ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 5

УДК 515.177.53

С. К. Тарасов

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ОДНОРОДНЫМ ШАРОМ

Пусть X — комплексное банахово пространство, B — открытый единичный шар этого пространства $\{\|x\|<1\}$ и S — единичная сфера $\{\|x\|=1\}$. Если пространство X гильбертово, то выполняются следующие условия.

(а) Все точки пространства X — точки гладкости. Напомним, что точка x из X является точкой гладкости, если для этой точки существует лишь один опорный функционал, т. е. такой элемент $\varphi\in X^*$ нормы 1, что $\varphi(x)=\|x\|$.

(в) Группа изометрий транзитивно действует на S.

(с) Шар B биголоморфно однороден.

Это означает, что для любой пары точек $x, y\in B$ существует такое биголоморфное отображение $f: B\to B$ шара B на себя, что $f(x)=y$.

Свойства (а) и (с), конечно, не характеризуют полностью гильбертовы пространства. Действительно, каждое L^p-пространство с конечным $p>1$ обладает свойством (а), каждая C^*-алгебра обладает свойством (с). В частности, если $C(K)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте K и $f: x\to \dfrac{x+a}{1+x\bar{a}}$, то f биголоморфно на B и $f(0)=a$.

В этой заметке доказывается

Теорема. *Комплексное банахово пространство, обладающее свойствами* (а) *и* (с), *является гильбертовым пространством.*

Известно, что если пространство X конечномерно и обладает свойством (в), то оно гильбертово. Вместе с тем известны примеры банаховых пространств с транзитивной на сфере S группой изометрий, отличных от гильбертовых [1, с. 255]. В этих примерах пространство несепарабельно. До сих пор остается открытой проблема Банаха: существуют ли, помимо гильбертовых, сепарабельные банаховы пространства с транзитивной на единичной сфере группой изометрий (в наших обозначениях обладающие свойством (в)).

Заметим, что согласно теореме Мазура [1, с. 245] единичная сфера S сепарабельного банахова пространства обладает точками гладкости (кстати, в несепарабельном случае точек гладкости может и не быть). Очевидно также, что при изометриях точки гладкости переходят в точки гладкости, поэтому сепарабельные банаховы пространства со свойством (в) обладают и свойством (а).

Тем самым из сформулированной теоремы вытекает

Следствие. *Комплексное сепарабельное банахово пространство, обладающее свойствами* (в) *и* (с), *является гильбертовым пространством.*

В доказательстве теоремы используется глубокий результат Каупа, содержащий характеризацию пространств с биголоморфно однородным шаром. Формулировка результата (здесь мы следуем [2]) потребует нескольких определений, подробное изложение этой теории можно найти в [3] или [4].

Оператор $A\in L(X)$ называется эрмитовым, если $\|\exp itA\|=1$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Если оператор $C\in L(X)$ можно представить в виде $C=A+iB$, где A, B эрмитовы, то C называется гильбертовым оператором. Эрмитов оператор называется неотрицательным, если его спектр принадлежит полуоси $\lambda\geqslant 0$.

Комплексное банахово пространство X есть C^*-пространство, если отмечено непрерывное полуторалинейное отображение $X\times X\to L(X)$, сопоставляющее паре (x, y) гильбертов оператор $\langle x, y\rangle\in L(X)$, причем
1) $\langle x, x\rangle$ — неотрицательный оператор;
2) $\langle x, y\rangle z=\langle z, y\rangle x$;
3) $[\langle x, y\rangle, \langle z, v\rangle]=\langle\langle x, y\rangle z, v\rangle-\langle z, \langle y, x\rangle v\rangle$;
4) $\|\langle x, x\rangle\|=\|x\|^2$.

Результат Каупа таков: шар B тогда и только тогда биголоморфно однороден, когда X является C^*-пространством.

К примеру, для алгебры $C_0(\Omega)$ всех непрерывных функций на локально компактном пространстве Ω, исчезающих на бесконечности, отображение задается следующим образом: $\langle f, g\rangle h=f\bar{g}h$. В гильбертовом случае $\langle x, y\rangle z=1/2((x, y)z+(z, y)x)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

C^*-пространства обладают свойством: минимальное замкнутое подпространство X_u, содержащее данный элемент $u\in X$ и инвариантное относительно оператора $\langle u, u\rangle$, изоморфно $C_0(\Omega)$. Отсюда, если X гильбертово, то X_u одномерно для всех элементов u.

Доказательство теоремы. Фиксируем произвольный элемент $u\in X$. Свойство (с) означает, что X является C^*-пространством и, следовательно, X_u изоморфно $C_0(\Omega)$. Если предположить, что в X_u существуют точки, не являющиеся гладкими, то, используя теорему Хана—Банаха, мы получили бы негладкие точки в X, но так как все точки в X гладкие (свойство (а)), то $C_0(\Omega)$ также должно состоять из гладких точек. Очевидно, что это возможно лишь в случае, если Ω состоит из одной точки, значит, $\dim X_u=1$. Пользуясь аксиомами C^*-пространств, получаем отсюда, что для каждого $u\in X$ имеет место равенство $\langle u, u\rangle u=\|u\|^2u$.

Для пары элементов u, v пусть $X_{u,v}$ — наименьшее замкнутое подпространство, являющееся C^*-пространством и содержащее u и v. Тогда для любого $\lambda\in\mathbf{C}$

$$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle(u+\lambda v)=\|u+\lambda v\|^2(u+\lambda v)=$$
$$=\|u\|^2u+2\lambda\langle u, u\rangle v+\lambda^2\langle v, u\rangle v+\bar{\lambda}(\langle u, v\rangle u+2\lambda\langle u, v\rangle v+\lambda^2\|v\|^2v).$$

Варьируя λ, из этого соотношения легко вывести, что все слагаемые из правой части линейно выражаются через u и v. Следовательно, $X_{u,v}$ инвариантно относительно операторов, полученных из линейных комбинаций u и v. Таким образом, $\dim X_{u,v}\leqslant 2$.

Единичный шар пространства $X_{u,v}$ также является голоморфно однородным шаром и поэтому симметрической областью. Из классификации Картана легко вытекает, что в $\mathbf{C}^2$ существуют лишь две нормы, относительно которых единичный шар становится симметрической областью, именно sup-норма и гильбертова норма. Однако в sup-норме появляются точки, не являющиеся гладкими. Следовательно, $X_{u,v}$ — гильбертово пространство. Таким образом, все двухмерные сечения исходного пространства гильбертовы и теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

. Rolewicz S. Metric linear spaces//Monogr. mat. Warszava, 1972.
. Горин Е. А. Эрмитовы элементы банаховых алгебр и однородные ограниченные симметрические области//Тез. докл. конф. «Теоретические и прикладные вопросы математики, III». Тарту, 1985. 22—27.
. Kaup W. A Rieman mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces//Math. Z. 1983. **183**. 503—529.
. Isidro J. M., Stacho L. L. Holomorphic automorphism groups in Banach spaces. Amsterdam, 1985.

Поступила в редакцию
04.11.87

ЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 5

ДК 517.5

Б. С. Кашин

ОБ ОДНОЙ ГРУППЕ ЗАДАЧ О ПОПЕРЕЧНИКАХ

Ниже рассматриваются задачи об оценках поперечников, естест-ıенно возникающие при исследовании некоторых вопросов теории ор-огональных рядов.

Общая постановка такова: пусть X, Y — банаховы пространства, $\Psi: X\to Y$ — непрерывный (нелинейный) оператор, переводящий еди-ıичный шар в X в ограниченное (по норме пространства Y) множество. Требуется оценить величину

$$\mathscr{D}_\Psi(n, m)=\sup_{L\subset X,\ \dim L\leqslant n} d_n(\Psi(B_L), Y) \tag{1}$$

(в (1) sup берется среди всех n-мерных подпространств $L\subset X$, $n=1$, 2, ...; мы используем обозначения: B_L — единичный шар в L, $\Psi(A)$ — образ множества $A\subset X$ при отображении Ψ, $d_m(E, Y)$ — m-й попереч-ник по Колмогорову множества $E\subset Y$, $m=0, 1, \ldots$).

Поведение величин (1) характеризует в определенном смысле воз-можность «линеаризации» оператора Ψ. В частном случае, когда $X=Y=L^2(0, 1)$, $\Psi(f)=|f|$, величину (1) обозначим просто $\mathscr{D}(n, m)$.

Интерес к оценкам величин (1) возникает, например, при рассмот-рении задачи о выборе из данной ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\|\varphi_n\|_{L^{p+\delta}}\leqslant M$, $n=1, 2, \ldots$, $\delta>0$, возможно более плотной S_p-подсистемы $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ (т. е. такой подсистемы, что в порожденном ею подпространстве нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_p$ эквивалентны; подробнее об этой задаче см. в [1]). Здесь обращает на себя внимание тот факт, что метод, применимый при четных p, перестает работать при $p\neq 4, 6, 8, \ldots$. Такая выделенная роль четных показателей известна и в некоторых других задачах теории ортогональных рядов (см., например, [2]). Раз-ница между четными и остальными значениями p проявляется и при рассмотрении величин (1). Легко видеть, что если $\Psi(f)=|f|^{p-2}$, то $\Psi: L^p\to L^q$, $q=p(p-2)^{-1}$ и $\mathscr{D}_\Psi(n, m)=0$ при $m>n^{p-2}$ для четных p. Действительно, в этом случае в подпространство, аппроксимирующее $\Psi(B_L)$, достаточно включить все функции вида

$$e_{i_1}\cdot e_{i_2}\cdot\ \ldots\ \cdot e_{i_{p-2}},\quad \{e_i\}_{i=1}^n \text{ — ортонормированный базис в } L. \tag{2}$$

n

где $r_i(t)$ — функции Радемахера (см. [3]). Покажем, что для $p=3$, т. е. при $\Psi(f)=|f|$ и $n\to\infty$, множество $\Psi(B_L)$ не может (в отличие от случая $\Psi(f)=|f|^{p-2}$, $p=4, 6, \ldots$) быть аппроксимировано в L^2 (а тем более и в L^p, $p>2$) с точностью $n^{-\delta}$ подпространством размерности $\leqslant n^R$ ($\delta>0$, R — произвольные фиксированные постоянные).

Утверждение 1. *Для некоторых абсолютных положительных постоянных γ, ε_0 при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $n=2, 3, \ldots$ и*

$$m\leqslant\Bigl(\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\gamma\varepsilon^{-1}} C_n^\nu\Bigr)\cdot\varepsilon^2$$

имеет место оценка $\mathscr{D}(n, m)\geqslant\varepsilon$ (и, следовательно, при $\delta>0$ и $m\geqslant n$ $\mathscr{D}(n, m)>n^{-\delta}$, если $m\leqslant n^{an^\delta}$, $a=a(\delta)>0$).

Доказательство. Вычисления показывают, что при $k=4$, 6, ... справедливо равенство

$$I_k\equiv\int_0^1\Bigl|\sum_{i=1}^k r_i(t)\Bigr|\cdot\prod_{i=1}^k r_i(t)\,dt=C_{k-2}^{\frac{k-2}{2}}\cdot 2^{-k}\cdot(-1)^{\frac{k}{2}-1}. \tag{3}$$

Пусть n фиксировано, $W=\{w_j\}_{j=1}^{2^n}$ — набор функций Уолша, а $\Lambda_j\subset W$ — совокупность функций, представимых в виде произведения $2s$ функций Радемахера с $2s\leqslant j$. В силу (3) для $w\in\Lambda_j$ найдется полином $P\in L_n$ с

$$\|P\|_2=1,\quad |(w, |P|)|\equiv\Bigl|\int_0^1|P|\,w\,dt\Bigr|\geqslant\frac{c}{j};\quad 0<c<1. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для любого подпространства E, $\dim E\leqslant|\Lambda_j|c^2(2j)^{-2}$, $j=2, 3, \ldots$, имеет место соотношение

$$\sup_{f\in L_n,\ \|f\|_2=1}\rho(|f|, E)\geqslant\frac{c}{2j};\quad \rho(u, E)\equiv\inf_{g\in E}\|u-g\|_2. \tag{5}$$

Действительно, в противном случае, вводя оператор π_E — ортогонального проектирования на E, мы для каждой функции $w\in\Lambda_j$ имеем

$$\|\pi_E w\|_2=\sup_{g\in E,\ \|g\|_2=1}(w, g)\geqslant|(w, g_0)|\cdot\|g_0\|_2^{-1},$$

где $g_0\in E$, $\|g_0-|P|\,\|_2<c(2j)^{-1}$, а для P выполняется (4).
Тогда $|(w, g_0)|\geqslant|(w, |P|)|-|(w, |P|-g_0)|\geqslant c(2j)^{-1}$, т. е. $\|\pi_E w\|_2\geqslant$ $\geqslant c(2j)^{-1}\cdot(1+c(2j)^{-1})^{-1}\geqslant c(4j)^{-1}$. Но с другой стороны, по неравенству Бесселя

$$\sum_{w\in\Lambda_j}\|\pi_E w\|_2^2=\sum_\nu\sum_w(w, e_\nu)^2\leqslant\dim E$$

($\{e_\nu\}$ — ортонормированный базис в E), поэтому

$$m=\dim E>\Bigl(\frac{c}{4j}\Bigr)^2|\Lambda_j|\geqslant\Bigl(\frac{c}{4j}\Bigr)^2\cdot\sum_{0\leqslant 2s\leqslant j}C_n^{2s},$$

что противоречит предположению о размерности E. Из (5) легко выводится утверждение 1*.