami a Bolyai-geometria önálló, bár kevéssé szokványos bevezetőjének is tekinthető). Megmutatjuk, hogy ez a távolságfüggvény egy konstans faktor erejéig az egyedüli holomorf-invariáns metrika a komplex sík egység-körlapján. Ezután megvizsgáljuk, hogy hasonló stratégia alkalmazása milyen eredményre vezet az egységkörlap helyett tetszőleges Banach-térbeli korlátos tartomány geometrizálásakor. Így kapjuk két szélsőségként a Kobayashi- ill. Carathéodory-féle metrikákat. Ismertetjük Lempert László tételét is ezek egybeeséséről a konvex esetben. A könyvet három klasszikus szimmetrikus tartomány holomorf automorfizmusainak leírásával zárjuk, melyek sok későbbi kutatást motiváltak.

Igyekeztem úgy szervezni mondanivalómat, hogy a könyv minél kevesebb előismerettel legyen olvasható, egyes fejezetei pedig egymástól minél függetlenebbek legyenek. A könyv folyamatosan olvasható abban az értelemben, hogy minden olyan fogalmat és tételt leírok a szövegben, amely nem tartozik a matematikai alapkurzusokhoz (ide értve még a funkcionálanalízis elemeit is). Ezen túlmenően az Olvasó a függelékhez fordulhat, ha valamely jelöléssel vagy előismerettel kapcsolatban több információt szeretne.