ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Automorphismes analytiques d'un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 67-87.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_67_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 67-87.

AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES D'UN DOMAINE DE REINHARDT BORNÉ D'UN ESPACE DE BANACH A BASE

par Jean-Pierre VIGUE

Dans [14], j'ai étudié les automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, et je me suis intéressé plus spécialement au cas des domaines bornés symétriques. En particulier, j'ai montré que les domaines bornés symétriques étaient homogènes, isomorphes à des domaines cerclés bornés et que le groupe G(D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné symétrique D avait, de façon naturelle, une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie.

D'autre part, Braun, Kaup et Upmeier [1] ont étudié les automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E. Ils ont montré, en particulier, qu'il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que $D \cap F$ soit un domaine borné symétrique de F et que $D \cap F$ soit exactement l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(D).

Dans cet article, j'étudierai les automorphismes d'un domaine de Reinhardt borné D d'un espace de Banach complexe à base E. Je montrerai en particulier que, si le sous-espace vectoriel F introduit dans [1] est de codimension finie, le groupe G(D) a une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie, ce qui généralise un résultat de [14]. Le résultat essentiel de cet article est un théorème de classification des domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base. Plus précisément, si D est un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach à base E, alors E est isomorphe au sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0 à l'infini d'un produit $\prod_{n \in \mathbf{N}} E_n$ d'espace de Hilbert E_n, muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\|,$$

et D est isomorphe à la boule-unité ouverte de l'image de E dans ce produit.

Enfin, je retrouverai par ces mêmes méthodes le résultat suivant : les automorphismes de la boule-unité ouverte B de $\ell^p(\mathbf{N})$ ($p \neq 2$ et $+\infty$) laissent l'origine fixe, et, d'après un théorème de H. Cartan, sont linéaires. Ce résultat est déjà connu par [1], [10] et [13], mais ma démonstration est très simple. Elle s'inspire de méthodes de Braun, Kaup et Upmeier [1] et utilise en particulier un résultat de Thullen [12] sur les automorphismes des domaines de Reinhardt bornés de $\mathbf{C}^2$.

Pour terminer cet article, je donnerai, à titre d'exemple, une classification des domaines de Reinhardt bornés d'un espace de Banach à base E tels que $\operatorname{codim}_E F = 1$.

Je remercie M. Dineen des remarques qu'il m'a faites.

1. Premières définitions et rappels.

Rappelons d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Un domaine* D *d'un espace de Banach complexe* E *est dit cerclé si l'origine* 0 *appartient à* D *et si* D *est stable par le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de* E

$$(\theta, x) \to e^{i\theta} x \quad (\theta \in \mathbf{R}).$$

Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E. D'après [1], il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques de D soit exactement $D \cap F$. On sait d'autre part, d'après un résultat de H. Cartan [3], que le groupe d'isotropie de l'origine $G_0(D)$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

La symétrie $s_0(=-\mathrm{id})$ par rapport à l'origine agit par automorphisme intérieur sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ des transformations infinitésimales de D (voir [14]) et définit une décomposition directe

$$\mathfrak{g}(\mathrm{D}) = \mathfrak{g}(\mathrm{D})^+ \oplus \mathfrak{g}(\mathrm{D})^-,$$

où

$$\mathfrak{g}(\mathrm{D})^+ = \{\psi \in \mathfrak{g}(\mathrm{D}) | s_0 . \psi = \psi\},$$
$$\mathfrak{g}(\mathrm{D})^- = \{\psi \in \mathfrak{g}(\mathrm{D}) | s_0 . \psi = -\psi\}.$$

On déduit du résultat de H. Cartan que $\mathfrak{g}(\mathrm{D})^+$ est formé d'applications linéaires. L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathrm{D})^- &\to \mathrm{E} \\ \psi &\mapsto \psi(0) \end{aligned}$$

est, d'après [14], un isomorphisme d'espaces de Banach réels de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})^-$ sur F, et pour tout $\xi \in \mathrm{F}$, la transformation infinitésimale $\mathrm{X}_\xi \in \mathfrak{g}(\mathrm{D})^-$ telle que

$$\mathrm{X}_\xi(0) = \xi,$$

s'écrit

$$\mathrm{X}_\xi(x) = \xi + \mathrm{Z}(\xi,x,x),$$

où $\mathrm{Z} : \mathrm{F} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est une application trilinéaire continue, C-linéaire symétrique en les deux dernières variables, C-antilinéaire en la première variable. (Dans les notations de [1], $\mathrm{Z}(\xi,x,y) = -\{x\xi^*y\}$).

On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.2. (comparer avec [1]). — *Soit* D *un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe* E

(i) *soit* $f \in \mathrm{G}_0(\mathrm{D})$. *Pour tout* $\xi \in \mathrm{F}$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *pour tout* $y \in \mathrm{E}$, *on a*

$$f(\mathrm{Z}(\xi,x,y)) = \mathrm{Z}(f(\xi),f(x),f(y));$$

(ii) *soit* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ *telle que* $ig \in \mathfrak{g}(\mathrm{D})^+$. *Pour tout* $\xi \in \mathrm{F}$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *pour tout* $y \in \mathrm{E}$, *on a :*

$$g(\mathrm{Z}(\xi,x,y)) = -\mathrm{Z}(g(\xi),x,y) + \mathrm{Z}(\xi,g(x),y) + \mathrm{Z}(\xi,x,g(y));$$

(iii) *soit* p *un projecteur de* E *tel que* $ip \in \mathfrak{g}(\mathrm{D})^+$, *soit* $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}\, p$, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Im}\, p$, *et soit* $\mathrm{F}_\mu = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\mu$ $(\mu = 0$ *ou* $1)$. *Alors, on a :*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F}_\mu,\mathrm{E}_\nu,\mathrm{E}_\sigma) \subset \mathrm{E}_{\nu+\sigma-\mu} (\mu,\nu,\sigma = 0 \text{ ou } 1).$$

Idée de la démonstration. — (i) et (ii) se démontrent comme dans [14], paragraphe 3.5. En appliquant (ii) au projecteur p, on trouve (iii).

J'aurai également besoin de la proposition suivante (voir par exemple [1]) :

PROPOSITION 1.3. — *Soit* D *un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe* E.

(i) *Pour tout* $\xi \in F$, *pour tout* $\eta \in F$,

$$x \mapsto [Z(\xi,\eta,x) - Z(\eta,\xi,x)]$$

est un élément de $\mathfrak{g}(D)^+$;

(ii) *pour tous* ξ, η, $\zeta \in F$, *pour tout* $x \in E$, *on a :*

$$2Z(\eta,Z(\xi,\zeta,x),x) - Z(\xi,\zeta,Z(\eta,x,x)) = Z(Z(\zeta,\xi,\eta),\, x,\, x).$$

Idée de la démonstration. — Le (i) se démontre en calculant le crochet de $\xi + Z(\xi,x,x)$ et de $\eta + Z(\eta,x,x)$ qui est une transformation infinitésimale appartenant à $\mathfrak{g}(D)^+$. La formule (ii) se montre en calculant le crochet $[Z(\eta,x,x),\ Z(\xi,\zeta,x)]$ de deux manières différentes, d'abord directement, ensuite en utilisant le lemme 3.2.9. de [14], p. 257.

Définissons maintenant les domaines bicerclés.

DÉFINITION 1.4. — *Un domaine* D *d'un espace de Banach complexe* E *est dit bicerclé, relativement à une décomposition directe* $E = U \oplus V$ *si l'origine* 0 *appartient à* D *et si* D *est stable par les deux groupes à un paramètre réel d'automorphismes linéaires de* E *suivants :*

$$(\theta_1,(u,v)) \mapsto (e^{i\theta_1}u,v) \quad (\theta_1 \in \mathbf{R}),$$
$$(\theta_2,(u,v)) \mapsto (u,e^{i\theta_2}v) \quad (\theta_2 \in \mathbf{R}).$$

Soit maintenant D un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe E, relativement à une décomposition directe de $E = U \oplus V$. Il est clair que

$$(u,v) \mapsto i(u,0)$$

et

$$(u,v) \mapsto i(0,v)$$

sont des transformations infinitésimales de D. Supposons de plus que D vérifie la condition suivante :

(1.5.) *Le sous-espace vectoriel complexe* F *de* E *tel que l'orbite de l'origine* 0 *sous l'action de* $G(D)$ *soit égal à* $D \cap F$ *est égal à* U.

On déduit alors du lemme 1.2. les inclusions suivantes :

$$Z(U,U,U) \subset U, \qquad Z(U,U,V) \subset V \qquad \text{et} \qquad Z(U,V,V) = \{0\}.$$

Ainsi, pour tout $\xi \in U$, pour tout $(u,v) \in U \oplus V$, on a :

$$X_\xi(u,v) = (\xi + Z(\xi,u,u),\ 2Z(\xi,u,v)).$$

De la forme de Z, on déduit [1] que, si π est la projection sur U parallèlement à V, si

$$(t,x) \mapsto f_\xi(t,x)$$

désigne le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de D associé à la transformation infinitésimale X_ξ, on a :

$$\pi(f_\xi(t,x)) = f_\xi(t,\pi(x)).$$

On en déduit aussi que D est égal à l'image de $D \cap V$ sous l'action des $f_\xi(1,.)$, pour tout $\xi \in U$.

2. Quelques propriétés des domaines bicerclés bornés.

Soit D_1 (resp. D_2) un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe E_1 (resp. E_2), relativement à une décomposition directe $E_1 = U_1 \oplus V_1$ (resp. $E_2 = U_2 \oplus V_2$). Supposons que D_1 et D_2 vérifient la condition (1.5.). Nous avons alors le théorème suivant (comparer avec [1]).

THÉORÈME 2.1. — (i) *Soit* f *un isomorphisme linéaire de* D_1 *sur* D_2. *Alors* $f = (f_1,f_2)$, *où* f_1 *est un isomorphisme linéaire de* $D_1 \cap U_1$ *sur* $D_2 \cap U_2$ *et* f_2 *un isomorphisme linéaire de* $D_1 \cap V_1$ *sur* $D_2 \cap V_2$.

(ii) *Réciproquement, soit* $f = (f_1,f_2)$, *où* f_1 *est un isomorphisme linéaire de* U_1 *sur* U_2 *et* f_2 *un isomorphisme linéaire de* V_1 *sur* V_2. *Pour* *que f soit un isomorphisme linéaire de D_1 sur D_2, il faut et il suffit que f_2 soit un isomorphisme de $D_1 \cap V_1$ sur $D_2 \cap V_2$ et que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$, on ait*

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)).$$

Démonstration. — Montrons (i). Soit f un isomorphisme linéaire de D_1 sur D_2. Il est clair que f envoie U_1 sur U_2 et que, dans la décomposition de $E_1 = U_1 \oplus V_1$ et de $E_2 = U_2 \oplus V_2$, f a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

où

$$f_1 \in \mathrm{Isom}\,(U_1, U_2), \qquad f_2 \in \mathrm{Isom}\,(V_1, V_2) \qquad \text{et} \qquad f_3 \in \mathscr{L}(V_1, U_2).$$

On sait déjà que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)).$$

Soit $x \in V_1$. On a montré que $Z(\xi,x,x) = 0$. Par suite,

$$Z(f(\xi),f(x),f(x)) = 0, \qquad \text{pour tout} \qquad \xi \in U_1.$$

En projetant sur U_2, on trouve, pour tout $\xi \in U_1$,

$$Z(f_1(\xi), f_3(x), f_3(x)) = 0.$$

D'après l'assertion démontrée dans le lemme 3.4.15. de [14], ceci prouve que $f_3(x) = 0$.

Montrons (ii). Soit $f = (f_1,f_2)$ tel que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$,

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi), f(x), f(x)).$$

Le théorème 3.5.2. de [14] montre déjà que f_1 est un isomorphisme linéaire de $D_1 \cap U_1$ sur $D_2 \cap U_2$. De la relation ci-dessus, on déduit que

$$f(f_\xi(t,(u,v))) = f_{f_1(\xi)}(t,f(u,v)),$$

pour tout $\xi \in U_1$. Comme $f_2(D_1 \cap V_1) = D_2 \cap V_2$, ceci suffit à montrer que f est un isomorphisme de D_1 sur D_2.

On peut, bien sûr, appliquer ce résultat aux automorphismes linéaires d'un domaine bicerclé borné. Rappelons d'abord que, si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe, on munit le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D de la topologie de la convergence uniforme locale, et cette topologie fait de G(D) un groupe topologique (voir [14]). D'après un résultat obtenu en collaboration avec J. Isidro [19], si D est un domaine cerclé borné, cette topologie coïncide sur G(D) avec la topologie de la convergence uniforme sur D. On déduit du théorème 2.1. le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soit* D *un domaine bicerclé d'un espace de Banach complexe* E, *relativement à une décomposition directe de* $E = U \oplus V$, *et supposons que* D *vérifie la condition* (1.5.). *Supposons de plus que le groupe d'isotropie* $G_0(D \cap V)$ *de l'origine* 0 *dans* $D \cap V$ *soit un sous-groupe de Lie réel de* GL(V). *Alors le groupe* $G_0(D)$ *et le groupe* G(D) *ont des structures de groupes de Lie réels, compatibles avec leur topologie et l'application*

$$\begin{aligned} G(D) \times D &\to 0 \\ (g,x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

est analytique réelle.

Démonstration. — Il suffit en fait de montrer que $G_0(D)$ est un sous-groupe de Lie réel du groupe linéaire GL(E). D'après l'hypothèse du théorème, $G_0(D \cap V)$ est un sous-groupe de Lie réel de GL(V), d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(D \cap V)^+ \subset \mathscr{L}(V,V)$. Le groupe $G_0(D)$ est égal au sous-groupe

$$\{f=(f_1,f_2) \in GL(U) \times GL(V) | f_2 \in G_0(D \cap V) \ \text{ et } \ f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)),\ \forall \xi \in U,\ \forall x \in E\}.$$

D'après un résultat de Harris et Kaup [7]

$$\{f \in GL(U) \times GL(V) | f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)),\ \forall \xi \in U,\ \forall x \in E\}$$

qui est un sous-groupe de $GL(U) \times GL(V)$ défini par des équations polynomiales de degré $\leqslant 3$, est un sous-groupe de Lie réel de $GL(U) \times GL(V)$. On en déduit que $G_0(D)$, comme intersection de deux sous-groupes de Lie de $GL(U) \times GL(V)$, est un sous-groupe de Lie réel de $GL(U) \times GL(V)$.

La condition que $G_0(D \cap V)$ est un groupe de Lie réel, est vérifiée, par exemple, dans les deux cas suivants :

(i) V *est un espace vectoriel complexe de dimension finie* (voir H. Cartan [4]);

(ii) $D \cap V$ *est un domaine borné symétrique de* V (voir Vigué [14]).

On déduit du théorème 2.2. le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.3. – *Soit* D *un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe* E, *relativement à une décomposition directe de* $E = U \oplus V$, *et supposons que* D *vérifie la condition* (1.5.). *Supposons de plus que* V *est un espace vectoriel de dimension finie. Alors le groupe* G(D) *a une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie.*

3. Domaines de Reinhardt bornés d'un espace de Banach complexe à base.

Soit E un espace de Banach complexe à base, muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$, que nous supposerons toujours inconditionnelle. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n e_n ,$$

et on note $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ les coordonnées de x dans la base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Par analogie avec la dimension finie, je poserai la définition suivante :

DÉFINITION 3.1. – *On dit qu'un domaine* D *d'un espace de Banach complexe à base* E, *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est un domaine de Reinhardt si l'origine* 0 *appartient à* D, *et si, pour tout entier* n_0, *le domaine* D *est stable par le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de* E *suivant*

$$(\theta, (x_n)_{n \in \mathbf{N}}) \mapsto (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \quad (\theta \in \mathbf{R}),$$

où $y_n = x_n$, si $n \neq n_0$,

$$y_{n_0} = e^{i\theta} . x_{n_0} .$$

Si I est une partie de **N** (finie ou infinie), on note E_I le sous-espace vectoriel complexe fermé engendré par les $(e_n)_{n \in I}$. Bien sûr, E admet une décomposition directe

$$E = E_I \oplus E_{\mathbf{N} \setminus I} .$$

Si D est un domaine de Reinhardt d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$, on montre facilement, à l'aide d'un passage à la limite, que D est cerclé et que D est bicerclé, relativement à toute décomposition directe de E de la forme $E = E_I \oplus E_{N\setminus I}$.

Soit donc D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$. Soit F le sous-espace vectoriel complexe de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de $G(D)$ soit égale à $D \cap F$. Soit $(x_n)_{n\in N}$ un élément de F, et supposons qu'il existe un indice n_0, tel que $x_{n_0} \neq 0$. Alors, $e_{n_0} \in F$. En effet, D est bicerclé, relativement à la décomposition directe de $E = E_{\{n_0\}} \oplus E_{N\setminus\{n_0\}}$. On en déduit que, si on pose

$$\begin{cases} y_n = -x_n, & \text{si} \quad n \neq n_0 \\ y_{n_0} = x_{n_0} \end{cases}$$

alors, $(y_n)_{n\in N}$ appartient à F. Par suite, $(x_n+y_n)_{n\in N}$ appartient à F, ce qui prouve bien que e_{n_0} appartient à F. On déduit facilement de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* $(E,(e_n)_{n\in N})$. *Alors il existe une partie* I *de* $\mathbf{N}$ *tel que l'orbite de l'origine* 0 *sous l'action du groupe* $G(D)$ *soit égale à* $D \cap E_I$. *Le domaine* D *est bicerclé borné relativement à la décomposition directe de* $E = E_I \oplus E_{N\setminus I}$, *et vérifie de plus la condition* (1.5).

On déduit du théorème 3.2 et du corollaire 2.3. le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.3. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* $(E,(e_n)_{n\in N})$. *Si* $\mathbf{N}\setminus I$ *est fini (où* I *est le sous-ensemble de* $\mathbf{N}$ *défini au théorème* 3.2.), *alors le groupe* $G(D)$ *des automorphismes analytiques de* D *a une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.*

Bien sûr, dès que $\mathbf{N}\setminus I$ est infini, on peut construire comme dans [15], paragraphe 4.1., des exemples de domaines de Reinhardt bornés D d'un espace de Banach à base tels que $G(D)$ n'ait pas une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.

Soit donc D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$, soit I le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de $G(D)$ soit égale à $D \cap E_I$. Enfin, soit

$$Z : E_I \times E \times E \to E$$

l'application trilinéaire continue précédemment définie. Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 3.4. — (i) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, $\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_n) = -r_{nn} e_n$, *avec* $r_{nn} > 0$,

(ii) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, *pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *pour tout* $p \in \mathbf{N}$, *avec* $n \neq m$, $n \neq p$, *on a :*

$$\mathrm{Z}(e_n, e_m, e_p) = 0$$

(iii) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, *pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *on a :*

$$\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_m) = -r_{nm} e_m, \qquad \textit{avec} \qquad r_{nm} \geqslant 0\,.$$

Démonstration. — (i) Considérons la décomposition directe de $\mathrm{E} = e_{\{n\}} \oplus \mathrm{E}_{\mathbf{N}\backslash\{n\}}$. Par hypothèse, si p_n désigne la projection de E sur $\mathrm{E}_{\{n\}}$ parallèlement à $\mathrm{E}_{\mathbf{N}\backslash\{n\}}$, $ip_n \in \mathfrak{g}(\mathrm{D})^+$. D'après le lemme 1.2., on a :

$$\mathrm{Z}(\mathrm{E}_{\{n\}}, \mathrm{E}_{\{n\}}, \ \mathrm{E}_{\{n\}}) \subset \mathrm{E}_{\{n\}}\,.$$

On en déduit : :$\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_n) = -r_{nn} e_n$.

Pour montrer que r_{nn} est réel, on remarque que, d'après la proposition 1.3. (i),

$$x \mapsto i\mathrm{Z}(e_n, e_n, x)$$

est une rotation infinitésimale de D. Par suite, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f_t = \exp\,(it\mathrm{Z}(e_n, e_n, .))$$

est une transformation linéaire de D. Son spectre est contenu dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. On en déduit que toute valeur propre de $\mathrm{Z}(e_n, e_n, .)$ est réelle. Ainsi donc, $r_{nn} \in \mathbf{R}$, et comme D est borné, il est facile de voir que r_{nn} est strictement positif (voir [14]).

(ii) En utilisant p_n, on trouve d'après le lemme 1.2. que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}, \mathrm{E}_0, \mathrm{E}_0) \subset \mathrm{E}_{-1} = \{0\}\,.$$

(E_μ désigne le sous-espace propre correspondant à la valeur propre μ de p_n). Ainsi

$$\mathrm{Z}(e_n, e_m, e_p) = 0\,.$$

(iii) De même, en utilisant p_m, on trouve que $Z(e_n, e_n, e_m)$ est colinéaire à e_m. On a donc $Z(e_n, e_n, e_m) = -r_{nm}e_m$, et r_{nm} est réel d'après l'argument de (i). On montre de même que r_{nm} est positif, car, sinon, D ne serait pas borné.

Remarque 3.5. – Si $Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n$, on dit (voir [9]) que e_n est un tripotent de Z. Pour cela, d'après les théorèmes de représentation des domaines bornés cerclés homogènes, il faut que e_n appartienne à la frontière de D. Quitte à multiplier e_n par un scalaire, on peut donc supposer que, pour tout $n \in \mathrm{N}$, e_n appartient à la frontière de D. Alors, pour tout $n \in \mathrm{I}$, on a : $Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n$. Nous supposerons que cette hypothèse est vérifiée à l'avenir.

4. Les automorphismes analytiques de la boule-unité ouverte de $\ell^p(\mathrm{N})$.

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents au calcul de l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(B) des automorphismes analytiques de la boule-unité ouverte B de $\ell^p(\mathrm{N})$. [Si $p = 2$ ou $+\infty$, on sait (voir par exemple [5]) que B est homogène, et nous exclurons ce cas]. Rappelons d'abord le résultat suivant dû à Thullen [12] (voir aussi [3]). On peut d'ailleurs le déduire des méthodes exposées dans le présent article.

THÉORÈME 4.1. – *Soit* $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}^2$ *un domaine de Reinhardt borné. S'il existe un automorphisme analytique de* D *ne laissant pas l'origine fixe, il existe un isomorphisme linéaire* f *de* D *sur l'un des domaines suivants :*

1) $\Delta \times \Delta = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}$,

2) $\mathrm{B}_p = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^p < 1\}\ (p>0)$.

Remarquons que, d'après Sunada [11], on peut même supposer que l'isomorphisme linéaire f est de la forme suivante :

$$f(x,y) = (\lambda x, \mu y)$$

ou

$$f(x,y) = (\lambda y, \mu x)$$

où λ et μ sont deux constantes réelles strictement positives.

Considérons maintenant un domaine bicerclé borné D d'un espace de Banach complexe E, relativement à une décomposition directe de $E = U \oplus V$. Soit F le sous-espace vectoriel complexe fermé de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(D) soit égale à $D \cap F$.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — $G(D \cap U).0 \supset (G(D).0) \cap U$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.2., on a $Z(U \cap F, U, U) \subset U$. Ceci suffit à démontrer le résultat.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème suivant (voir aussi [1], [10] et [13]).

THÉORÈME 4.3. — *Soit p un nombre réel $\geqslant 1$, $p \neq 2$ et $+\infty$. Soit* B *la boule-unité ouverte de $\ell^p(\mathbf{N})$ [l'espace de Banach des suites de nombres complexes de puissances p^e sommables, muni de la norme habituelle]. Alors l'origine* 0 *est invariante par les automorphismes analytiques de* B.

Démonstration. — Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la base canonique de $E = \ell^p(\mathbf{N})$, $(p \neq 2$ et $+\infty)$. La boule-unité ouverte B de E est un domaine de Reinhardt borné relativement à cette base. Soit donc I le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(B) soit égale à $B \cap E_I$. Supposons que I est non vide. Soit $n \in I$ et soit m un entier quelconque distinct de n. Alors $B \cap E_{\{n,m\}}$ est un domaine de Reinhardt borné de $E_{\{n,m\}}$ qui est isomorphe à $\mathbf{C}^2$, et on a :

$$B_1 = B \cap E_{\{n,m\}} = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^p + |y|^p < 1\}.$$

D'autre part, B est un domaine bicerclé borné relativement à la décomposition de $E = E_{\{n,m\}} \oplus E_{\mathbf{N} \setminus \{n,m\}}$ et d'après le théorème 4.2., l'orbite de l'origine 0 dans B_1, sous l'action de $G(B_1)$, n'est pas réduite à $\{0\}$. D'après le théorème 4.1., B_1 serait linéairement isomorphe à un des domaines de la forme (i) ou (ii), ce qui n'est pas le cas. Nous avons trouvé la contradiction cherchée, et le théorème est démontré.

Remarque 4.4. — Il est facile de voir, par des arguments semblables à ceux développés ici, que, si I est un ensemble d'indices, la conclusion du théorème reste vraie pour la boule-unité ouverte B de l'espace de Banach $\ell^p(I)$, $(p \neq 2$ et $+\infty)$ des suites de nombres complexes, indexées par I, de puissances p^e sommables, dès que le cardinal de I est supérieur ou égal à 2.

5. Classification des domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base.

Soit D un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base E, muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Avec les conventions que nous avons faites (voir remarque 3.5.), on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n.$$

Nous avons besoin des lemmes suivants.

LEMME 5.1. — *Soient* n *et* m *deux entiers distincts. Alors, une des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(i) $Z(e_n, e_n, e_m) = Z(e_m, e_m, e_n) = 0$,

(ii) $Z(e_n, e_n, e_m) = -\frac{1}{2} e_m$ *et* $Z(e_m, e_m, e_n) = -\frac{1}{2} e_n$.

Démonstration. — D'après le théorème 4.2., l'intersection de D avec $E_{\{n,m\}}$ est un domaine de Reinhardt borné homogène de $E_{\{n,m\}}$ qui est isomorphe à $\mathbf{C}^2$. D'après Thullen [12] (voir aussi E. Cartan [2]), il existe seulement deux domaines de Reinhardt bornés homogènes de $\mathbf{C}^2$:

(i) le bidisque $\Delta \times \Delta = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2 \| y_1| < 1, |y_2| < 1\}$, et dans ce cas,

$$Z(e_n, e_n, e_m) = Z(e_m, e_m, e_n) = 0;$$

(ii) la boule

$$B_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |y_1|^2 + |y_2|^2 < 1\}.$$

L'application Z associée vaut alors [5]

$$Z(\xi, x, y) = -\frac{1}{2} [(x,\xi)y + (y,\xi)x],$$

où (x,ξ) désigne le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbf{C}^2$. Il est facile de voir que

$$Z(e_n, e_n, e_m) = -\frac{1}{2} e_m,$$

et que

$$Z(e_m, e_m, e_n) = -\frac{1}{2} e_n.$$

Le lemme est démontré.

Remarquons que, dans le cas d'un domaine borné cerclé homogène, on sait d'après Loos [9] que, si e est un tripotent de Z, le spectre de

$$x \mapsto Z(e,e,x)$$

est contenu dans $\left\{0, -\frac{1}{2}, -1\right\}$. On peut alors déduire le lemme de calculs directs.

LEMME 5.2. — *Soient m, n, p trois entiers deux à deux distincts, et supposons que $Z(e_m, e_m, e_n) \neq 0$. Alors $Z(e_m, e_m, e_p) = Z(e_n, e_n, e_p) = -\lambda e_p$, avec $\lambda = 0$ ou $\frac{1}{2}$.*

Le lemme 5.2. sera une conséquence immédiate du lemme 5.1. et du lemme suivant dans lequel je ne supposerai pas que D est homogène. [Le résultat obtenu me sera utile au § 6].

LEMME 5.3. — *Soit D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base $(E, (e_n)_{n \in N})$. Soient m, n, p trois entiers deux à deux distincts, supposons que m et n appartiennent à I et que $Z(e_m, e_n, e_n) \neq 0$. Alors il existe un nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que*

$$Z(e_m, e_m, e_p) = Z(e_n, e_n, e_p) = -\lambda e_p.$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.3., pour tout $\xi \in F$, pour tout $\eta \in F$,

$$x \mapsto \psi(x) = Z(\xi,\eta,x) - Z(\eta,\xi,x)$$

est un élément de $\mathfrak{g}(D)^+$. Prenons $\xi = e_m$, $\eta = e_n$. On déduit du lemme 3.4. que $\psi_{|E_{N\setminus\{m,n\}}} \equiv 0$. On déduit facilement des lemmes 3.4. et 5.1. que

$$\psi(e_m) = Z(e_m, e_n, e_m) - Z(e_n, e_m, e_m) = -\frac{1}{2} e_n,$$

$$\psi(e_n) = Z(e_m, e_n, e_n) - Z(e_n, e_m, e_n) = \frac{1}{2} e_m.$$

Le groupe à un paramètre engendré par cette transformation infinitésimale contient la transformation linéaire de D suivante :

$$r(e_m) = e_n, \qquad r(e_n) = -e_m, \qquad r(e_j) = e_j, \quad \forall j \in \mathbf{N} \backslash \{m,n\}.$$

D'après le lemme 1.2., on a : $\forall \xi \in \mathrm{F}$, $\forall x \in \mathrm{E}$, $\forall y \in \mathrm{E}$

$$r(\mathrm{Z}(\xi,x,y)) = \mathrm{Z}(r(\xi), r(x), r(y)).$$

Ceci entraîne que

$$r(\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)) = \mathrm{Z}(r(e_m),\ r(e_m),\ r(e_p)) = \mathrm{Z}(e_n, e_n, e_p).$$

Comme on sait d'autre part que $\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)$ est colinéaire à e_p, on a

$$r(\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)) = \mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p) = -\lambda e_p,$$

ce qui, compte-tenu du lemme 3.4., démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème de classification suivant :

THÉORÈME 5.4. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base* E, *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. *Alors il existe une partition de* $\mathbf{N}$ *en une réunion (finie ou infinie) de sous-ensembles* $(\mathrm{I}_p)_{p \in \mathrm{P}}$. *Pour chaque* $p \in \mathrm{P}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *admet une norme hilbertienne, compatible avec la norme donnée, et telle que* $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *soit la boule-unité ouverte de* $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *pour cette norme. L'espace de Banach* E *est isomorphe à l'espace vectoriel* $\prod\limits_{p \in \mathrm{P}}^{0} \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *des suites, indexées par* P, *d'éléments de* $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *convergeant vers* 0 *quand* p *tend vers l'infini, et* D *est l'intersection du produit des* $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *avec* E.

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que, pour tout $p \in \mathrm{P}$, $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ est un domaine borné symétrique irréductible, et même fortement irréductible au sens de [18]. D'autre part, le théorème 5.3. fournit la décomposition d'un domaine de Reinhardt borné homogène en « produit continu tendant vers 0 à l'infini » de domaines bornés symétriques irréductibles au sens de [15] et [18]. Il est facile, à partir des résultats de [15], de calculer la composante connexe de l'identité dans le groupe G(D). Remarquons enfin que tout domaine de Reinhardt borné homogène est convexe (comparer avec [16] et [17]).

Démonstration du théorème 5.4. — Considérons sur $\mathbf{N}$ la relation $\mathscr{R}$ suivante : on dit que $m \mathscr{R} n$ si et seulement si $Z(e_m, e_m, e_n) \neq 0$. Le lemme 5.1. montre que $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrique. On déduit du lemme 5.2. que $\mathscr{R}$ est transitive. Ainsi, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit $P = \mathbf{N}/\mathscr{R}$. Pour tout $p \in P$, soit I_p l'ensemble des éléments $n \in \mathbf{N}$ qui appartiennent à la classe d'équivalence de p. Enfin, soit $E^0_{I_p}$ le sous-espace vectoriel engendré algébriquement par les e_n, $n \in I_p$, et suivant l'habitude, soit E_{I_p} sa fermeture. Il découle facilement des calculs précédents que, pour tout $\xi \in E^0_{I_p}$, pour tout $x \in E^0_{I_p}$, $Z(\xi,x,x)$ est colinéaire à x. Par passage à la limite, c'est vrai également pour tout $\xi \in E_{I_p}$ et pour tout $x \in E_{I_p}$. L'égalité

$$Z(\xi,x,x) = -(x,\xi)x$$

définit un produit scalaire hermitien (x,ξ) sur E_{I_p}. Pour ce produit scalaire, $D \cap E_{I_p}$ est la boule-unité ouverte de E_{I_p}, et ce produit scalaire fait de E_{I_p} un espace hilbertien.

On peut plonger E dans le produit $\prod_{p \in P} E_{I_p}$. Sur la forme de Z, il est clair que D s'envoie sur l'intersection de E avec le produit des $D \cap E_{I_p}$. Du fait que E est un espace de Banach à base, on déduit que l'image de E dans $\prod_{p \in P} E_{I_p}$ est l'ensemble des suites indexées par P d'éléments de E_{I_p} convergeant vers 0 à l'infini, et le théorème est démontré.

Enfin, on déduit de cette étude le théorème suivant. (Je ne supposerai pas que les vecteurs de la base sont des tripotents pour Z).

THÉORÈME 5.5. — *Soit* D_1 (resp. D_2) *un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base* E_1 (*resp.* E_2), *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (*resp.* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$), *et supposons que* D_1 *et* D_2 *soient analytiquement isomorphes. Alors il existe une famille de nombres réels strictement positifs* $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et une permutation* σ *de* $\mathbf{N}$ *telle que l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(e_n) = c_n f_{\sigma(n)}$$

soit un isomorphisme linéaire de D_1 *sur* D_2.

Idée de la démonstration. — Comme D_1 et D_2 sont homogènes, il existe un isomorphisme g de D_1 sur D_2 tel $g(0) = 0$. On sait que g

est linéaire, et que, pour tout $\xi \in E_1$, pour tout $x \in E_1$, pour tout $y \in E_1$,

$$g(Z(\xi,x,y)) = Z(g(\xi),\ g(x),\ g(y)).$$

On en déduit que, si E_1 (resp. E_2) est isomorphe à $\overset{0}{\prod\limits_{p \in P_1}} E_{I_p}$ (resp. $\overset{0}{\prod\limits_{p \in P_2}} E_{I_p}$), il existe une bijection τ de P_1 sur P_2 telle que, $\forall p \in P_1$, g induise un isomorphisme de E_{I_p} sur $E_{I_{\tau(p)}}$. On sait que $D_1 \cap E_{I_p}$ est la boule-unité ouverte de l'espace de Hilbert E_{I_p}. En composant g avec un automorphisme linéaire isométrique ψ_p de E_{I_p}, on trouve, pour tout $n \in p$:

$$g(\psi_p(e_n)) = c_n f_{\sigma_p(n)},$$

où σ_p est une bijection de I_p sur $I_{\tau(p)}$. Ceci suffit à montrer le théorème.

6. Applications.

Maintenant que l'on connaît tous les domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base, il serait intéressant de traiter le problème suivant : étant donné un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n \in N})$, étant donnés un sous-ensemble I de N et un domaine de Reinhardt borné homogène $B \subset E_I$, trouver tous les domaines de Reinhardt bornés D tels que $D \cap E_I = B$ et que l'orbite de l'origine sous l'action de $G(D)$ contienne $D \cap E_I$. Nous allons résoudre ce problème quand $I = N^* = N \backslash \{0\}$, c'est-à-dire, quand le sous-espace vectoriel F tel que l'orbite de l'origine sous l'action de $G(D)$ soit égale à $D \cap F$ est de codimension au plus 1. Alors E_{N^*} est égal au sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0 à l'infini d'un produit d'espaces hilbertiens $E_p (p \in P)$, et $E_{\{0\}}$ est isomorphe à C. On peut bien sûr supposer que $D \cap E_{\{0\}}$ est le disque-unité ouvert Δ dans C, et on sait que D est l'image de $D \cap E_0$ sous l'action de $G(D)$. Supposons, comme précédemment, que les $(e_n)_{n \in N^*}$ sont des tripotents et que e_0 appartient à la frontière de D. On a alors le lemme suivant :

LEMME 6.1. — *Pour tout* $p \in P$, *il existe un nombre réel* $r_p \geqslant 0$, *tel que, pour tout* $n \in p$, *on ait :*

$$Z(e_n, e_n, e_0) = -\, r_p e_0 .$$

De plus, $\sum\limits_{p \in P} r_p < +\infty$.

Démonstration. — On a vu au lemme 5.3. que, si m et n appartiennent à p, il existe un nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$Z(e_m, e_m, e_0) = Z(e_n, e_n, e_0) = -\lambda e_0,$$

ce qui prouve l'existence de r_p.

Soient maintenant $p_1, \ldots, p_n$, n éléments deux à deux distincts de P. Si $m_1, \ldots, m_n$ sont des éléments de $p_1, \ldots, p_n$ respectivement, $e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}$ appartient à $\bar{D}$. Par suite, Z qui est continue, est bornée en norme sur $\bar{D}$ par une constante K indépendante de n. Or,

$$Z(e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}, e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}, e_0) = -(r_{p_1} + \cdots + r_{p_n}) e_0 .$$

Ceci prouve que la série $\sum_{p \in P} r_p$ est convergente.

Nous avons le théorème suivant qui généralise un résultat de Sumada [11] :

THÉORÈME 6.2. — *Soit* $B \subset E_{N^*} = \prod_{p \in P}^{0} \ell^2(I_p)$ *un domaine de Reinhardt borné homogène. Soit* $(r_p)_{p \in P}$ *une suite de nombres réels* $\geqslant 0$ *tels que* $\sum_{p \in P} r_p < +\infty$. *Alors il existe un domaine de Reinhardt borné* D *dans* E_N *tel que* B *soit égal à* $D \cap \dot{E}_{N^*}$, *que* B *soit contenu dans l'orbite de l'origine sous l'action de* $G(D)$ *et que, pour tout* $p \in P$, *pour tout* $n \in p$,

$$Z(e_n, e_n, e_0) = -r_p e_0,$$

(où e_n *désigne un tripotent de* $\ell^2(I_p)$*). Plus précisément,*

$$D = \{(x_n)_{n \in N} | \, \|x_p\| < 1, \ \ \forall p \in P \ \text{ et } \ |x_0| \leqslant \prod_{p \in P} (1 - \|x_p\|^2)^{r_p}\}.$$

[$\|x_p\|$ désigne la norme dans $\ell^2(I_p)$ définie par $\|x_p\|^2 = \sum_{n \in I_p} |x_n|^2$].

Démonstration. — Remarquons d'abord que le produit infini $\prod_{p \in P} (1 - \|x_p\|^2)^{r_p}$ est convergent et la formule ci-dessus définit donc un domaine borné de E. On sait que D est l'orbite de $\Delta \subset \mathbf{C} = E_{\{0\}}$ sous l'action des groupes à un paramètre associés aux éléments de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})^-$. Si on résout l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \xi + \mathrm{Z}(\xi,x,x),$$

on trouve, pour tout $p \in \mathrm{P}$, comme solution prenant en $t = 0$ la valeur 0

$$x_p = \frac{\xi_p}{\|\xi_p\|} \operatorname{th}(t\|\xi_p\|),$$

(avec la convention $x_p = 0$ si $\xi_p = 0$).

Il reste à résoudre l'équation différentielle dans $\mathbf{C}$

$$\frac{dx_0}{dt} = -2 \sum_{p \in \mathrm{P}} r_p \|\xi_p\| \operatorname{th}(t\|\xi_p\|) . x_0$$

on trouve

$$x_0 = \lambda \prod_{p \in \mathrm{P}} (\operatorname{ch}(t\|\xi_p\|)^{-2r_p}$$

$$= \lambda \prod_{p \in \mathrm{P}} 1-(\operatorname{th}(t\|\xi_p\|)^2)^{r_p}.$$

On en déduit que, au-dessus du point $(x_p)_{p \in \mathrm{P}} \in \prod_{p \in \mathrm{P}}^{0} \ell^2(\mathrm{I}_p)$, l'image de $\Delta \subset \mathbf{C}$ est égale à l'ensemble des points x_0 tels que

$$|x_0| < \prod_{p \in \mathrm{P}} (1-\|x_p\|^2)^{r_p},$$

ce qui démontre le résultat.

J'ai déjà étudié dans [14] et [15] la distance de Carathéodory sur un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Si D est un domaine borné homogène, D est complet pour la distance de Carathéodory, et même (voir [6]) pour toute distance invariante. On déduit immédiatement du théorème précédent et de quelques considérations élémentaires le résultat suivant :

THÉORÈME 6.3. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base* $(\mathrm{E},(e_n)_{n \in \mathrm{N}})$. *Si l'espace vectoriel complexe* F *tel que l'orbite de l'origine sous l'action de* G(D) *soit égale à* $\mathrm{D} \cap \mathrm{F}$ *est de codimension* 1, *alors* D *est complet pour la distance de Carathéodory, et plus généralement pour toute distance invariante.*

Enfin, on déduit du théorème 5.4. et du théorème 2.1. le résultat suivant (on ne suppose rien sur les éléments de la base).

THÉORÈME 6.4. — *Soit* D_1 *(resp.* D_2*) un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* E_1 *(resp.* E_2*) muni d'une base* $(e_n)_{n\in N}$ *(resp.* $(f_n)_{n\in N}$*). Supposons que le sous-espace vectoriel* F_1 *de* E_1 *(resp.* F_2 *de* E_2*) tel que* $G(D_1).0 = D_1 \cap F_1$ *(resp.* $G(D_2).0 = D_2 \cap F_2$*) est de codimension* 1, *et que* D_1 *et* D_2 *soient analytiquement isomorphes. Alors il existè une famille de nombres réels strictement positifs* $(c_n)_{n\in N}$ *et une permutation* σ *de* **N** *telle que l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(e_n) = c_n f_{\sigma(n)}$$

soit un isomorphisme linéaire de D_1 *sur* D_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Braun, W. Kaup and H. Upmeier, On the automorphisms of circular and Reinhardt domains in complex Banach spaces, *Manuscripta Math.*, 25 (1978), 97-133.

[2] E. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1936), 116-162.

[3] H. Cartan, Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés, *Math. Ann.*, 106 (1932), 540-576.

[4] H. Cartan, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935.

[5] L. Harris, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, in Proceedings on infinite dimensional holomorphy, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, n° 364 (1974), 13-40.

[6] L. Harris, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, in *Advances in holomorphy*, North-Holland, Amsterdam, 1979, 345-406.

[7] L. Harris and W. Kaup, Linear algebraic groups in infinite dimensions, *Illinois Journal of Maths.*, 21 (1977), 666-674.

[8] W. Kaup, Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, *Math. Ann.*, 228 (1977), 39-64.

[9] O. Loos, Bounded symmetric domain and Jordan pairs, *Mathematical lectures*, University of California, Irvine, 1978.

[10] L. Stacho, A short proof of the fact that biholomorphic automorphisms of the unit ball in certain L^p-spaces are linear, *Acta Sci. Math.*, 41 (1979), 381-383.

[11] T. Sunada, Holomorphic equivalence problem for bounded Reinhardt domain, *Math. Ann.*, 235 (1978), 111-128.

[12] P. Thullen, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpen, *Math. Ann.*, 104 (1931), 244-259.

[13] E. Vesentini, Variations on a theme of Caratheodory, *Ann. scuola Norm. Sup. Pisa*, 4e serie, 6 (1979), 39-68.

[14] J.-P. Vigué, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 9 (1976), 203-282.

[15] J.-P. Vigué, Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 11 (1978), 229-246.

[16] J.-P. Vigué, Frontière des domaines bornés cerclés homogènes. *C.R.A.S.*, Paris, 288 A (1979), 657-660.

[17] J.-P. Vigué, Sur la convexité des domaines bornés cerclés homogènes. Séminaire Lelong-Skoda, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, n° 822 (1980), 317-331.

[18] J.-P. Vigué, Sur la décomposition d'un domaine borné symétrique en produit continu de domaines bornés symétriques irréductibles, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 14 (1981), 453-463.

[19] J.-P. Vigué et J. Isidro, Sur la topologie du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné, *Bull. Sc. math.*, 2e série, 106 (1982), 417-426.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1983.

Jean-Pierre Vigué,
Université de Paris VI
Mathématiques.
(Tour 45-46; 5e étage)
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.