XXVII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1987

УДК 519.21

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Й. Сунклодас

§ 1. Введение и обозначения

Пусть

$$X_1,\ X_2, \ldots \tag{1}$$

– последовательность вещественных случайных величин (сл. в.) с

$$\mathbf{E}X_j=0,\ \mathbf{E}X_j^2<\infty,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \text{ и } \mathbf{E}(X_1+\ldots+X_n)^2=1.$$

Буквой $\mathcal{N}$ обозначим вещественную стандартную нормальную сл. в. с функцией распределения $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$.

Через C_2 обозначим пространство вещественных ограниченных и непрерывных функций (определенных на всей вещественной прямой), которые на всей вещественной прямой имеют ограниченные и непрерывные производные первого и второго порядков.

Везде далее $h\in C^2$.

Для $t>0$ обозначим

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j,\quad F_n(x)=\mathbf{P}(S_n<x),$$

$$d_2(F_n,\ \Phi)=\sup_{h\in C^2}|\mathbf{E}h(S_n)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})|/\|h\|_2,$$

$$\overline{X}_j=X_j 1_{(|X_j|\leqslant t)},\quad \overline{\overline{X}}_j=X_j 1_{(|X_j|>t)},$$

$$\overline{L}_{r,n}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|\overline{X}_j|^r,\quad \overline{\overline{L}}_{r,n}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|\overline{\overline{X}}_j|^r,\quad L_{r,n}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_j|^r,$$

где 1_A – индикатор события A, $\|h\|_2=\|h\|+\|h'\|+\|h''\|$ и $\|h\|=\sup\limits_x|h(x)|$.

Пусть $N=\{1,\ 2,\ \ldots\}$, $d(V_1,\ V_2)=\inf\{|x-y|: x\in V_1,\ y\in V_2\}$ – расстояние между множествами $V_1,\ V_2\subset N$, $\mathcal{F}_V$ – σ-алгебра, порожденная сл. в. $\{X_j,\ j\in V\}$.

В настоящей работе нас будет интересовать оценка сверху метрики $d_2(F_n,\Phi)$, когда последовательность сл. в. (1) удовлетворяет одному из следующих условий слабой зависимости:

1) **условию m-зависимости:** для $\forall\ V_1,\ V_2\subset N$ σ-алгебры $\mathcal{F}_{V_1}$ и $\mathcal{F}_{V_2}$ независимы, как только $d(V_1,\ V_2)>m$;

2) **условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.):** для $\forall\ V_1,\ V_2\subset N$

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_{V_1},\ B\in\mathcal{F}_{V_2}\\ \mathbf{P}(A)>0}}|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|/\mathbf{P}(A)=\varphi=\varphi\left(d(V_1,\ V_2)\right)\downarrow 0,$$

когда $d(V_1,\ V_2)\to\infty$;

3) **условию сильного перемешивания (с. п.):** для $\forall V_1,\ V_2\subset N$

$$\sup_{A\in\mathcal{F}_{V_1},\ B\in\mathcal{F}_{V_2}}|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|=\alpha=\alpha\left(d(V_1,\ V_2)\right)\downarrow 0,$$

когда $d(V_1,\ V_2)\to\infty$.

В независимом случае эта задача решена в работе [12].

Для наглядности в точности полученных оценок метрики $d_2(F_n,\ \Phi)$ для последовательности сл. в. (1) с конечными вторыми моментами отдельно выписаны соответствующие оценки при дополнительном условии

$$\mathbf{E}|X_j|^s<\infty,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ 2<s\leqslant 3. \tag{2}$$

В доказательствах используются идеи работ [19], [14], [8], [10], [12], в которых применяется метод локального секционирования.

Хочется заметить, что идея локального секционирования без привлечения дифференциального уравнения, по-видимому, впервые была использована в работах В. А. Статулявичуса [6], [7].

Буквами C и $C(\cdot)$ будем обозначать (не всегда одни и те же) абсолютные положительные и положительные конечные постоянные, зависящие только от параметров, указанных в скобках соответственно.

§ 2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть последовательность сл. в.* (1) *является m-зависимой. Тогда для $m\geqslant 0$ и $t>0$*

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C\{\overline{\overline{L}}_{1,n}+(m+1)\overline{\overline{L}}_{2,n}+(m+1)^2\overline{L}_{3,n}+(m+1)^3\overline{L}_{4,n}\}.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условие* (2). *Тогда для $m\geqslant 0$*

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(m+1)^{s-1}L_{s,n}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность сл. в.* (1) *удовлетворяет условию р. с. п. с $\varphi(\tau)\leqslant Ke^{-\lambda\tau}$, где $0<K<\infty$, $\lambda>0$ – постоянные. Тогда для $t>0$ и $q\geqslant 4$*

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(K,\ \lambda,\ q)\left\{\overline{\overline{L}}_{1,n}+\overline{\overline{L}}_{2,n}+\overline{L}_{3,n}\left(\ln(n+1)\right)^2+\overline{L}_{4,n}\left(\ln(n+1)\right)^2+\overline{L}_{q,n}\right\}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и условие* (2). *Тогда*

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(K,\ \lambda)L_{s,n}\left(\ln(n+1)\right)^{s-1}.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность сл. в.* (1) *удовлетворяет условию р. с. п. с* $\varphi(\tau)\leqslant K\tau^{-\mu}$, *где*

$$\mu=\frac{2(s-1)}{s^2(s-2)}[4\beta(2s-3)-(s-2)(6-s)],$$

а $0<K<\infty$ *и* $\beta>1$ — *постоянные, и условию* (2).

Тогда

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(K,\ \beta,\ s)n^a L_{s,\,n},$$

где $a=s(s-2)/\big(2(2\beta+s-2)\big)$.

Теорема 4. *Пусть последовательность сл. в.* (1) *удовлетворяет условию с. п. с* $\alpha(\tau)\leqslant Ke^{-\lambda\tau}$, *где* $0<K<\infty$, $\lambda>0$ — *постоянные, и* $\mathbf{E}X_j^4<\infty, j=1, 2, \ldots, n$.

Тогда

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(K,\ \lambda)(L_{3,\,n}+L_{4,\,n})\big(\ln(n+1)\big)^2.$$

§ 3. Усечение и основное равенство

Интегрируя по частям, получаем, что для любых вещественных сл. в. ξ и η

$$|\mathbf{E}h(\xi)-\mathbf{E}h(\eta)|=\Big|\int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{P}(\xi<x)-\mathbf{P}(\eta<x)]h'(x)\,dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\|h'\|\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{P}(\xi<x)-\mathbf{P}(\eta<x)|\,dx\leqslant\|h'\|\mathbf{E}|\xi-\eta|. \tag{3}$$

Если, кроме того, $\mathbf{E}\xi^2=1$, $\eta=\mathcal{N}$ и ξ не зависит от η, то, согласно (3),

$$|\mathbf{E}h(\xi)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})|\leqslant\|h'\|\mathbf{E}^{1/2}(\xi-\mathcal{N})^2=\sqrt{2}\,\|h'\|. \tag{4}$$

Дополнительно обозначим

$$\overline{X}_j^{(0)}=\overline{X}_j-\mathbf{E}\overline{X}_j,\quad \overline{\overline{X}}{}_j^{(0)}=X_j-\overline{X}_j^{(0)},\quad \overline{S}_n^{(0)}=\sum_{j=1}^n\overline{X}_j^{(0)},$$

$$Z_n=\overline{S}_n^{(0)}/\mathbf{E}^{1/2}(\overline{S}_n^{(0)})^2,\quad A_j=\overline{X}_j^{(0)}/\mathbf{E}^{1/2}(\overline{S}_n^{(0)})^2,\quad Z_j^{(i)}=\sum_{|p-j|\leqslant im}A_p,$$

$$z_j^{(i)}=Z_n-Z_j^{(i)},\quad l_{r,\,n}=\sum_{j=1}^n\mathbf{E}|A_j|^r,$$

где $m=1, 2, \ldots$, а в случае m-зависимости $m=0, 1, \ldots$

Ясно, что

$$\mathbf{E}|S_n-Z_n|\leqslant\mathbf{E}|S_n-\overline{S}_n^{(0)}|+\mathbf{E}|\overline{S}_n^{(0)}-Z_n|\leqslant 2\overline{\overline{L}}_{1,\,n}+|\mathbf{E}(\overline{S}_n^{(0)})^2-1|.$$

Поэтому, согласно неравенству (3),

$$|\mathbf{E}h(S_n)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})|\leqslant\|h'\|[2\overline{\overline{L}}_{1,\,n}+|\mathbf{E}(\overline{S}_n^{(0)})^2-1|]+$$
$$+|\mathbf{E}h(Z_n)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})|. \tag{5}$$

Далее рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$f'(x)-xf(x)=h(x)-\mathbf{E}h(\mathcal{N}). \tag{6}$$

Оно имеет решение

$$f(x)=e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}h_0(u)\,e^{-u^2/2}du=-e^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}h_0(u)\,e^{-u^2/2}du, \tag{7}$$

где $h_0(x)=h(x)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})$.

Ясно, что $h_0(x)\in C^2$ и $\mathbf{E}h_0(\mathcal{N})=0$. Тогда (см. [12] и [14])

$$\|f\|\leqslant 2\|h_0\|,$$
$$\|f'\|\leqslant\|h_0\|+c_1\|h'\|,$$
$$\|f''\|\leqslant c_2\|h_0\|+c_4\|h'\|+c_3\|h''\|,$$
$$\|f'''\|\leqslant c_4\|h_0\|+c_5\|h'\|+c_6\|h''\|, \tag{8}$$

где

$$c_1\leqslant 0{,}347,\ c_2=2c_3=\sqrt{\pi/2},\ c_4\leqslant 0{,}3197,\ c_5\leqslant 0{,}4302,\ c_6=2.$$

Для оценки последних двух слагаемых в правой части неравенства (5) выпишем их в удобной нам форме.

Так как $\mathbf{E}S_n^2=1$, поэтому

$$|1-\mathbf{E}(\overline{S}_n^{(0)})^2|\leqslant 9\overline{\overline{L}}_{2,\,n}+\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}|\mathbf{E}(\overline{\overline{X}}{}_i^{(0)}\overline{\overline{X}}{}_j^{(0)})+2\mathbf{E}(\overline{X}_i^{(0)}\overline{\overline{X}}{}_j^{(0)})|. \tag{9}$$

Используя равенство (6) и то, что $1=\mathbf{E}Z_n^2=\sum_{j=1}^n[\mathbf{E}(A_jZ_j^{(1)})+\mathbf{E}(A_jz_j^{(1)})]$, получаем, что

$$\mathbf{E}h(Z_n)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})=\sum_{j=1}^n\mathbf{E}(A_jZ_j^{(1)})\mathbf{E}[f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})-f'(z_j^{(2)})]-$$
$$-\sum_{j=1}^n\{\mathbf{E}[A_jf(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})]-\mathbf{E}(A_jZ_j^{(1)})\mathbf{E}f'(z_j^{(2)})\}-$$
$$-\sum_{j=1}^n\mathbf{E}\{A_j[f(Z_n)-f(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})]\}+$$
$$+\sum_{j=1}^n\mathbf{E}(A_jZ_j^{(1)})\mathbf{E}[f'(Z_n)-f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})]+\sum_{j=1}^n\mathbf{E}(A_jz_j^{(1)})\mathbf{E}f'(Z_n). \tag{10}$$

Прибавляя и отнимая к правой части равенства (10), получаем, что

$$\mathbf{E}h(Z_n)-\mathbf{E}h(\mathcal{N})=I_1+I_2, \tag{11}$$

где

$$I_1=\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})\mathbf{E}[f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})-f'(z_j^{(2)})-f''(z_j^{(2)})Z_j^{(1)}]-$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j[f(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})-f(z_j^{(2)})-f'(z_j^{(2)})Z_j^{(1)}]\}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j[f(Z_n)-f(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})-f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})]\}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})[f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})-f'(z_j^{(2)})]\}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})\mathbf{E}[f'(Z_n)-f'(z_j^{(2)}+Z_j^{(1)})],$$

$$I_2=\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})\mathbf{E}[f''(z_j^{(2)})Z_j^{(1)}]-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[A_j f(z_j^{(2)})]-$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j Z_j^{(1)}[f'(z_j^{(2)})-\mathbf{E}f'(z_j^{(2)})]\}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})f'(z_j^{(2)})\}+\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j z_j^{(1)})\mathbf{E}f'(Z_n).$$

Для того чтобы все сл. в., входящие в правую часть равенства (11), были определены, предполагаем, что $4m+1<n$.

Через J обозначим сл. в., равномерно распределенную на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ и не зависящую от сл. в. (1). Тогда, используя формулу Тейлора, получаем, что

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2}\|f'''\|n\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J|+\|f''\|n\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2|+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})^2|+\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})|+\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J|\right\}, \qquad (12)$$

где

$$\gamma_J=\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(Z_j^{(1)})^2 1_{(J=j)} \quad \text{и} \quad \nu_J=\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)}|1_{(J=j)}.$$

Легко показать, что для любого вещественного $r\geqslant 1$ (см. [8])

$$\mathbf{E}|Z_j^{(i)}|^r\leqslant(2mi+1)^r n^{-1}l_{r,n}, \quad i=0, 1, 2. \qquad (13)$$
$$\mathbf{E}|Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)}|^r\leqslant(2m)^r n^{-1}l_{r,n}. \qquad (14)$$

Используя неравенство Гёльдера вместе с оценками (13), (14) и $\mathbf{E}|\nu_J|^3\leqslant\leqslant\mathbf{E}|Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)}|^3$, получаем, что

$$\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2|\leqslant(2m+1)^2 n^{-1}l_{3,n}, \quad \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})^2|\leqslant(2m)^2 n^{-1}l_{3,n},$$
$$\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})|\leqslant 2m(2m+1)n^{-1}l_{3,n},$$
$$\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J|\leqslant 2m(2m+1)n^{-1}l_{3,n}.$$

Вставляя эти оценки в неравенство (12) и используя оценки (8), получаем, что

$$|I_1|\leqslant C\|h\|_2\{(m+1)^2 l_{3,n}+n\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J|\}. \qquad (15)$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

В силу m-зависимости и того, что $\mathbf{E}\overline{X}_j^{(0)}=\mathbf{E}\overline{\overline{X}}_j^{(0)}=0$, из неравенства (9) получаем, что

$$|1-\mathbf{E}(\overline{\overline{S}}_n^{(0)})^2|\leqslant 9(2m+1)\overline{\overline{L}}_{2,n}=\varepsilon_1. \qquad (16)$$

Ясно, что $\mathbf{E}\gamma_J^2\leqslant\mathbf{E}(Z_J^{(1)})^4$. Поэтому, используя неравенство Гёльдера и оценку (13), получаем, что

$$n\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J|\leqslant(2m+1)^3 l_{4,n}.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\varepsilon_1\leqslant 1/2$. Тогда из оценки (16) следует, что $\mathbf{E}(\overline{\overline{S}}_n^{(0)})^2\geqslant 1/2$, и поэтому из неравенства (15) получаем, что

$$|I_1|\leqslant C\|h\|_2\{(m+1)^2\overline{L}_{3,n}+(m+1)^3\overline{L}_{4,n}\}. \qquad (17)$$

В силу m-зависимости и того, что $\mathbf{E}X_j=0$ для всех j, получаем, что $I_2=0$. Поэтому, когда $4m+1<n$, доказательство теоремы 1 следует из неравенства (5) и оценок (16) и (17).

При $\varepsilon_1\leqslant 1/2$ из оценки (16) следует, что

$$1\leqslant 2(m+1)\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(\overline{X}_j^{(0)})^2\leqslant 2(m+1)n^{1/3}\overline{L}_{3,n}^{2/3},$$

т. е.

$$n^{-1/2}\leqslant[2(m+1)]^{3/2}\overline{L}_{3,n}. \qquad (18)$$

Пусть $4m+1\geqslant n$. Тогда, согласно неравенству (4),

$$d_2(F_n, \Phi)\leqslant\sqrt{2}(4m+1)[2(m+1)]^3\overline{L}_{3,n}^2\leqslant\sqrt{2}(4m+1)^{1/2}[2(m+1)]^{3/2}\overline{L}_{3,n},$$

если $\overline{L}_{3,n}\leqslant(4m+1)^{-1/2}[2(m+1)]^{-3/2}=x$, и

$$d_2(F_n, \Phi)\leqslant\sqrt{2}\,\overline{L}_{3,n}x^{-1}=\sqrt{2}(4m+1)^{1/2}[2(m+1)]^{3/2}\overline{L}_{3,n},$$

если $\overline{L}_{3,n}>x$.

Значит, если $\varepsilon_1\leqslant 1/2$ и $4m+1\geqslant n$, то

$$d_2(F_n, \Phi)\leqslant C(m+1)^2\overline{L}_{3,n}. \qquad (19)$$

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть $2<s\leqslant 3$. Тогда при $t=(m+1)^{-1}$, $m\geqslant 0$, получаем, что

$$\bar{\bar{L}}_{1,n}\leqslant (m+1)^{s-1}\bar{L}_{s,n},\quad \bar{\bar{L}}_{2,n}\leqslant (m+1)^{s-2}\bar{L}_{s,n},$$

$$\bar{L}_{3,n}\leqslant (m+1)^{-(3-s)}\bar{L}_{s,n},\quad \bar{L}_{4,n}\leqslant (m+1)^{-(4-s)}\bar{L}_{s,n}.$$

Остается эти оценки вставить в неравенство теоремы 1. Следствие 1 доказано.

§ 5. Доказательство теорем 2 и 3

Сначала докажем более общий результат.

Лемма А. *Пусть последовательность сл. в.* (1) *удовлетворяет условию р. с. п. и* $\varphi^*=\sum_{\tau=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(\tau)<\infty$.

Тогда для $t>0$ *и* $m\geqslant 1$

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant C(\varphi^*)\{\bar{\bar{L}}_{1,n}+\bar{\bar{L}}_{2,n}+m^2\bar{L}_{3,n}+m^2\bar{L}_{4,n}+$$
$$+[n^{1/2}\bar{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\bar{L}_{4,n}^{1/2}]\,\varphi^{1/2}(m+1)\}.$$

Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1 ([5], с. 392; [2], с. 237). *Пусть последовательность сл. в.* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяет условию р. с. п.,* $V_1, V_2\subset N$, *сл. в.* ξ *является* $\mathscr{F}_{V_1}$-*измеримой, сл. в.* η — $\mathscr{F}_{V_2}$-*измеримой. Тогда*

1) *если* $\mathbf{E}\,|\,\xi\,|<\infty$ *и* $\mathbf{P}(\,|\,\eta\,|>C)=0$, *то*

$$|\,\mathbf{E}(\xi\eta)-\mathbf{E}\,\xi\,\mathbf{E}\,\eta\,|\leqslant 2\varphi\,\mathbf{E}\,|\,\xi\,|\,C;\tag{20}$$

2) *если* $\mathbf{E}\,|\,\xi\,|^p<\infty$, $\mathbf{E}\,|\,\eta\,|^q<\infty$, $p,\ q>1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, *то*

$$|\,\mathbf{E}(\xi\eta)-\mathbf{E}\,\xi\,\mathbf{E}\,\eta\,|\leqslant 2\varphi^{1/p}\mathbf{E}^{1/p}|\,\xi\,|^p\,\mathbf{E}^{1/q}|\,\eta\,|^q.\tag{21}$$

Учитывая, что $\mathbf{E}\,\bar{X}_j^{(0)}=\mathbf{E}\,\bar{\bar{X}}_j^{(0)}=0$, в неравенстве (9) оцениваем согласно неравенствам леммы 1 и получаем, что

$$|\,1-\mathbf{E}(\bar{S}_n^{(0)})^2\,|\leqslant 9\left(1+4\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\bar{\bar{L}}_{2,n}=\varepsilon_2.\tag{22}$$

Используя неравенство (21), также получаем, что для всех j

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|v-j|\leqslant m}\bar{X}_v^{(0)}\right)^2\leqslant\left(1+4\sum_{\tau=1}^{2m}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\sum_{|v-j|\leqslant m}\mathbf{E}\,\bar{X}_v^2.$$

Поэтому из неравенства (15) следует, что при $\varepsilon_2\leqslant 1/2$ (тогда $\mathbf{E}(\bar{S}_n^{(0)})^2\geqslant 1/2$)

$$|\,I_1\,|\leqslant C\,\|\,h\,\|_2\Biggl\{m^2\bar{L}_{3,n}+$$
$$+\left(1+\sum_{\tau=1}^{2m}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\sum_{j=1}^{n}\sum_{|u-j|\leqslant m}\sum_{|v-j|\leqslant m}[\mathbf{E}\,\bar{X}_j^2+\mathbf{E}\,\bar{X}_u^2]\,\mathbf{E}\,\bar{X}_v^2\Biggr\}\leqslant$$
$$\leqslant C\,\|\,h\,\|_2\left\{m^2\bar{L}_{3,n}+\left(1+\sum_{\tau=1}^{2m}\varphi^{1/2}(\tau)\right)m^2\bar{L}_{4,n}\right\}.\tag{23}$$

Оценим $|\,I_2\,|$. Согласно неравенству (21) и оценкам (8),

$$|\,I_2\,|\leqslant 2\sum_{j=1}^{n}\Biggl\{\|f''\|\,\mathbf{E}\,|\,A_jZ_j^{(1)}\,|\,\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(1)})^2+\|f\|\,\mathbf{E}^{1/2}A_j^2+$$
$$+\|f'\|\Bigl[2\mathbf{E}^{1/2}(A_jZ_j^{(1)})^2+\mathbf{E}^{1/2}A_j^2\,\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})^2+$$
$$+\sqrt{2}\,\mathbf{E}^{1/2}A_j^2\left(1+\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(1)})^2\right)\Bigr]\Biggr\}\,\varphi^{1/2}(m+1)\leqslant$$
$$\leqslant C\,\|\,h\,\|_2\,n\{\mathbf{E}\,|\,A_jZ_j^{(1)}a_j\,|+\mathbf{E}^{1/2}A_j^2+\mathbf{E}^{1/2}(A_jZ_j^{(1)})^2+$$
$$+\mathbf{E}^{1/2}(A_j^2b_j)+\mathbf{E}^{1/2}(A_j^2d_j)\}\,\varphi^{1/2}(m+1),\tag{24}$$

где

$$a_j=\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(1)})^2,\quad b_j=\mathbf{E}(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})^2,\quad d_j=\mathbf{E}(Z_j^{(1)})^2,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Однако

$$\mathbf{E}\,|\,a_j\,|^3\leqslant\mathbf{E}\,|\,Z_j^{(1)}\,|^3,\quad \mathbf{E}\,b_j^2\leqslant\mathbf{E}(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})^4,\quad \mathbf{E}\,d_j^2\leqslant\mathbf{E}(Z_j^{(1)})^4.$$

Поэтому, применяя неравенство Гёльдера и используя оценки (13) и (14), получаем, что

$$\mathbf{E}\,|\,A_jZ_j^{(1)}a_j\,|\leqslant(2m+1)^2n^{-1}l_{3,n},\quad \mathbf{E}^{1/2}A_j^2\leqslant n^{-1/2}l_{2,n}^{1/2},$$
$$\mathbf{E}^{1/2}(A_jZ_j^{(1)})^2\leqslant(2m+1)\,n^{-1/2}l_{4,n}^{1/2},\quad \mathbf{E}^{1/2}(A_j^2b_j)\leqslant 2mn^{-1/2}l_{4,n}^{1/2},$$
$$\mathbf{E}^{1/2}(A_j^2d_j)\leqslant(2m+1)\,n^{-1/2}l_{4,n}^{1/2}.$$

Вставляя эти оценки в неравенство (24), получаем, что при $\varepsilon_2\leqslant 1/2$

$$|\,I_2\,|\leqslant C\,\|\,h\,\|_2\{m^2\bar{L}_{3,n}+n^{1/2}\bar{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\bar{L}_{4,n}^{1/2}\}\,\varphi^{1/2}(m+1).\tag{25}$$

В силу неравенства (4) условие $\varepsilon_2\leqslant 1/2$ не ограничивает общности. Поэтому, вставляя оценки (22), (23) и (25) в неравенство усечения (5), получаем, что при условии $4m+1<n$, $m\geqslant 1$,

$$d_2(F_n,\Phi)\leqslant C\Biggl\{\bar{\bar{L}}_{1,n}+\left(1+\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\bar{\bar{L}}_{2,n}+m^2\bar{L}_{3,n}+$$
$$+\left(1+\sum_{\tau=1}^{2m}\varphi^{1/2}(\tau)\right)m^2\bar{L}_{4,n}+[n^{1/2}\bar{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\bar{L}_{4,n}^{1/2}]\,\varphi^{1/2}(m+1)\Biggr\}.\tag{26}$$

Если $\varepsilon_2\leqslant 1/2$, то в неравенстве (22), оценивая согласно неравенству (21), получаем, что для любого вещественного $q\geqslant 2$

$$1\leqslant 2\left(1+4\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}(\bar{X}_j^{(0)})^2\leqslant 2\left(1+4\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)n^{(q-2)/q}\bar{L}_{q,n}^{2/q},$$

т. е.

$$n^{-(q-2)/2}\leqslant\left[2\left(1+4\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)\right]^{q/2}\bar{L}_{q,n}.\tag{27}$$

Поэтому аналогично соответствующей части доказательства теоремы 1 получаем, что если $\varepsilon_2 \leqslant 1/2$ и $4m+1 \geqslant n$, $m \geqslant 1$, то

$$d_2(F_n, \Phi) \leqslant Cm^{1/2}\left(1+\sum_{\tau=1}^{n}\varphi^{1/2}(\tau)\right)^{3/2}\overline{L}_{3,n}. \tag{28}$$

Из оценок (26) и (28) следует доказательство леммы A.

Доказательство теоремы 2. При $\varphi(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$

$$\varphi^* \leqslant 2K^{1/2}\lambda^{-1}. \tag{29}$$

Пусть

$$m=\left[\frac{2(q-1)}{\lambda q}\ln(n\overline{L}_{q,n}^{-1})\right],\quad 0<\overline{L}_{q,n}<e^{-1},\ q\geqslant 4.$$

Тогда

$$\varphi^{1/2}(m+1) \leqslant K^{1/2}(n^{-1}\overline{L}_{q,n})^{(q-1)/q}. \tag{30}$$

Так как для любого вещественного $q \geqslant 4$

$$n^{1/2}\overline{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\overline{L}_{4,n}^{1/2} \leqslant n^{(q-1)/q}\overline{L}_{q,n}^{1/q}+mn^{(q-2)/q}\overline{L}_{q,n}^{2/q},$$

то, используя оценки (29), (30) и (27), получаем, что если $\varepsilon_2 \leqslant 1/2$ и $n>n_0$, то

$$[n^{1/2}\overline{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\overline{L}_{4,n}^{1/2}]\,\varphi^{1/2}(m+1) \leqslant C(K,\lambda,q)\overline{L}_{q,n}. \tag{31}$$

Случай $n \leqslant n_0$ аналогичен случаю, когда $4m+1 \geqslant n$.

Вставляя в неравенство леммы A оценки (29), (31), (27) и m, получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. При выбранном μ $\varphi^* \leqslant C(K, \beta, s)$. Если $L_{s,n} \leqslant 1$, $2<s\leqslant 3$, то при $t=m^{-1}$, $1 \leqslant m \leqslant n^{1/s}$

$$n^{1/2}\overline{L}_{2,n}^{1/2}+mn^{1/2}\overline{L}_{4,n}^{1/2} \leqslant n^{(s-1)/s}\overline{L}_{s,n}^{1/s}+mn^{1/2}\overline{L}_{4,n}^{1/2} \leqslant 2n^{(s-1)/s}L_{s,n}^{1/s}. \tag{32}$$

Кроме того, при $t=m^{-1}$, $m \geqslant 1$,

$$\overline{\overline{L}}_{1,n}+\overline{\overline{L}}_{2,n}+m^2\overline{L}_{3,n}+m^3\overline{L}_{4,n} \leqslant Cm^{s-1}L_{s,n}. \tag{33}$$

Поэтому из леммы A и неравенств (32) и (33) получаем, что для $1 \leqslant m \leqslant n^{1/s}$

$$d_2(F_n, \Phi) \leqslant C(K, \beta, s)\{m^{s-1}L_{s,n}+n^{(s-1)/s}L_{s,n}^{1/s}\varphi^{1/2}(m+1)\}.$$

Остается в последнем неравенстве взять $m=[n^{\varepsilon}]$, где $\varepsilon=s(s-2)/(2(s-1)\times\times(2\beta+s-2))$. Теорема 3 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Имеет место следующая

Лемма B. *Пусть последовательность сл. в. (1) удовлетворяет условию с. п.,* $\alpha^*=\sum_{\tau=1}^{\infty}(\alpha(\tau))^{(r-2)/r}<\infty$, *где* $2<r\leqslant 4$, *и* $m=1, 2, \ldots$ *такое, что* $4m+1<n$.

Тогда для $t>0$ *и* $2<r\leqslant 4$

$$d_2(F_n, \Phi) \leqslant C(\alpha^*)\Big\{\overline{L}_{1,n}+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}^{2/r}|\overline{\overline{X}}_j|^r+m^2\overline{L}_{3,n}+m^2\overline{L}_{4,n}+$$

$$+[n^{(r-1)/r}\overline{L}_{r,n}^{1/r}+mn^{1/2}\overline{L}_{4,n}^{1/2}]\big(\alpha(m+1)\big)^{(r-2)/2r}\Big\}.$$

Для доказательства леммы **B** нам понадобится следующий результат.

Лемма 2 ([3], [13]). *Пусть последовательность сл. в.* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяет условию с. п.,* $V_1, V_2 \subset N$, *сл. в.* ξ *является* $\mathscr{F}_{V_1}$*-измеримой, сл. в.* η *—* $\mathscr{F}_{V_2}$*-измеримой. Тогда*

1) *если* $|\xi| \leqslant C$ *и* $\mathbf{E}|\eta|^q<\infty$, $q>1$, *то*

$$|\mathbf{E}(\xi\eta)-\mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \leqslant 4C\mathbf{E}^{1/q}|\eta|^q\alpha^{1-q^{-1}}; \tag{34}$$

2) *если* $\mathbf{E}|\xi|^p<\infty$, $\mathbf{E}|\eta|^q<\infty$, $p, q>1$, $p^{-1}+q^{-1}<1$, *то*

$$|\mathbf{E}(\xi\eta)-\mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \leqslant 6\mathbf{E}^{1/p}|\xi|^p\mathbf{E}^{1/q}|\eta|^q\alpha^{1-p^{-1}-q^{-1}}. \tag{35}$$

Оценивая в неравенстве (9), согласно неравенствам (34) и (35), получаем, что

$$|1-\mathbf{E}(\bar{S}_n^{(0)})^2| \leqslant 9\left(1+13\sum_{\tau=1}^{n}\big(\alpha(\tau)\big)^{(r-2)/r}\right)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}^{2/r}|\overline{\overline{X}}_j|^r=\varepsilon_3. \tag{36}$$

Если $\varepsilon_3 \leqslant 1/2$ и $2<r\leqslant 4$, то

$$n\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J| \leqslant C\left(1+\sum_{\tau=1}^{2m}\big(\alpha(\tau)\big)^{(r-2)/r}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\sum_{|u-j|\leqslant m}\sum_{|v-j|\leqslant m}[\mathbf{E}\bar{X}_j^2+\mathbf{E}\bar{X}_u^2]\mathbf{E}^{2/r}|\bar{X}_v|^r \leqslant C(\alpha^*)m^2\overline{L}_{4,n}.$$

Поэтому из неравенства (15) получаем, что при $\varepsilon_3 \leqslant 1/2$

$$|I_1| \leqslant C\|h\|_2(m^2\overline{L}_{3,n}+m^3\overline{L}_{4,n}). \tag{37}$$

Оценивая $|I_2|$, согласно неравенствам (34) и (35) и используя оценки (8), получаем, что

$$|I_2| \leqslant 4\sum_{j=1}^{n}\{\|f''\|\mathbf{E}|A_jZ_j^{(1)}|\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(1)})^2+\|f\|\mathbf{E}^{1/2}A_j^2+$$

$$+2\|f'\|\mathbf{E}^{1/2}(A_jZ_j^{(1)})^2\}\big(\alpha(m+1)\big)^{1/2}+$$

$$+6\|f'\|\sum_{j=1}^{n}\{\mathbf{E}^{1/r}|A_j|^r\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(2)}-Z_j^{(1)})^2+$$

$$+\sqrt{2}\,\mathbf{E}^{1/r}|A_j|^r\big(1+\mathbf{E}^{1/2}(Z_j^{(1)})^2\big)\big\}\big(\alpha(m+1)\big)^{(r-2)/2r}\leqslant$$

$$\leqslant C\|h\|_2 n\{\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}a_J|+\mathbf{E}^{1/2}(A_J Z_J^{(1)})^2+\mathbf{E}^{1/r}|A_J|^r+\mathbf{E}^{1/2}|(Z_J^{(1)})^2 e_J|+$$

$$+\mathbf{E}^{1/2}|(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})^2 e_J|\}\big(\alpha(m+1)\big)^{(r-2)/2r}, \tag{38}$$

где $e_j=\mathbf{E}^{2/r}|A_j|^r$, $j=1, 2, \ldots, n$.

$\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} a_J|$ и $\mathbf{E}^{1/2}(A_J Z_J^{(1)})^2$ оценены в § 5. Легко видеть, что $\mathbf{E}\,e_J^2\leqslant\mathbf{E}\,A_J^4$. Поэтому, применяя неравенство Гёльдера и оценки (13) и (14), получаем, что

$$\mathbf{E}^{1/r}|A_J|^r\leqslant n^{-1/r}l_{r,n}^{1/r},\ \ \mathbf{E}^{1/2}|(Z_J^{(1)})^2 e_J|\leqslant(2m+1)\,n^{-1/2}\,l_{4,n}^{1/2},$$

$$\mathbf{E}^{1/2}|(Z_J^{(2)}-Z_J^{(1)})^2 e_J|\leqslant 2mn^{-1/2}\,l_{4,n}^{1/2}.$$

Вставляя эти оценки в неравенство (38), получаем, что при $\varepsilon_3\leqslant 1/2$

$$|I_2|\leqslant C\|h\|_2\{m^2\bar{L}_{3,n}+n^{(r-1)/r}\bar{L}_{r,n}^{1/r}+mn^{1/2}\bar{L}_{4,n}^{1/2}\}\big(\alpha(m+1)\big)^{(r-2)/2r}. \tag{39}$$

От условия $\varepsilon_3\leqslant 1/2$ можем отказаться в силу неравенства (4). Поэтому, вставляя оценки (36), (37) и (39) в неравенство (5), получаем доказательство леммы **В**.

Доказательство теоремы 4. Применим лемму **В** при $r=3$. Тогда при $\alpha(\tau)\leqslant Ke^{-\lambda\tau}$

$$\alpha^*\leqslant 3K^{1/3}\lambda^{-1}. \tag{40}$$

Пусть

$$m=\Big[\frac{9}{2\lambda}\ C_1\ln(n\bar{L}_{4,n}^{-1})\Big],\ \ 0<\bar{L}_{4,n}<e^{-1},\ \ C_1\geqslant\max\{1,\ 2\lambda/9\}.$$

Тогда

$$\big(\alpha(m+1)\big)^{1/6}\leqslant K^{1/6}(n^{-1}\bar{L}_{4,n})^{3C_1/4}. \tag{41}$$

Рассуждая таким же образом, как мы это делали при доказательстве теоремы 1 и леммы А, получаем, что если $\varepsilon_3\leqslant 1/2$, то для любого вещественного $q>2$

$$n^{-(q-2)/2}\leqslant\Big[8\ \Big(1+12\ \sum_{\tau=1}^{n}\ \big(\alpha(\tau)\big)^{(q-2)/q}\Big)\Big]^{q/2}\bar{L}_{q,n}. \tag{42}$$

Кроме того, $n^{2/3}\bar{L}_{3,n}^{1/3}\leqslant n^{3/4}\bar{L}_{4,n}^{1/4}$. Поэтому из неравенств (40), (41) и (42) следует, что при $\varepsilon_3\leqslant 1/2$ и $n>n_0$

$$[n^{2/3}\bar{L}_{3,n}^{1/3}+mn^{1/2}\bar{L}_{4,n}^{1/2}]\big(\alpha(m+1)\big)^{1/6}\leqslant C(K,\ \lambda)\bar{L}_{4,n}. \tag{43}$$

Вставляя в неравенство леммы **В** оценки (40), (43), (42) и m получаем, что если $\varepsilon_3\leqslant 1/2$ и $n>n_0$, то для $t>0$

$$d_2(F_n,\ \Phi)\leqslant$$

$$\leqslant C(K,\ \lambda)\ \Big\{\ \bar{\bar{L}}_{1,n}+\sum_{j=1}^{n}\ \mathbf{E}^{2/3}|\bar{\bar{X}}_j|^3+(\bar{L}_{3,n}+\bar{L}_{4,n})\big(\ln(n+1)\big)^2\ \Big\}. \tag{44}$$

Переходя к пределу в правой части этого неравенства, когда t бесконечно растет, получаем неравенство теоремы 4.

В силу (42) можем отказаться от условия $n\leqslant n_0$. Теорема 4 доказана.

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Автор благодарен В. А. Статулявичусу за постоянное внимание к работе.

Литература

1. **Бернштейн С. Н.** Собрание сочинений. Т. IV. М.: Наука, 1964.
2. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
3. **Давыдов Ю. А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. XIII, вып. 4. С. 730–737.
4. **Ибрагимов И. А.** Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1962. Т. VII, вып. 4. С. 361–392.
5. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
6. **Статулявичус В. А.** Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова // Liet. matem. rink. 1961. Т. 1, № 1/2. С. 231–314.
7. **Статулявичус В. А.** Об уточнениях предельных теорем для слабо зависимых случайных величин. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статистике. Вильнюс. 1962. С. 113–119.
8. **Сунклодас Й.** Расстояние в метрике L_1 распределения суммы слабо зависимых случайных величин от нормальной функции распределения // Liet. matem. rink. 1982. Т. XXII, № 2. С. 171–188. ISSN 0132–2818.
9. **Сунклодас Й.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных величин с сильным перемешиванием // Liet. matem. rink. 1984. Т. XXIV, № 2. С. 174–185. ISSN 0132–2818.
10. **Сунклодас Й.** Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных полей // Liet. matem. rink. 1986. Т. XXVI, № 3. С. 541–559. ISSN 0132–2818.
11. **Тихомиров А. Н.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. XXV, вып. 4. С. 800–818. ISSN 0040–361X.
12. **Barbour A. D. and Hall P.** On bounds to the rate of convergence in the central limit theorem // The Bulletin of the London Mathematical Society. 1985. V. 17, p. 2, No 65. P. 151–156.
13. **Chipp Ch.** Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences // Z. Wahr. verw. Gebiete. 1979. B. 49, No 1. S. 49–62. ISSN 0044–3719.
14. **Erickson R. V.** L_1-bounds for asymptotic normality of m-dependent sums using Stein's techniques // The Annals of Probab. 1974. V. 2, No 3. P. 522–529.
15. **Hoeffding W., Robbins H.** The central limit theorem for dependent random variables // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 773–780.
16. **Rosenblatt M.** A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. of the Nat. Acad. of Sc. of USA. 1956. V. 42, No 1. P. 43–47.
17. **Schneider E.** On the speed of convergence in the random central limit theorem for φ-mixing processes // Z. Wahr. verw. Gebiete. 1981. B. 58, No 1. S. 125–138. ISSN 0044–3719.
18. **Statulevičius V. A.** Application of semiinvariants to asymptotic analysis of distributions of random processes // Multivariate Analysis-IV. 1977. P. 325–337.
19. **Stein Ch.** A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // In.: Proc. of the sixth Berkeley symp. on math. stat. and probab. Univ. of California Press. 1972. V. 2. P. 583–602.
20. **Takahata H.** L_∞-bound for asymptotic normality of weakly dependent summands using Stein's result // The Annals of Probab. 1981. V. 9, No 4. P. 676–683. ISSN 0044–3719.

Институт математики и кибернетики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
21.01.1987

SILPNAI PRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ SKIRSTINIŲ APROKSIMAVIMAS NORMALIUOJU SKIRSTINIU

J. Sunklodas

(Reziumė)

Gauti metrikos d_2 (konvergavimas metrikoje d_2 yra ekvivalentus silpnajam konvergavimui) įverčiai iš viršaus centrinėje ribinėje teoremoje silpnai priklausomiems atsitiktiniams dydžiams, turintiems baigtinius antrosios eilės momentus.

APPROXIMATION OF DISTRIBUTIONS OF SUMS OF WEAKLY DEPENDENT RANDON VARIABLES BY THE NORMAL DISTRIBUTION

J. Sunklodas

(Summary)

Here estimates of the metric d_2 (convergence in the metric d_2 is equivalent to the weak convergence) in the central limit theorem for weakly dependent random variables are obtained. It is assumed that random variables have finite second moments.

XXVII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1987

УДК 517.955

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЕДИНГЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p^α И B_{pq}^α. II

П. Шлекис

Данная статья является продолжением I части статьи с аналогичным названием. Поэтому мы используем введенные там обозначения и продолжаем начатую там нумерацию теорем и лемм.

§ 2. Достаточные условия корректности задачи Коши для уравнений типа Шредингера в паре пространств $(\Lambda_p^0, \Lambda_p^\alpha)$

Кроме пространств Лиувилля и Бесова нам также потребуется пространство Харди H^p, которое определим, следуя [1]. Фиксируем функцию $\varphi \in S(R^n)$ такую, что $(F\varphi)(0) \neq 0$. Для любой медленно растущей обобщенной функции f определим максимальную функцию $f^+(x) = \sup\limits_{0<t<\infty} |(\varphi(\cdot \mid t) * f)(x)|$; здесь $x \in R^n$, $\varphi(\cdot \mid t) = t^{-n}\varphi(\cdot/t)$. Тогда

$$H^p = \{ f \in S'(R^n) : \|f\|_{H^p} \equiv \|f^+\|_{L_p} < +\infty \}, \quad 0<p<\infty.$$

Как известно (см., например [1]), данное определение пространства H^p не зависит от выбора функции φ и $H^p = L_p$, $1<p<\infty$, с эквивалентностью норм.

Пространство мультипликаторов $M(H^p, H^p)$ определяется так же, как в I части статьи. Заметим, что основные свойства пространства $M(H^p, H^p)$ можно найти в [2–4].

Приведем некоторые свойства пространства H^p, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Функция f называется p-атомом $(0<p\leqslant 1)$, если существует шар $B = B_f \subset R^n$ такой, что $\operatorname{supp} f \subset B$, $\|f\|_{L_\infty} \leqslant m^{-1/p}(B)$ $\big(m(\cdot)$ – мера Лебега$\big)$ и

$$\int\limits_{R^n} f(x)\, x^\alpha\, dx = 0, \quad |\alpha| \leqslant \left[\frac{n}{p} - n\right].$$

Свойство 1 [5]. Пусть $0<p\leqslant 1$. Если λ_j – такие комплексные числа, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$, и f_j – p-атомы, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j$ сходится H^p и

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \Big\|_{H^p} \leqslant A' \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \Big)^{1/p}.$$