30 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1990

УДК 519.21

О ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{F}\mathcal{L}$-СТАТИСТИКИ. II

Р. Зитикис

В первой части [17] данной работы без доказательств были приведены результаты о степени дифференцируемости функции распределения $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистики (линейной комбинации функций от порядковых статистик). Как частные случаи рассматривались $\mathcal{L}$-, ω- и некоторые другие статистики. В этой части приведены доказательства результатов из [17].

§4. Доказательства результатов

Доказательство теоремы 2.1. Фиксируем $|t|\geqq 1$ и $T>0$. Тогда

$$W_t=\Phi_0(-\infty), \tag{4.1}$$

где $\Phi_0(y)$ для любого $y\in[-\infty,+\infty]$ определяется при помощи рекуррентной последовательности

$$\Phi_n(z)\equiv 1,$$

$$\Phi_{j-1}(z):=\int\limits_{(z,+\infty)} p_j(x)H_j^{k_j}(x)\Phi_j(x)e^{itH_j(x)}\,dx,$$

$j=n,\ldots,2,1$, функций, корректно определенных для любого $z\in[-\infty,+\infty]$.

Для каждого $j=0,1,\ldots,n$ обозначим

$$\varphi_j:=\bigvee_{z\in\mathbf{R}}|\Phi_j(z)|.$$

Ясно, что $\varphi_n=1$. Кроме того, нетрудно убедиться, что для любого $j\in I$

$$\varphi_{j-1}\leqq\varphi_{\sigma-1}\rho^{\sigma-j-(k_j+\ldots+k_{\sigma-1})/s}\mu^{(k_j+\ldots+k_{\sigma-1})/s}, \tag{4.2}$$

если $s>0$, и

$$\varphi_{j-1}\geqq\varphi_{\sigma-1}\rho^{\sigma-j},$$

если $s=0$, где $\sigma:=\wedge\{k\in I\cup\{n+1\}:k\geqq j\}$.

Итак, осталось оценить φ_{j-1} в случае $j\in I$. Пусть $z\in[-\infty,+\infty]$ – некоторое число. Тогда

(здесь $O_v:=(z,+\infty)\cap(x_{v-1},x_v)=$скажем (ω_{v-1},ω_v))

$$\leqq\sum_{v=1}^{V}\left|\int\limits_{\partial O_v}\ldots dx\right|+\sum_{v=1}^{V}\left|\int\limits_{\mathring{O}_v}\ldots dx\right|, \tag{4.3}$$

где для любого $v=1,2,\ldots,V$

$$\mathring{O}_v:=(\omega_{v-1}+T,\ \omega_v-T)\cap(-\xi(T),\ \xi(T)),$$

$$\partial O_v:=(\omega_{v-1},\ \omega_v)\backslash\mathring{O}_v.$$

Заметим, что $\mathring{O}_v\subseteq\mathring{\Omega}_v$ и внутренность множества ∂O_v содержится во множестве $\partial\Omega_v\cup\{\mathbf{R}\backslash(-\xi(T),\xi(T))\}$ (определения множеств $\mathring{\Omega}_v$ и $\partial\Omega_v$ приведены в формулировке теоремы).

Обозначим

$$\eta_j:=\begin{cases}\mu^{k_j/s}\{\Theta(T)+\Xi(T)\}^{1-k_j/s} & \text{в случае } s>0,\\ \Theta(T)+\Xi(T) & \text{в случае } s=0\end{cases}$$

и докажем оценку

$$\left|\int\limits_{\partial O_v}p_j(x)H_j^{k_j}(x)\Phi_j(x)e^{itH_j(x)}\,dx\right|\leqq\varphi_j\eta_j. \tag{4.4}$$

Оценив $\int\limits_{\partial O_v}\ldots dx$ по модулю, получим

$$\varphi_j\int\limits_{\partial O_v}|p_j(x)|\,|H_j(x)|^{k_j}\,dx.$$

Поэтому осталось доказать

$$\int\limits_{\partial O_v}|p_j(x)|\,|H_j(x)|^{k_j}\,dx\leqq\eta_j,$$

что немедленно следует из неравенства Гёльдера, вспомнив тот факт, что внутренность множества ∂O_v содержится в

$$\partial\Omega_v\cup\{\mathbf{R}\backslash(-\xi(T),\ \xi(T))\}.$$

Оценка (4.4) полностью доказана.

Рассмотрим интеграл

$$I:=\int\limits_{\mathring{O}_v}p_j(x)H_j^{k_j}(x)\Phi_j(x)e^{itH_j(x)}\,dx.$$

Для этой цели определим

$$\Psi_j(D):=\int\limits_{\mathring{O}}\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\prod_{d=0}^{D-1}\{H_j'(x)+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\times$$

для всех $D=0,\ 1,\ \ldots,\ j_1-j$ (припомним, что j — фиксированное число из множества I). Нетрудно видеть, что выражение $\Psi_j(D)$ при выполнении условий теоремы определено корректно. Кроме того, справедливо равенство

$$I=\int\limits_{\mathring{O}_v} \ldots\, dx=\Psi_j(0). \tag{4.5}$$

Обозначим

$$\psi_j(D):=(D+1)\{2+\Upsilon(T)+\lambda(T)\Gamma(T)+2s\rho\}\times$$
$$\times\{1\vee\pi(T)\}^{D+1}\{1\vee\Lambda(T)\}^{k_j+\ldots+k_{j+D}}/\{|t|\wedge|t|\lambda(T)\}^{D+1}.$$

Тогда для всех $D=0,\ 1,\ \ldots,\ j_1\wedge(n-1)-j$ справедлива рекуррентная оценка (доказательство ниже)

$$|\Psi_j(D)|\leqq\{\varphi_{j+D}|t|^{D+1}\psi_j(D)+|\Psi_j(D+1)|\}/|t|. \tag{4.6}$$

Если предположим, что $\Psi_j(D+1)=0$ в случае $D=n-j$, то (4.6) будет определена корректно для всех $D=0,\ 1,\ \ldots,\ j_1-j$. Отсюда немедленно будет следовать оценка

$$|\Psi_j(0)|\leqq\sum_{D=0}^{j_1-j}\varphi_{j+D}\psi_j(D)+|\Psi_j(j_1-j+1)|/|t|^{j_1-j+1}. \tag{4.7}$$

Оценим $\Psi_j(j_1-j+1)$. Поскольку $\Psi_j(n-j+1)=0$, то без ограничения общности будем рассматривать только случай $j_1\leqq n-1$.

$$|\Psi_j(j_1-j+1)|\leqq\varphi_{j_1+1}\int\limits_{\mathring{\Omega}_v}\prod_{d=j}^{j_1+1}|p_d(x)H_d^{k_d}(x)|\times$$
$$\times\prod_{d=0}^{j_1-j}|H'_j(x)+\ldots+H'_{j+d}(x)|^{-1}dx\leqq\varphi_{j_1+1}\pi(T)^{j_1-j+1}\times$$
$$\times\Lambda(T)^{k_j+\ldots+k_{j_1}}\int\limits_{\mathring{\Omega}_v}|p_{j_1+1}(x)H_{j_1+1}^{k_{j_1+1}}(x)|\,dx/\lambda(T)^{j_1-j+1}.$$

Чтобы не выделять случаев $s=0$ и $s>0$, согласимся в дальнейшем k_l/s считать равным 0 при $s=0$. Например, при таком соглашении оценка

$$\int\limits_{\mathring{\Omega}_v}|p_{j_1+1}(x)|\,|H_{j_1+1}^{k_{j_1+1}}(x)|\,dx\leqq\mu^{k_{j_1+1}/s}\rho^{1-k_{j_1+1}/s}$$

справедлива для всех $s\leqq 0$. Отсюда следует

$$|\Psi_j(j_1-j+1)|\leqq\varphi_{j_1+1}\Delta_j(j_1-j+1)|t|^{j_1-j+1} \tag{4.8}$$

в случае $j_1\leqq n-1$, где

$$\Delta_j(j_1-j+1):=\mu^{k_{j_1+1}/s}\rho^{1-k_{j_1+1}/s}\pi(T)^{j_1-j+1}\times$$

Обозначим $\varphi_{n+1}:=0$, $\Delta_j(n-j+1):=0$. Тогда из (4.3), (4.4), (4.7), (4.8) при всех $j\in I$ будет следовать оценка

$$\varphi_{j-1}\leqq V\varphi_j\big(\eta_j+\psi_j(0)\big)+\sum_{D=j+1}^{j_1}V\varphi_D\psi_j(D-j)+$$
$$+V\varphi_{j_1+1}\Delta_j(j_1-j+1). \tag{4.9}$$

Обозначим

$$A:=V\big(4+2s+\Upsilon(T)+\lambda(T)\Gamma(T)\big),$$
$$\alpha(T):=1\vee\Lambda(T)\vee\{\Theta(T)+\Xi(T)\}^{-1},$$
$$\beta(t,\ T):=\{|t|\wedge|t|\lambda(T)\}\{1\vee\pi(T)\}^{-1}\wedge\{\Theta(T)+\Xi(T)\}.$$

Тогда

$$V\big(\eta_j+\psi_j(0)\big)\leqq(1\vee\mu)^{k_j/s}(1\vee\rho)A\,\alpha(T)^{k_j}/\beta(t,\ T),$$
$$V\psi_j(D)\leqq(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_{j+D})/s}(1\vee\rho)A(D+1)\alpha(T)^{k_j+\ldots+k_{j+D}}/\beta(t,\ T)^{D+1}$$

для всех $D=1,\ 2,\ \ldots,\ j_1-j$,

$$V\Delta_j(j_1-j+1)\leqq(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_{j_1+1})}(1\vee\rho)A(j_1-j+1)\times$$
$$\times\alpha(T)^{k_j+\ldots+k_{j_1}}/\beta(t,\ T)^{j_1-j+1},$$

если $j_1\leqq n-1$, и $V\Delta_j(j_1-j+1)=0$, если $j_1=n$.

Покажем, что при $\beta(t,\ T)\geqq 4$ для всех $j=1,\ \ldots,\ n$ справедлива оценка

$$\varphi_{j-1}\leqq A^{\#(I\cap\{k:k\geqq j\})}(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_n)/s}4^{n-j+1}\times$$
$$\times(1\vee\rho)^{n-j+1}\alpha(T)^{k_j+\ldots+k_n}/\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq j\})}, \tag{4.10}$$

что при $j=1$ даст утверждение теоремы в случае $\beta(t,\ T)\geqq 4$.

Итак, осталось доказать (4.10). При $j=n$ неравенство (4.10) выполнено независимо от того $j\overline{\in}I$ или $j\in I$. Это следует из (4.2) в первом случае и из оценки $\varphi_{n-1}\leqq V\big(\eta_n+\psi_n(0)\big)$ — во втором.

Предположим, что $j<n$ и оценка (4.10) справедлива для всех $r=j+1,\ \ldots,n$. Покажем, что она справедлива и в случае $r=j$.

Пусть $j\overline{\in}I$. Тогда (см. (4.2))

$$\varphi_{j-1}\leqq\varphi_{\sigma-1}(1\vee\rho)^{\sigma-j}(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_{\sigma-1})/s}\leqq$$
$$\big(\sigma:=\wedge\{k\in I\cup\{n+1\}:k\geqq j\}\big)$$
$$\leqq A^{\#(I\cap\{k:k\geqq\sigma\})}(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_n)/s}4^{n-\sigma+1}\times$$
$$\times(1\vee\rho)^{n-j+1}\alpha(T)^{k_\sigma+\ldots+k_n}/\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq\sigma\})},$$

что доказывает оценку (4.10), поскольку $j\leqq\sigma$, $\alpha(T)\geqq 1$ и $I\cap\{k:k\geqq\sigma\}=$ $=I\cap\{k:k\geqq j\}$.

Пусть $j\in I$. Тогда

$$\varphi_jV\{\eta_j+\psi_j(0)\}\leqq A^{\#(I\cap\{k:k\geqq j+1\})+1}4^{n-j+1}\times$$
$$\times(1\vee\mu)^{(k_j+\ldots+k_n)/s}(1\vee\rho)^{n-j+1}(1/4)\times$$

$$\varphi_D V\psi_j(D-j)\leqq I_j(D):=A^{\#(I\cap\{k:k\geqq D+1\})+1}\times$$
$$\times(1\vee\mu)^{(k_j+\dots+k_n)/s}(1\vee\rho)^{n-D+1}4^{n-D+1}(D-j+1)(1/4)\times$$
$$\times\alpha(T)^{k_j+\dots+k_n}/\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq D+1\})+D-j+1} \tag{4.12}$$

для всех $D=j+1,\ \dots,\ j_1$.

Оценим $\varphi_{j_1+1}V\Delta_j(j_1-j+1)$. Интересен только случай $j_1\leqq n-1$.

$$\varphi_{j_1+1}V\Delta(j_1-j+1)\leqq A^{\#(I\cap\{k:k\geqq j_1+2\})+1}(1\vee\mu)^{(k_j+\dots+k_n)/s}\times$$
$$\times(1\vee\rho)^{n-j_1}4^{n-j_1}(j_1-j+1)(1/4)\,\alpha(T)^{k_j+\dots+k_{j_1}+k_{j_1+2}+\dots+k_n}/$$
$$/\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq j_1+2\})+j_1-j+1}\leqq I_j(j_1). \tag{4.13}$$

Оценки (4.11)–(4.13) совместно с (4.9) доказывают

$$\varphi_{j-1}\leqq 2\{I_j(j)+\dots+I_j(j_1)\}\leqq$$
$$\leqq A^{\#(I\cap\{k:k\geqq j\})}(1\vee\mu)^{(k_j+\dots+k_n)/s}(1\vee\rho)^{n-j+1}\times$$
$$\times 4^{n-j+1}\alpha(T)^{k_j+\dots+k_n}C/\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq j\})}.$$

Здесь

$$C:=\sum_{D=j}^{j_1}(1/2)(D-j+1)\{A^{\#(I\cap\{k:k\geqq j\})-\#(I\cap\{k:k\geqq D+1\})-1}\times$$
$$\times\beta(t,\ T)^{\#(I\cap\{k:k\geqq D+1\})+D-j+1-\#(I\cap\{k:k\geqq j\})}(1\vee\rho)^{D-j}4^{D-j}\}\leqq$$

(поскольку $D\geqq j$ и $A,\ \beta(t,\ T)\geqq 4$)

$$\leqq\sum_{D=j}^{j_1}(1/2)(D-j+1)\,4^{-(D-j)}\leqq\frac{1}{2}\sum_{D=0}^{\infty}(D+1)\,4^{-D}\leqq 1.$$

В случае $\beta(t,\ T)\leqq 4$ интеграл W_t оценим по модулю. Получим

$$|W_t|\leqq\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbf{R}}|p_j(x)|\,|H^{k_j}(x)|\,dx\leqq$$

применив неравенство Гёльдера

$$\leqq(1\vee\rho)^n(1\vee\mu)^{1(s>0)}\leqq$$

поскольку $\#I\leqq n,\ A\geqq 1,\ \alpha(T)\geqq 1,\ \beta(t,\ T)\leqq 4$, то

$$\leqq A^{\#I}(1\vee\rho)^n(1\vee\mu)^{1(s>0)}4^n\alpha(T)^s/\beta(t,\ T)^{\#I}.$$

Утверждение теоремы доказано и в случае $\beta(t,\ T)\leqq 4$. Итак, осталось доказать (4.6). Сначала оценку (4.6) докажем при более сильных условиях, а после этого укажем на те изменения, которые нужно сделать в ходе доказательства, чтобы (4.6) осталась справедливой при первоначальных условиях теоремы.

Условие *ii)* заменим на

Условия $p4$ и $h3$ соответственно заменим условиями

$$p4')\quad \bigvee_{j_0\leqq j\leqq j_1}\int_{\mathring{\Omega}_v}|p_j'(x)|\,dx\leqq\Upsilon(\varepsilon)$$

для некоторой функции $\Upsilon:(0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$,

$$h3')\quad \bigvee_{I\ni j\leqq k\leqq j_1}\int_{\mathring{\Omega}_v}\left|1\Big/\sum_{l=j}^{k}H_l'(x)\right|dx\leqq\Gamma(\varepsilon)$$

для некоторой функции $\Gamma:(0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$.

Оценим $\Psi_j(D)$. Интегрируя $\Psi_j(D)$ по частям, получим рекуррентную формулу

$$\Psi_j(D)=\{e_1-e_2+\Psi_j(D+1)\}/(it), \tag{4.14}$$

где

$$e_1:=\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\dots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\times$$
$$\times\Phi_{j+D}(x)\exp\{it\left(H_j(x)+\dots+H_{j+D}(x)\right)\}\Big|_A^B$$

(здесь A и B — точки такие, что $\mathring{O}_v=(A,\ B)$)

$$e_2:=\int_{\mathring{O}_v}\left(\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\dots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\right)'\times$$
$$\times\Phi_{j+D}(x)\exp\{it\left(H_j(x)+\dots+H_{j+D}(x)\right)\}\,dx.$$

Формула (4.14) корректно определена при всех $D=0,\ 1,\ \dots,\ j_1\wedge(n-1)-j$. Если при $D=n-j$ определим $\Psi_j(D+1)=0$, то (4.14) будет корректно определена при всех $D=0,\ 1,\ \dots,\ j_1-j$.

Докажем, что

$$|e_1|+|e_2|\leqq\varphi_{j+D}|t|^{D+1}\psi_j(D), \tag{4.15}$$

что совместно с (4.14) даст (4.6).

Оценим e_1. Из условий $p3$), $h1$) и $h2$) следует

$$|e_1|\leqq 2\varphi_{j+D}\,\pi(T)^{D+1}\Lambda(T)^{k_j+\dots+k_{j+D}}/\lambda(T)^{D+1}. \tag{4.16}$$

Оценим e_2.

$$|e_2|\leqq\varphi_{j+D}\int_{\mathring{O}_v}\left|\left(\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\times\right.\right.$$
$$\times\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\dots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\Big)'\Big|\,dx$$

Имеем

$$\Big(\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\Big)'=$$

$$=\sum_{l=j}^{j+D} f_l(x)+\sum_{l=j}^{j+D} g_l(x)-\sum_{l=0}^{D} h_l(x),$$

где

$$f_l(x):=\prod_{d=j}^{j+D} H_d^{k_d}(x)\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}P_l'(x)\prod_{\substack{d=j\\ d\neq l}}^{j+D} p_d(x),$$

$$g_l(x):=\prod_{d=j}^{j+D} p_d(x)\prod_{d=0}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\times$$

$$\times k_l H_l^{k_l-1}(x)H_l'(x)\prod_{\substack{d=j\\ d\neq l}}^{j+D} H_d^{k_d}(x),$$

$$h_l(x):=\prod_{d=j}^{j+D}\{p_d(x)H_d^{k_d}(x)\}\prod_{\substack{d=0\\ d\neq l}}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\times$$

$$\times\{1/(H_j'(x)+\ldots+H_{j+l}'(x))\}'.$$

Интеграл $\int_{\overset{\circ}{O}_v}\Big|\sum_{l=j}^{j+D} f_l(x)\Big|\,dx$ оценивается через величину

$$(D+1)\pi(T)^D\Lambda(T)^{k_j+\ldots+k_{j+D}}\Upsilon(T)/\lambda(T)^{D+1}. \tag{4.18}$$

Интеграл $\int_{\overset{\circ}{O}_v}\Big|\sum_{l=0}^{D} h_l(x)\Big|\,dx$ оценивается через величину

$$(D+1)\pi(T)^{D+1}\Lambda(T)^{k_j+\ldots+k_{j+D}}\Gamma(T)/\lambda(T)^D. \tag{4.19}$$

Интеграл $\int_{\overset{\circ}{O}_v}\Big|\sum_{l=j}^{j+D} g_l(x)\Big|\,dx$ можно оценить через величину

$$(D+1)\,2s\rho\pi(T)^D\{1\vee\Lambda(T)\}^{k_j+\ldots+k_{j+D}}/\lambda(T)^D \tag{4.20}$$

(доказательство этой оценки смотрите ниже).

Оценки (4.17)–(4.20) доказывают оценку для e_2:

$$|e_2|\leq(D+1)\{\Upsilon(T)+\pi(T)\lambda(T)\Gamma(T)+2s\rho\lambda(T)\}\times$$

Отсюда и из (4.16) следует (4.15).

Докажем (4.20). Пусть $l=j$. Тогда

$$\int_{\overset{\circ}{O}_v}|g_l(x)|\,dx\leq s\rho\pi(T)^D\{1\vee\Lambda(T)\}^{k_j+\ldots+k_{j+D}}/\lambda(T)^D. \tag{4.21}$$

Пусть $l>j$. Тогда

$$H_l'(x)=\{H_j'(x)+\ldots+H_l'(x)\}-\{H_j'(x)+\ldots+H_{l-1}'(x)\},$$

что даст тождество

$$g_l(x)=\prod_{d=j}^{j+D} p_d(x)\prod_{\substack{d=0\\ d\neq l}}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}^{-1}\times$$

$$\times k_l H_l^{k_l-1}(x)\prod_{\substack{d=j\\ d\neq l}}^{j+D} H_d^{k_d}(x)-\prod_{d=j}^{j+D} p_d(x)\prod_{\substack{d=0\\ d\neq l-1}}^{D}\{H_j'(x)+\ldots+H_{j+d}'(x)\}\times$$

$$\times k_l H_l^{k_l-1}(x)\prod_{\substack{d=j\\ d\neq l}}^{j+D} H_d^{k_d}(x).$$

Поэтому

$$\int_{\overset{\circ}{O}_v}|g_l(x)|\,dx\leq 2s\rho\pi(T)^D\{1\vee\Lambda(T)^{k_j+\ldots+k_{j+D}}/\lambda(T)^D \tag{4.22}$$

при всех $l>j$. Оценка (4.20) доказана.

Теперь укажем на те изменения, которые мы сделали, переходя от условий ii'), $p4'$) и $h3'$) к условиям ii), $p4$) и $h3$) соответственно.

Итак, там, где при доказательстве оценки (4.6) появляются производные функций, мы их заменяем конечными приращениями, деленными на параметр приращения. Все равенства или неравенства останутся справедливыми, но только с точностью до слагаемого $o(1)$ ($h\to 0$). После этого там, где появятся выражения

$$\{p_j(x+h)-p_j(x)\}/h,$$

и

$$\Big\{1\Big/\sum_{l=j}^{j+D} H_l(x+h)-1\Big/\sum_{l=j}^{j+D} H_l(x)\Big\}\Big/h,$$

воспользуемся оценками из условий $p4$) и $h3$) соответственно. Переход к пределу при $h\to 0$ доказывает желанный результат. □

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $p_j(x):=p(x)$, $\Gamma(\varepsilon):=0$,

$H_j(x):=c_{jn}x$, $\Upsilon(\varepsilon):=L$,

$\Lambda(\varepsilon):=C_n\times\xi(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon):=\lambda_n$.

Доказательство следствия 3.1. Пусть $\Theta(\varepsilon):=\mu\xi(\varepsilon)^{-\delta}$, $\Xi(\varepsilon):=2K_\varepsilon$, $\pi(\varepsilon):=K$. Тогда условия теоремы 3.1 удовлетворены и тем самым следствие доказано. □

Доказательство следствия 3.2. Пусть $\xi(T):=T^{-1/\delta}$, $T:=1/|t|$. Тогда следствие 3.1 совместно с (2.1) доказывает оценку (3.2). □

Лемма 4.1. *Пусть X — вещественная случайная величина, $k>0$ — некоторое число, интеграл*

$$\int_{\mathbf R} |t|^{k-1} |\mathbf E \exp\{itX\}|\,dt$$

сходится. Тогда производная $(d/dx)^{[k]}\mathbf P(X<x)$

i) существует,

ii) является ограниченной и непрерывной функцией,

iii) удовлетворяет условию Липшица с показателем $k-[k]$.

Для полноты изложения приведем доказательство этого утверждения. Обозначим $f(t):=\mathbf E\exp\{itX\}$, $F(x):=\mathbf P(X<x)$. Пусть $k\geqq 1$ — целое число, и интеграл

$$\int_{\mathbf R} |t|^{k-1} |f(t)|\,dt$$

сходится. Тогда из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что $(d/dx)^k F(x)$ ограничена и непрерывна на всей числовой прямой; кроме того,

$$(d/dx)^k F(x)=\frac{1}{2\pi}(-i)^{k-1}\int_{\mathbf R} e^{-itx}t^{k-1}f(t)\,dt.$$

Пусть $r\in(k,\ k+1)$, где $k\geqq 1$ — некоторое целое число, и интеграл

$$\int_{\mathbf R} |t|^{r-1} |f(t)|\,dt$$

сходится. Тогда, как мы уже знаем,

$$(d/dx)^{[r]}F(x)=(d/dx)^k F(x)$$

существует, ограничена и непрерывна. Покажем, что

$$(d/dx)^{[r]}F(x)$$

удовлетворяет условию Липшица с показателем $r-[r]$.

$$|(d/dx)^{[r]}F(x+h)-(d/dx)^{[r]}F(x)|\leqq$$

$$\leqq\{1/(2\pi)\}\int_{\mathbf R} |e^{-ith}-1|\,|t|^{[r]-1}|f(t)|\,dt\leqq$$

$$\leqq(1/\pi)\int_{\mathbf R} |e^{-ith}-1|^{r-[r]}|t|^{[r]-1}|f(t)|\,dt\leqq(1/\pi)\int_{\mathbf R}|t|^{r-1}|f(t)|\,dt\,|h|^{r-[r]}.$$

Случай $r\in(0,\ 1)$ рассмотрел Макабе (см. [3], с. 32). □

Доказательство следствия 3.3. Случай $\#I_n=0$ тривиален. Поэтому пусть $\#I_n\geqq 1$. Для завершения доказательства достаточно показать (см.

$$\int_{\mathbf R} |t|^{k-1} |\mathbf E \exp\{itl_n\}|\,dt$$

сходится для любого положительного $k<\#I_n$. Сходимость этого интеграла вытекает из следствия 3. 2 при $s=0$. □

Доказательство теоремы 3.2. Обозначим $p_j(x):=1$, если $x\in(0,\ 1)$, и $:=0$, если $x\in\mathbf R\setminus(0,\ 1)$, $\rho:=1$, $\xi(\varepsilon):=1$, $\Theta(\varepsilon):=0$, $\Xi(\varepsilon):=\varepsilon$, $\pi(\varepsilon):=1$, $\Upsilon(\varepsilon):=0$. Условия теоремы 2. 1 выполнены и, значит, теорема 3.2 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 3.3.

$$\omega_n^{2\mathscr P}(q)=n^{\mathscr P}\int_{(0,\ 1)}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf 1(U_{i:n}<x)-x\right\}^{2\mathscr P}q(x)\,dx=$$

$$=n^{\mathscr P}\sum_{k=1}^{n}\int_{(U_{k-1:n},\ U_{k:n})}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf 1(U_{i:n}<x)-x\right\}^{2\mathscr P}q(x)\,dx=$$

(здесь обозначено $U_{0:n}:=0$, $U_{n+1:n}:=0$)

$$=n^{\mathscr P}\sum_{k=1}^{n+1}\left\{\int_{(U_{k-1:n},\ 1/2)}\left(\frac{k-1}{n}-x\right)^{2\mathscr P}q(x)\,dx-\right.$$

$$-\int_{(1/2,\ U_{k-1:n})}\left(\frac{k-1}{n}-x\right)^{2\mathscr P}q(x)\,dx-\int_{(U_{k:n},\ 1/2)}\left(\frac{k-1}{n}-x\right)^{2\mathscr P}q(x)\,dx+$$

$$\left.+\int_{(1/2,\ U_{k:n})}\left(\frac{k-1}{n}-x\right)^{2\mathscr P}q(x)\,dx\right\}=$$

(вспомним наше соглашение, что $\int_{\varnothing}\dots dx=0$, а интервал $(A,\ B)$ при $A\geqq B$ пустой)

$$=\sum_{k=1}^{n}Q_{kn}(U_{k:n})+R_n.$$ □

Доказательство теоремы 3.4. Из леммы 4.1 следует, что нам достаточно проверить сходимость интеграла

$$\int_{\mathbf R} |t|^{k-1} |\mathbf E \exp\{it\,\omega_n^{2\mathscr P}(q)\}|\,dt$$

при всех $k<n/(2\mathscr P)$, или, следовательно, показать справедливость оценки

$$|\mathbf E\exp\{it\,\omega_n^{2\mathscr P}(q)\}|\leqq c\,|t|^{-n/(2\mathscr P)}. \tag{4.23}$$

Определим точки разбиения интервала (0, 1):

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_{B-1}, y_B\}=$$

$$=\{1/2\}\cup\{x_0, x_1, \ldots, x_{V-1}, x_V\}\cup\{(k+j-1)/(2n): 1\leqq j\leqq k\leqq n\}.$$

Нетрудно видеть, что для всех $x\in(y_{v-1}, y_v)$

$$Q'_{ln}(x)=-n^{\mathscr{P}}\left\{\left(\frac{l}{n}-x\right)^{2\mathscr{P}}-\left(\frac{l-1}{n}-x\right)^{2\mathscr{P}}\right\}q(x).$$

Поэтому

$$\sum_{l=j}^{k}Q'_{ln}(x)=-n^{\mathscr{P}}\left\{\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2\mathscr{P}}-\left(\frac{j-1}{n}-x\right)^{2\mathscr{P}}\right\}q(x) \tag{4.24}$$

для всех $1\leqq j\leqq k\leqq n$.

Проверим условие $b4$). Покажем, что можно подобрать

$$\lambda_n(\varepsilon):=n^{\mathscr{P}-1}R2^{2\mathscr{P}-1}\varepsilon^{2\mathscr{P}-1} \tag{4.25}$$

для всех $\varepsilon\leqq 1/(2n)$.

Пусть j, k — некоторая пара чисел таких, что $1\leqq j\leqq k\leqq n$. Очевидно,

$$\left|\sum_{l=j}^{k}Q'_{ln}(x)\right|\geqq n^{\mathscr{P}}R\,|g(x)|, \tag{4.26}$$

где $g(x):=(k/n-x)^{2\mathscr{P}}-((j-1)/n-x)^{2\mathscr{P}}$.

Нетрудно видеть, что $g(x)$ — строго убывающая функция. Кроме того, $g(z)=0$ тогда и только тогда, когда $z=(k+j-1)/(2n)$. Поэтому

$$\bigwedge_{x\in(y_{v-1}+\varepsilon,\, y_v-\varepsilon)}|g(x)|=|g(z-\varepsilon)|\wedge|g(z+\varepsilon)|=$$

$$=g(z-\varepsilon)=\{(k-j+1)/(2n)+\varepsilon\}^{2\mathscr{P}}-\{(k-j+1)/(2n)-\varepsilon\}^{2\mathscr{P}}=:f_{\mathscr{P}}(\varepsilon).$$

Докажем, что

$$f_{\mathscr{P}}(\varepsilon)\geqq 2^{2\mathscr{P}-1}\varepsilon^{2\mathscr{P}-1}/n \tag{4.27}$$

для всех $\varepsilon\leqq 1/(2n)$, что совместно с (4.26) докажет (4.25).

Пусть $\mathscr{P}=1$. Тогда

$$f_1(\varepsilon)=4(k-j+1)\,\varepsilon/(2n)\geqq 2\varepsilon/n.$$

Предположим, что (4.27) справедлива для всех $\mathscr{P}=1, 2, \ldots, r-1$ $(r\geqq 2)$. Докажем справедливость этой оценки при $\mathscr{P}=r$.

Обозначим для краткости $d:=(k-j+1)/(2n)$. Тогда

$$f_r(\varepsilon)=(d+\varepsilon)^{2r}-(d-\varepsilon)^{2r}=(d+\varepsilon)^2(d+\varepsilon)^{2r-2}-(d+\varepsilon)^2(d-\varepsilon)^{2r-2}+$$

$$+(d+\varepsilon)^2(d-\varepsilon)^{2r-2}-(d-\varepsilon)^2(d-\varepsilon)^{2r-2}\geqq(d+\varepsilon)^2\{(d+\varepsilon)^{2r-2}-(d-\varepsilon)^{2r-2}\}=$$

$$=\{(k-j+1)/(2n)+\varepsilon\}^2f_{r-1}(\varepsilon)\geqq 2^{2r-1}\varepsilon^{2r-1}/n.$$

Оценка (4.27) и тем самым (4.25) полностью доказана.

В случае $\varepsilon>1/(2n)$ определим $\lambda_n(\varepsilon):=0$.

Рассмотрим условие $b5$). Без потери общности можем рассматривать это условие только при $\varepsilon\leqq 1/(2n)$ (случай $\varepsilon>1/(2n)$ тривиален, поскольку $\lambda_n(\varepsilon)=0$).

Покажем, что условие $b5$) выполнено.

$$\int_{\Delta:=(y_{v-1}+\varepsilon,\, y_v-\varepsilon)}\left|1/\sum_{l=j}^{k}H'_{ln}(x+h)-1/\sum_{l=j}^{k}H'_{ln}(x)\right|dx=$$

$$=\int_{\Delta}|1/\{q(x+h)g(x+h)\}-1/\{q(x)g(x)\}|\,dx/n^{\mathscr{P}}\leqq$$

(функция $g(x)$ определена в (4.26))

$$\leqq\int_{\Delta}|1/g(x+h)-1/g(x)|\,dx/(n^{\mathscr{P}}R)+$$

$$+\int_{\Delta}|1/q(x+h)-1/q(x)|\,dx\,R/\lambda_n(\varepsilon)\leqq$$

$$\leqq\int_{\Delta}|1/g(x+h)-1/g(x)|\,dx/(n^{\mathscr{P}}R)+\{|h|L+o(h)\}R/\lambda_n(\varepsilon)\leqq(*).$$

Поскольку функция $g(x)$ монотонна и дифференцируема, то

$$\int_{\Delta}|1/g(x+h)-1/g(x)|\,dx\leqq 2n^{\mathscr{P}}R|h|/\lambda_n(\varepsilon)+o(h)\quad(h\to 0)$$

и, следовательно,

$$(*)\leqq\{2+RL)|h|/\lambda_n(\varepsilon)+o(h)\quad(h\to 0).$$

Доказали, что условия $b4$) и $b5$) удовлетворены, где функция

$$\lambda_n(\varepsilon)=\begin{cases}Rn^{\mathscr{P}-1}2^{2\mathscr{P}-1}\varepsilon^{2\mathscr{P}-1}, & \text{если}\quad \varepsilon\leqq 1/(2n),\\ 0, & \text{если}\quad \varepsilon>1/(2n).\end{cases}$$

Поэтому из теоремы 3.2 следует, что для всех $|t|\geqq 1$ и $T>0$

$$|\mathbf{E}\exp\{it\,\omega_n^{2\mathscr{P}}(q)\}|\leqq c/\beta_n(t, T)^n,$$

а c — некоторая постоянная, не зависящая от t и T.

Пусть $T:=|t|^{-1/(2\mathscr{P})}$ и $|t|\geqq(2n)^{2\mathscr{P}}$. Тогда, очевидно, $T\leqq 1/(2n)$ и $\beta_n(t,T)\geqq\geqq|t|^{1/(2\mathscr{P})}$ для некоторой постоянной $a:=a(n, \mathscr{P}, R)$. Оценка (4.23) доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 3.4 (см. замечание 3.3). □

Доказательство теоремы 1.1. Первая часть теоремы является утверждением следствия 3.3, а вторая немедленно следует из первой. □

Доказательство следствия 1.1. Так как условия теоремы 1.1 удовлетворены, то остается только подобрать множества I_n и подсчитать $\# I_n$. □

Литература

17. **Зитикис Р.** О гладкости функции распределения $\mathscr{F}\mathscr{L}$-статистики. I// Liet. matem. rink. 1990. Т. 30, № 2. С. 233–246. ISSN 0132–2818.

Институт математики и кибернетики
Литовской Академии наук

Поступило в редакцию
14.03.1989

APIE $\mathscr{F}\mathscr{L}$ STATISTIKOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS DIFERENCIJUOJAMUMĄ. II

R. Zitikis

(*Reziumė*)

Pirmoje šio darbo dalyje [17] nagrinėjamas $\mathscr{F}\mathscr{L}$ statistikos pasiskirstymo funkcijos diferencijuojamumas. Atskiru atveju rasti $\mathscr{L}$, ω ir kai kurių kitų statistikų pasiskirstymo funkcijų glodumo laipsniai.

Šiame darbe pateikiami minėtų rezultatų įrodymai.

ON THE DIFFERENTIABILITY OF THE $\mathscr{F}\mathscr{L}$-STATISTIC DISTRIBUTION FUNCTION. II

R. Zitikis

(*Summary*)

The proofs the results of the paper [17] are presented.

30 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1990

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

Ф. Ф. Иванаускас

В данной работе рассматриваются краевые задачи для нелинейных уравнений шредингеровского и параболического типов. Подробно исследуются уравнения шредингеровского типа. Они описывают многие задачи нелинейной оптики [1–4]. Для уравнений параболического типа излагаются только основные результаты, так как метод исследования легко переносится на этот случай. Разрешимость уравнений доказывается методом расщепления. Число пространственных переменных не больше трех.

Доказано существование в малом и единственность решения $u\in L_\infty(0, \varepsilon; W_2^2 \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1)$. Если для решения задачи справедливо некоторое соотношение, дающее априорную оценку в целом в норме W_2^2, то доказывается в целом существование и единственность.

Разрешимость одного нелинейного уравнения шредингеровского типа изучалась в [5–8], систем – в [9, 10]. В данных работах основным методом исследования является метод Фаэдо–Галеркина.

§1. Нестационарные уравнения шредингеровского типа. Постановка задачи

Сначала рассмотрим краевую задачу, когда число пространственных переменных равно трем. Широкий класс задач нелинейной оптики [1–4] описывается краевыми задачами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x,\ u),\quad (x,\ t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,\ 0)=u^{(0)}(x),\quad x\in\Omega,\quad u(x,\ t)=0,\quad (x,\ t)\in\partial\Omega\times[0,\ T], \tag{2}$$

где дифференциальный оператор

$$L=\sum_{j=1}^{3}\left(A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+iB_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right),$$

вектор $u=(u_1, \ldots, u_r)$, u_j – комплексные функции, диагональные матрицы $A_j=(a_{j1}, \ldots, a_{jr})$, $B_j=(b_{j1}, \ldots, b_{jr})$, a_{jl}, b_{jl} – действительные постоянные, $i=\sqrt{-1}$, $Q=\Omega\times]0,\ T]$, Ω – ограниченная выпуклая область, $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Пользуясь диагональностью матриц ...