

PERIODIKUS
FUNKCIONÁL-DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
BIFURKÁCIÓELMÉLETE

RÖST GERGELY

PhD Disszertáció

Szeged, 2005

SZTE Bolyai Intézet
Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék



témavezető:

DR. KRISZTIN TIBOR

TARTALOMJEGYZÉK

1. Rövid összefoglaló	1
2. Bevezetés	5
3. Periodikus modellek késleltetett visszacsatolással a gyakorlatban	8
3.1. Populációdinamikai modellek	8
3.2. Klimatikus modellek	9
3.3. Az elektromos hal	9
3.4. A munkaerőpiac változása	10
3.5. Neurális hálózatok	10
3.6. Nagy teljesítményű szerszámgépek stabilitása	11
3.7. Haematopoiesis	11
4. Általános elméleti háttér	13
4.1. Leképezések Neimark-Sacker bifurkációja	13
4.2. Rezonanciák	15
4.3. A funkcionál-differenciálegyenletek általános elméletéről	16
4.4. Periodikus rendszerek és Floquet elmélet	17
4.5. Spektrális dekompozíció	18
4.6. Centrális sokaságok	19
5. Neimark-Sacker bifurkáció	21
5.1. A karakterisztikus egyenlet és a Floquet-együtthatók	21
5.2. Neimark-Sacker bifurkáció	24
5.3. Rezolvens és spektrál projekció	26
5.4. A bifurkáció iránya	30
5.5. Az invariáns tórusz	35

6. <i>Alkalmazások</i>	37
6.1. Jelölések	37
6.2. Krisztin-Walther egyenlet periodikus együtthatóval	39
6.3. Mackey-Glass egyenlet	42
6.4. Nicholson-féle legyek	45
6.5. Periodikus Krisztin-Walther egyenlet és periodikusan gerjesztett neuronok	53
7. <i>Rezonáns Poincaré-normálforma</i>	55
7.1. Rezonáns normálforma tétel	55
7.2. A rezonáns együttható kiszámítása	56
8. <i>Bifurkáció rezonancia esetén</i>	64
8.1. A rezonáns egyenlet	64
8.2. A rezonáns egyenlet, mint speciális eset	65
8.3. A periódus leképezés bifurkációja 1:4 rezonancia esetén	67
8.4. A periodikus együttható esete	70
8.5. Wright-egyenlet periodikus együtthatóval	75
9. <i>Az invariáns tórusz dinamikája és egzisztenciája, további kérdések</i>	77
9.1. Dinamika a tóruszon	77
9.2. Globális bifurkáció	78
9.3. Különböző késleltetések és periódusok	80
10. <i>Summary</i>	81
11. <i>Irodalomjegyzék</i>	84

1. RÖVID ÖSSZEFOGLALÓ

A disszertáció témája az

$$\dot{x}(t) = \gamma(a(t)x(t) + f(t, x(t-1)))$$

alakú, időben periodikus, késleltetett argumentumú differenciálegyenletek dinamikájának vizsgálata kritikus paraméterértékek közelében. Ilyen típusú egyenletek számos gyakorlati alkalmazásban előfordulnak (neurális hálózatok, populációdinamika, nagy teljesítményű gépek mechanikája). Bifurkációnak azt a jelenséget nevezzük, amikor a dinamika hirtelen megváltozik a paraméter egy kritikus értékénél, például az egyensúlyi helyzet elveszti a stabilitását, megjelennek periodikus megoldások, stb. A klasszikus bifurkációelméletet egy- és kétdimenziós dinamikai rendszerekre dolgozták ki, később általánosították magasabb dimenziós esetre is centrális sokaság redukció, vagy más néven projekciós módszer segítségével. A funkcionál-differenciálegyenletek esetében a természetes fázistér a kezdeti intervallumon folytonos függvények végtelen dimenziós Banach-tere. A kritikus esetben a dinamika összes lényegi sajátossága a centrális sokaságon mutatkozik meg. Autonóm esetben erre is van módszer: a Hale-féle bilineáris formákkal kiszámolható a projekció a centrális sokaságra. Ez azonban nem alkalmazható periodikus egyenletekre. Az elmúlt években kifejlesztettek egy normálforma elméletet periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre, de az is csak olyan egyenletekre alkalmazható, amelyeknél a lineáris rész autonóm.

A disszertáció fő eredménye, hogy teljes bifurkációanalízist ad periodikus egyenletek egy széles osztályára. Amikor a késleltetés megegyezik a periódussal, a Neimark-Sacker bifurkáció teljes elmélete átvihető a végtelen dimenziós esetre, anélkül, hogy bármilyen extra feltételt követelnénk meg a nemlinearitástól. A legnagyobb technikai nehézséget az okozza, hogy a Banach-terünkben explicit számításokra van szükség: véges dimenziós invariáns sokaságok és normálformák meghatározására. Ehhez egy funkcionálanalitikus megközelítést használunk, a spektrális projekciót. Az összes eredményünk explicit, az egyenlet ismeretében meghatározhatjuk a bifurkációs pontokat és

a bifurkáció irányát is, ez az alkalmazások szempontjából különösen fontos. A kiterjesztett fázistérben invariáns tóruszok megjelenése figyelhető meg.

Mint kiderül, az

$$\dot{x}(t) = \gamma f(t, x(t-1))$$

egyenlet nem csak egy speciális esete az előzőnek, ahol $a(t) \equiv 0$, hanem itt egészen új jelenségek is előfordulhatnak. Ekkor ugyanis a bifurkáció erősen 1:4 rezonáns és az invariáns tórusz nem feltétlenül létezik. Az erős rezonanciáknak is kiterjedt elmélete van, a disszertációban az 1:4 rezonancia esetét is általánosítjuk periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre. Az eredményeink itt is explicitek.

Az eredményekhez felhasznált módszerek az alábbiak: Floquet-elméletet használva levezetjük a karakterisztikus egyenletet, meghatározzuk a Floquet-együtthatókat, amik a monodrómia operátor sajátértékei. A monodrómia-operátor a periódus-leképezés deriváltja a 0 egyensúlyi helyzetben. A karakterisztikus egyenlet alapos vizsgálatával felderítjük, milyen paraméterértékeknél hány Floquet-együttható van a komplex egységkörön belül, melyek a kritikus paraméterértékek, amikor ez a szám változik. Megmutatjuk, hogy a bifurkációs tétel feltételei teljesülnek. Amikor a paraméter értékét változtatjuk és az áthalad a kritikus értéken, egy konjugált Floquet-együttható pár metszi az egységkört, Neimark-Sacker bifurkáció történik és egy invariáns görbe jelenik meg a centrális sokaságon. A kiterjesztett fázistérben ez egy invariáns tórusznak tekinthető. A centrális sokaságra megszorított leképezés kiszámításához és a bifurkáció irányának meghatározásához általánosítjuk a projekciós módszert. A spektrális projekció operátor egy Riesz-Dunford integrállal fejezhető ki, ezt kiszámoljuk, miután egy peremérték-problémát megoldva sikerül meghatározni a rezolvenst. Ezután már el tudjuk végezni a bifurkációs analízist és a bifurkáció irányának meghatározására explicit számolható feltételt adunk, ez meghatározza az invariáns görbe stabilitását is. Ezt az eredményt tudjuk alkalmazni a funkcionál-differenciálegyenletek elméletében legnevezetesebb egyenletek (Mackey-Glass-, Nicholson- és Krisztin-Walther-egyenlet) periodikus változataira is, így számos új bifurkációs tételt kapunk. Explicit ellenőrizhető feltételt adunk arra, hogy az eredmények mikor terjeszthetők ki a rezonáns esetre, mikor jelennek meg stabil és instabil 4-periodikus pontok. Levezetjük a rezonáns Poincaré-normálformát. Bebizonyítjuk, hogy a periodikus együtthatók esetében az erős rezonanciának nincs hatása a bifurkációra, mindezt a periodikus együtthatós Wright-egyenlettel

illusztráljuk. További kérdésekkel is foglalkozunk: az invariáns tóruszok globális létezésének problémája, valamint az eredmények kiterjesztése arra az esetre, amikor a periódus a késleltetés racionális/irracionális többszöröse, valamint magasabbrendű egyenletekre.

Az értekezés a következőképpen épül fel: ezen rövid összefoglaló után a 2. fejezetben egy bevezetőt adunk egyrészt a tárgy történetébe, másrészt megmutatjuk, tételeink hogyan kapcsolódnak mások korábbi eredményeihez. A 3. fejezetben motivációként példákat adunk olyan alkalmazásokra különböző tudományágakból, amelyek periodikus funkcionál-differenciálegyenletes modellekre vezetnek. A 4. fejezetben áttekintjük a felhasznált általános elméleti hátteret. Az 5., 6. és a 8. fejezet teljes mértékben új eredményeket tartalmaz. Az 5. fejezetben meghatározzuk a karakterisztikus egyenletet és Floquet-együtthatókat, a monodrómia operátor rezolvensét és a spektrális projekció operátort, majd a projekciós módszert általánosítva bizonyítjuk a Neimark-Sacker bifurkációs tételt periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre. A 6. fejezetben ennek alkalmazásával új bifurkációs tételeket adunk több nevezetes egyenletre. A 7. fejezet speciális, ebben levezetjük a rezonáns Poincaré-normálformát. Az irodalomban egymásnak ellentmondó eredmények jelentek meg ezzel kapcsolatban, és noha a helyes formulát is közölték, a részletes számolásokat mellőzték, ezért ezt most ebben az értekezésben megtesszük. A 8. fejezet tartalmazza a rezonáns esetre vonatkozó eredményeket: a rezonáns bifurkációs tételt és a periodikus együtthatós egyenletekre vonatkozó tételt. A további kérdéseket a 9. fejezetben fogalmazzuk meg. Röviden megtárgyaljuk, milyen dinamika lehetséges az invariáns tóruszon, létezhet-e a tórusz egy nagyobb paraméterintervallumon, mi történik abban az esetben, ha a periódus nem egyezik meg a késleltetéssel. Az értekezést angol nyelvű összefoglaló és részletes irodalomjegyzék zárja.

A disszertáció a szerző alábbi publikációin alapul:

- Röst, G. , *Neimark-Sacker Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations*, *Nonlinear Analysis Theor.*, 2005, vol. 60, issue 6, pp. 1025-1044
- Röst, G. , *Some Applications of Bifurcation Formulae to the Period Map of Delay Differential Equations*, in: *Dynamical Systems and Applications : Proceedings of the ACMA International Conference 2004 - Dynamical Systems and Applications*, July 05-10, 2004, Antalya, Turkey (eds.: Akca H., Boucherif A. and Covachev V.), GBS Publishers, Delhi, 2005, pp. 624-641
- Röst, G. , *Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations at Points of 1:4 Resonance*, *Functional Differential Equations*, megjelenés alatt, pp. 1-17

2. BEVEZETÉS

Időben lezajló folyamatok modellezésekor az élet számtalan területén alkalmazhatunk differenciálegyenleteket olyan rendszerek leírására, amelyeknél a jövőbeni viselkedés a jelenlegi állapottól függ. Azonban sok esetben kiderül, hogy ez csak egy első közelítésnek felel meg - a rendszer késéssel reagál és a múltbeli állapotok határozzák meg az aktuális viselkedést; ilyenkor késleltetett visszacsatolásos differenciálegyenletről vagy funkcionál-differenciálegyenletről beszélünk. Mivel ismernünk kell a rendszer történetét is, ilyen esetekben a természetes fázistér a folytonos függvények végtelen dimenziós tere lesz. Azt a rendszert, amelynek a működését időben változó szabályok írják le, nemoautonómnak nevezzük. A környezet periodikus változása periodikus egyenletet eredményez, a dolgozat témája ilyen egyenletek dinamikájának a vizsgálata. Egyenleteink tartalmazznak egy valós paramétert is. A paraméter változtatása során bizonyos kritikus értékeknél a rendszer dinamikája hirtelen megváltozik, ezt nevezzük bifurkációnak. Bifurkációt a gyakorlatban már a gőzgépek centrifugális regulátorainál megfigyeltek. A tárgy történeti gyökerei egészen az 1700-as évek közepéig nyúlnak vissza, amikor Euler és társai vizsgálták néhány speciális alakú egyenletet a görbék elméletén belül. Volterra volt az első, aki szisztematikusan kezdett vizsgálni ilyen egyenleteket néhány ragadozó-zsákmány és viszkoelaszticitási modell kapcsán. Az elmélet komoly fejlődésnek azonban csak a 20. század második felében indult, amikor megjelentek a bonyolult vezérlésű szerkezetek, azóta egészen napjainkig viharos gyorsasággal fejlődik. Ezt szemléltetendő készítettem egy egyszerű kis statisztikát a Math. Reviews adatbázis alapján. A 34K (funkcionál-differenciálegyenletek) klasszifikációs kategóriát csak 1973-ban hozták létre és a korábbi cikkeket nem mind kategorizálták újra, ezért erre az időszakra a statisztika kissé csalóka, mindenesetre 1970-ig csupán 100 publikáció esik ebbe a témakörbe. A '70-es években már mintegy 2000 dolgozatot írtak a matematika ezen ágáról, a '80-as években ez a szám 3500-ra, a '90-esben 5500-ra emelkedett. 2000-től napjainkig 4600 cikket publikáltak funkcionál-differenciálegyenletekről, tehát erre az évtizedre csaknem 10000

publikáció extrapolálható. Látható, hogy a fejlődés nagyjából exponenciális a '70-es évektől egészen máig.

Picard már az 1908-as matematikai kongresszuson értekezett a késleltetett hatások jelentőségéről egyes mechanikai rendszerekben, azonban megfelelő matematikai elmélet híján a mérnökök sokáig eltekintettek ettől a gyakorlatban. A '40-es években a mérnöki és irányításelméleti alkalmazások miatt a figyelem középpontjába került a téma, főleg a Szovjetunióban. Azóta a funkcionál-differenciálegyenletek elmélete jelentősen kiterjedt és szinte minden területen alkalmazható elméletté vált. Számos modell található [KM92]-ben és jelen értekezés következő fejezetében. A kezdeti érték problémát és az elmélet alapjait Myshkis fogalmazta meg 1949-ben ([Mys49]). A modern elmélet két alapvető monográfiája Diekmann, van Gils, Verduyn Lunel és Walther ([DVGVLW95]), valamint Hale és Verduyn Lunel ([HVL93]) munkái. A tárgy történetéről egy részletesebb összefoglaló található [Hal05]-ben.

A funkcionál-differenciálegyenletek fejlődéséhez a szegedi matematikusok is sok szép eredménnyel járultak hozzá, ezek közül szeretnék megemlíteni néhányat, a teljesség igénye nélkül. Alapvető monográfiák ([HVL93], [Kua92]) is tartalmazzák Makay ([Mak94]) és Terjéki ([HT83]) stabilitási eredményeit. Hatvani ([Hat02]) tovább nem élesíthető választ adott a funkcionál-differenciál-egyenletek stabilitáselméletének egyik központi problémájára. Az oszcillációelméletben alaplőnek számít Győri monográfiája ([GL91]). Neutrális egyenletekkel kapcsolatban megemlítjük Péics és Karsai dolgozatát ([PK02]). Krisztin feltárta a globális attraktor struktúráját egyenletek egy széles osztályára a [KWW99] monográfiában, illetve cikkek egy sorozatában ([Kri00], [Kri01a], [Kri01b], [KW01]). Azóta az irodalomban ezt Krisztin-Walther egyenlet néven ismerik ([MPS03]). Egyes ehhez kapcsolódó eredményeket Bartha ([Bar03]) általánosított állapotfüggő késleltetéses egyenletekre.

A bifurkációelmélet kezdetei Poincaré munkáiban találhatóak, mint ahogy a normálformák módszere is ([Poi79], [Poi99]). A normálformák elméletét többek között Arnold dolgozta ki szisztematikusan (lásd [Arn88], [Van89] és [Guc83]). A Hopf-bifurkáció ([Hop43]) diszkrét változata, a leképezések bifurkációs tétele Neimark és Sacker nevéhez fűződik ([Nei59], [Sac65]) és Hopf-bifurkáció leképezésekre, újabban Neimark-Sacker bifurkáció néven ismeretes. Ennek részletes és precíz bizonyítása [Ioo79]-ban és [MM76]-ban megtalálható. A centrális sokaság felfedezése Pliss ([Pli64]) és Kelley ([Kel67]) munkáihoz köthető, a redukciós elvvel együtt ([Sho75]) ez lehetővé tette magasabb dimenziós rendszerek bifurkációjának vizsgálatát. A Hopf-bifurkáció

alkalmazására autonóm funkcionál-differenciálegyenletekre [HKW81]-ben találunk példákat. A klasszikus módszer a Hale-féle bilineáris formák alkalmazása ([HVL93]), de ez csak autonóm esetben használható. A disszertációban az egyenlethez tartozó periódus-leképezésre (time-one map) akarjuk alkalmazni a centrális sokaság tételt. Az elmúlt évtizedekben centrális sokaság tételek számtalan változata jelent meg különféle dinamikai rendszerekre. Leképezésekre lásd [Car81] és [Van89] munkáit. Krisztin a közelmúltban megmutatta ([Kri05]), hogy a time-t map-hez tartozó centrális sokaság nem feltétlenül invariáns a folytonos dinamikai rendszerre nézve. Banach-térbeli leképezések centrális sokaság tétele megtalálható [KWW99]-ben. A bifurkációanalízishez elegendő simaságú centrális sokaság létezésére van szükség, ezt a fontos simasági eredményt csupán három éve közölte Faria, Huang és Wu ([FHW02]). Van tehát centrális sokaságunk, de egyelőre nincs projekciónk. Mint már említettük, a bilineáris formák esetünkben nem alkalmazhatóak. Faria kifejlesztett egy normálforma elméletet általános periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre ([Far97], [Far98]), azonban ez csak autonóm lineáris rész esetén érvényes. Mozgó koordinátarendszerekkel próbálkozott Hale és Weedermann ([HW04]), de explicit számításokra az ő módszerük sem alkalmas. Ezért egy másfajta, funkcionálanalitikus megközelítést használunk, hogy kiterjeszthessük a projekciós módszert a Banach-terünkre. A számolások többé-kevésbé [Kuz98]-at követik, viszont a skaláris szorzat helyett spektrális projekcióval dolgozunk, ami egy Riesz-Dunford integrállal fejezhető ki. A projekció a monodrómia-operátor rezolvensének a reziduuma, mindezt egy peremérték-probléma megoldása nyomán a Floquet-együtthatók ismeretében ki tudjuk számolni. A késleltetett funkcionál-differenciálegyenletek Floquet-elmélete megtalálható [HVL93]-ban, a spektrálemélet [DVGVLW95]-ben és [VL01]-ben, bizonyos rezolvens számítások pedig [FVL03]-ban. A projekciós módszerrel és az alkalmazott bifurkációelmélettel kapcsolatban [Kuz98]-at ajánljuk.

3. PERIODIKUS MODELLEK KÉSLELTETETT VISSZACSATOLÁSSAL A GYAKORLATBAN

3.1. *Populációdinamikai modellek*

A késleltetési differenciálegyenletek populációdinamikai alkalmazásának szerteágazó irodalma van, Kuang révén még monográfia is született a témában ([Kua92]). A késleltetést itt az az idő okozza, amíg egy újszülött eléri a szaporodóképes kort. Az évszakok váltakozása miatt a születési és a halálozási ráta periodikusan változik. Azokban az esetekben, amikor egy egyed növekedése is függ az évszaktól, a késleltetést is periodikus függvény írja le. Felsorolunk két közelmúltbeli és két klasszikus példát. Zhang és Gopalsamy

$$\dot{x}(t) = r(t)x(t)[1 - x(t - n\tau)/K(t)]$$

logisztikus típusú modellt ([ZG90]), Cheng és Zhang pedig a

$$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + h(t)f(y - \tau(t))$$

perturbált Malthus-modellt ([CZ01]) vizsgálták; $r(t)$, $K(t)$, $\tau(t)$, $a(t)$ és $h(t)$ periodikus függvények. Az eredményeik periodikus megoldások létezésével és stabilitásával kapcsolatosak. Az első példa a Wright- vagy Hutchinson-féle egyenlet egyik változata. Az ökológia egyik alapmodelljének számító Lotka-Volterra féle ragadozó-zsákmány modellnek is számtalan továbbfejlesztését tanulmányozták már ([Kua92]). Megemlítjük még a Nicholson-egyenletet, amellyel részletesebben is foglalkozunk az 5. fejezetben. Nicholson éveken át tanulmányozta egy húslégy, a *Lucilia cuprina* szaporodását ellenőrzött laboratóriumi körülmények között. Kiderült, hogy a legyek szaporodását egy egyszerű differenciálegyenlet írja le, amely 14 nap késleltetést tartalmaz, ennyi idő alatt fejlődik ki egy példány ([GBN80]). Hasonló populációdinamikai modellekről egy nagyon szép áttekintést találunk [Rua05]-ben.

3.2. Klimatikus modellek

A klímaváltozás kérdése napjainkban különösen aktuális, a médiában hétről-hétre jelennek meg a legkülönbözőbb, gyakran egymásnak ellentmondó előrejelzések. Nemrég egy nagy moszkvai konferencián George Sell tartott plenáris előadást a témáról. Sell is hangsúlyozta, hogy egy jó klímamodell csakis periodikus lehet. Az is világos, hogy a klímát befolyásoló tényezők közül jónéhány késleltetve fejt ki hatását. Számptalan különböző klímamoddellel kísérleteztek eddig, amelyek figyelembe vesznek periodikus, késleltetett, sőt sztochasztikus hatásokat is. Most csak egy parciális differenciálegyenletes modellt említünk meg, a következő reakció-diffúzió egyenletet ([Het96], [Het95]):

$$\begin{aligned} c\left(x, \int_{-T}^0 \beta(s)u(t+s, x)ds\right) \partial_t u(t, x) - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u(t, \cdot))(x) \\ = \mu Q(t, x) \left[1 - \alpha(x, u, \int_{-T}^0 \beta(s)u(t+s, x)ds)\right] - g(u), \end{aligned}$$

ahol u egy speciálisan kiátlagolt hőmérséklet, Q a napsugárzás mértéke, ami periodikusan változik, α az albedó, g pedig a Föld természetes hőkisugárzása, így a jobboldal a nettó hőmennyiséget fejezi ki. A nagy kontinentális jégtakarók miatt lassan változó albedó okozza a késleltetést, amely az integrálos tagban jelenik meg. A modell a Föld hőmérsékletének hosszú távú viselkedését próbálja leírni.

3.3. Az elektromos hal

Az elektromos halak (pl. elektromos rája) egyszeri erős elektromos kisülésre képesek, amellyel megbénítják áldozatukat. Egy másik csoportjuk csekély erejű elektromos jeleket bocsát ki, amelyeket csak felerősítve érzékelünk. Az *Apteronotus leptorhynchus* (brown ghost knifefish) a késhalak családjába tartozó gyenge elektromos hal. E halak nemcsak elektromos teret gerjesztenek, de szenzorális neuronokkal, elektroreceptorokkal is rendelkeznek. Az elektroreceptorok parányi feszültségmérőként érzékelik a kibocsátott jelek változásait. A receptorok jelei alapján különbséget tudnak tenni az eltérő vezetőképességű tárgyak között, meghatározzák azok méretét, helyzetét és sebességét is. Emellett kommunikációra is használják az elektromos teret, érzékelik fajtársaik elektromos jeleit és reagálnak rá, aminek fontos szerepe van a szaporodásukban is. Viselkedésük számtalan tudományos vizsgálat tárgya

volt, a fajtárs mesterséges szimulálása során létrejövő jel szinuszos, a késleltetés pedig a feldolgozáshoz szükséges időt jelenti. Hasznosnak mutatkozik a

$$\dot{V}(t) = \Gamma(\sin(\omega t)) - V(t) + f(V(t - r))$$

alakú egyenletek vizsgálata. Hasonló modellekben sikerült kapcsolatot kimutatni bizonyos paraméterek változtatásával az egyenlet dinamikai tulajdonságai (bifurkációk) és a hal viselkedésének megváltozása között, lásd Longtin munkáit, főleg [LL02]-t és [LL03]-t.

3.4. A munkaerőpiac változása

[BdRL99]-ben a szerzők egy reál-üzleti ciklus elméletet tárgyalnak, ahol a munkahelyteremtés és a munkahelymegszűnés egy késleltetett periodikus differenciálegyenlet dinamikáját követi, amely az alábbi formára egyszerűsíthető:

$$h'(t) = k_1(t)h(t) + k_2(t)h(t - T).$$

A késleltetés a beruházási javak optimális leselejtezési kora, az együtthatók periódusa pedig a modell exogén ciklikus adottsága. A munkahelyteremtés aszimptotikusan periodikus ugyanezzel a periódussal.

3.5. Neurális hálózatok

Az

$$\dot{x}(t) = -mx(t) + \alpha \tanh(\beta x(t - 1)) \quad (3.1)$$

egyenlet, ahol $\alpha > 0$, $\beta > 0$ és $m > 0$ egy önálló, öngerjesztő neuron viselkedését modellezi (lásd [KWW99]-t, [Wu01]-t és ezek további hivatkozásait). Az ennél általánosabb

$$\dot{x}(t) = -mx(t) + f(x(t - 1)) \quad (3.2)$$

Krisztin-Walther egyenlet (az elnevezés [MPS03]-ból ered) dinamikája alaposan fel van térképezve ([Kri01b], [KWW99] és [Wal95]) a monoton pozitív késleltetett visszacsatolás esetére; Krisztin, Walther és Wu feltárták a globális attraktor struktúráját. Ha a nemlinearitás nem monoton, akkor bonyolult, akár kaotikus viselkedés is előfordulhat, ahogy Lani-Wayda kimutatta

([LW99]), de a Mackey-Glass egyenlet is egy példa erre. Az 5. fejezetben vizsgálni fogjuk mind a Krisztin-Walther, mind a Mackey-Glass egyenlet periodikus változatait. További példákért és alkalmazásokért Jianhong Wu könyveit ajánljuk ([Wu96], [Wu01]).

3.6. Nagy teljesítményű szerszámgépek stabilitása

A forgó alkatrészek miatt a nagy teljesítményű eszterga-, vágó-, zúzó- és őrlőgépek dinamikáját periodikus egyenletekkel lehet leírni, a késleltetés a regenerációs hatásban jelentkezik. A klasszikus Mathieu-egyenlet 1868-ból ered, késleltetett formában az utóbbi években Stépán és Insperger vizsgálta ([IS02], [IS03] és [Ins02]). A késleltetett Mathieu-egyenlet:

$$\ddot{x}(t) + (\delta + \epsilon \cos(t))x(t) = bx(t - 2\pi).$$

A Hill-féle végtelen determináns egy véges approximációjával számolva meghatározhatóak a stabilitási tartományok a paramétertérben.

Az

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)X(t - 1)$$

többszörös lineáris egyenletnek (itt X vektor, A és B periodikus mátrixfüggvények) fontos szerepe van a nagy sebességű gépek rezonanciájának elkerülésében, a stabilitási vizsgálatok [BMB⁺04]-ben és [BB02]-ben találhatóak, a szerzők Csebisev-polinomokat használnak. A többszörös esetben sincs mód karakterisztikus gyökök explicit kiszámítására, ezért a monodrómia operátor approximációját szokták használni.

További stabilitási vizsgálatokért lásd Stépán monográfiáját ([Sté89]) és egyéb munkáit.

3.7. Haematopoiesis

A haematopoiesis a vörsejtek képződésének folyamata, erre állított fel funkcionál-differenciálegyenletes modelleket Mackey és Glass ([MG77]), valamint Lasota és Wazewska-Czyzewska ([WCL76]). Az autonóm egyenletekről számos publikáció jelent meg, újabban a periodikus változatokat is vizsgálják ([Sak03b], [Sak03a], [CF04], illetve [SA05]). Az említett egyenletek periodikus alakja:

$$p'(t) = \frac{\beta(t)p^m(t - k\omega)}{1 + p^n(t - k\omega)} - \gamma(t)p(t),$$

illetve

$$N'(t) = -\delta(t)N(t) + P(t)e^{-aN(t-m\omega)},$$

ahol $\beta(t), \gamma(t), \delta(t), P(t)$ ω -periodikus függvények. Az eredmények pozitív periodikus megoldások létezésével és globális attraktivitásával kapcsolatosak.

4. ÁLTALÁNOS ELMÉLETI HÁTTÉR

4.1. Leképezések Neimark-Sacker bifurkációja

Legyen $f(x, \gamma) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy paramétertől függő, sima síkbeli leképezés a 0 fixponttal a $\gamma = 0$ paraméterérték mellett. Az f leképezés egy diszkrét dinamikai rendszert definiál, amit így is felírhatunk:

$$x \rightarrow A(\gamma)x + N(x, \gamma),$$

ahol A a Jacobi-mátrix, N pedig a nemlineáris rész. Tegyük fel, hogy A -nak a két sajátértéke $\mu = e^{i\theta}$ és $\bar{\mu} = e^{-i\theta}$, amint $\gamma = 0$. Egy új komplex változó és egy új paraméter bevezetésével a leképezésünk elegendően kicsi γ paraméterértékekre a

$$z \rightarrow \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta)$$

alakba transzformálható, ahol $\beta \in \mathbb{R}$, $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $\theta(0) = \theta$ és

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l.$$

4.1.1. Tétel (Neimark, Sacker ([Kuz98])). *Tegyük fel, hogy az $F_\gamma(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezések egy-paraméteres családjának a $\gamma = 0$ paraméterértékre az $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ fixpontja a $\mu_0 = e^{i\theta}$, $\bar{\mu}_0 = e^{-i\theta}$ sajátértékekkel. Ekkor x_0 -nak van egy olyan környezete, amelyben pontosan egy zárt invariáns görbe bifurkál az x_0 egyensúlyi helyzetből, amint a paraméterérték áthalad 0-n, feltéve, hogy teljesül a*

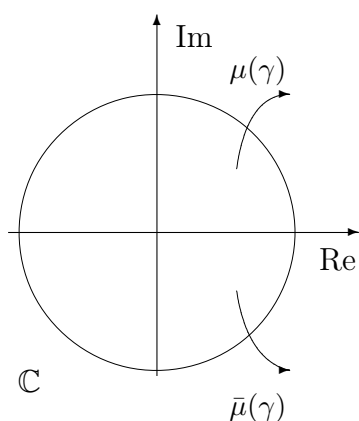
$$\frac{\partial |\mu(\gamma)|}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} \neq 0$$

transzverzálitási (Hopf) feltétel, valamint a

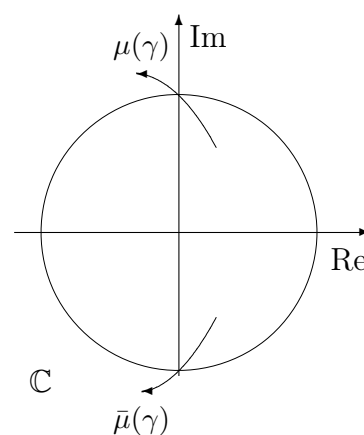
$$\mu_0^4 \neq 1, \quad \mu_0^3 \neq 1$$

nem-rezonáns feltétel.

Az világos, hogy ha a paramétert változtatva a leképezés sajátértékei áthaladnak a komplex egységkörön, akkor megváltozik az egyensúlyi helyzet stabilitása. A tétel azt állítja, hogy ekkor az egyensúlyi helyzet körül megjelenik egy zárt görbe a síkon, amelyik invariáns a leképezésre nézve. Az invariáns görbe véges simaságú és a 0-hoz közelebb tipikusan egyre simább. A Hopf-bifurkációhoz hasonlóan itt is két típus lehetséges: szuperkritikus és szubkritikus Neimark-Sacker bifurkáció, amit az egyensúlyi helyzet kritikus értéknél mutatott stabilitási tulajdonsága határoz meg. A szuperkritikus esetet puha, a szubkritikus kemény stabilitásvesztésnek is nevezik. Az előbbi esetben a kritikus értéken túl jelenik meg egy stabil invariáns görbe, az utóbbiban pedig a kritikus értéknél egy instabil invariáns görbe tűnik el. Amikor a bifurkáció irányáról beszélünk, az a két eset közötti disztingválást jelenti. A bifurkációs tételhez eredetileg egy nemdegeneráltsági feltétel is tartozott, azonban sikerült a tételt általánosítani lényegében minden nemlineáris sima leképezésre ([BGVF99]).



Neimark-Sacker bifurkáció



1:4 erős rezonancia

1. Ábra

4.2. Rezonanciák

A bifurkációs tételben a transzverzálitási feltétel szükségessége könnyen belátható. Az viszont korántsem egyértelmű, hogy a nem-rezonáns feltételre miért van szükség. Tegyük fel, hogy $\mu_0^k = 1$ valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $k \geq 5$, akkor gyenge, ha $k \leq 4$, akkor erős rezonanciának nevezzük ezt az esetet. A rezonanciák modern elméletét Arnold dolgozta ki ([Arn88], [AAIS99]). Előfordul, hogy egyáltalán nem jelenik meg az invariáns görbe, ehelyett rendkívül bonyolult viselkedés is lehetséges ([Che90], [Gam85]). A rezonanciák közül a legbonyolultabb az 1:4 rezonancia, amikor a kritikus sajátértékek negyedik egységgyökök. Az 1:4 rezonanciát Krauskopf tanulmányozta szisztematikusan ([Kra94]). Wan ([Wan78]) és Lemaire ([LB78]) kimutatta, hogy 1:4 rezonancia esetén is bizonyos feltételek mellett megjelenik az invariáns görbe. Az 1. ábra szemlélteti az általános Neimark-Sacker bifurkáció, illetve 1:4 rezonancia esetét. A Neimark-Sacker bifurkációt a Hopf-bifurkáció diszkrét változatának is nevezik, de az erős rezonanciák példája mutatja, hogy itt alapvetően más jelenségek is előfordulnak.

Rezonanciák különböző kontextusban felbukkanhatnak:

- Vektormező periodikus pályájának Hopf-bifurkációja

Legyen $\dot{x}(t) = f(x(t))$ egy autonóm rendszer, $y(t)$ egy periodikus pálya. Tekintsük a Poincaré-leképezést és dP sajátértékeit.

- Vektormező fixpontjának periodikus perturbációja

Legyen $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(t)$ egy periodikusan perturbált rendszer, ahol $y_0 = 0$ az autonóm rendszer hiperbolikus egyensúlyi helyzete. Tekintsük a periódus leképezést (stroboszkóp-leképezés).

- Diszkrét dinamikai rendszerek

Eleve diszkrét formában is fogalmazhatunk meg modelleket, erre példa az $(x, y) \mapsto (1 - ax^2 + y, bx)$ Hénon-leképezés és variánsai, vagy az $x_{k+1} = rx_k(1 - x_{k-1})$ késleltetett logisztikus leképezés, ahol $r > 2$ esetén stabil invariáns görbe bifurkál a nemtriviális egyensúlyi helyzetből. A részletekért és további példákért ajánljuk [HW85]-t, [Kuz98]-t és [Guc83]-t.

- Periodikus funkcionál-differenciálegyenletek periódus leképezése

Ezt a későbbi fejezetekben részletesen tárgyaljuk.

4.3. A funkcionál-differenciálegyenletek általános elméletéről

Legyen $r \geq 0$ egy adott valós szám, $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ a $[-r, 0]$ intervallumon folytonos valós függvények Banach-tere a szokásos,

$$\|\phi\| = \max_{-r \leq t \leq 0} \|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

szuprémum-normával. Definiáljuk egy $x(\theta)$ függvény szegmensét az $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r, 0]$ relációval, amennyiben ez értelmezhető. Ekkor az

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

egyenletet funkcionál-differenciálegyenletnek, vagy késleltetett visszacsatolásos differenciálegyenletnek nevezzük, ahol $f : \mathbb{R} \times C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \supset D \mapsto \mathbb{R}^n$ leképezés. Dolgozatunkban az

$$\dot{x}(t) = \gamma(a(t)x(t) + f(t, x(t-1))) \quad (4.1)$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol γ valós paraméter, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az

$$a(t+1) = a(t),$$

$$f(t+1, \xi) = f(t, \xi)$$

és az

$$f(t, 0) = 0$$

feltételeket minden $t, \xi \in \mathbb{R}$ esetén, valamint f C^4 -sima a ξ változó szerint.

Legyen $C := C([-1, 0], \mathbb{R})$. Minden $\phi \in C$ kezdeti függvény egyértelműen meghatároz egy $x^\phi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, ami differenciálható a $(0, \infty)$ -n, teljesíti az egyenletet minden $t > 0$ -ra és $x^\phi(t) = \phi(t)$ minden $t \in [-1, 0]$ esetén. Az ilyen x^ϕ függvényt nevezzük az egyenlet megoldásának. Emellett a megoldás kezdeti függvényről való folytonos függése is teljesül. Egyenletünk egy szemi-dinamikai rendszert definiál a C végtelen-dimenziós természetes fázistéren. A funkcionál-differenciálegyenletek elméletét és különböző tulajdonságait részletesen tárgyalják a [HVL93], [DVGVLW95], [KM92], [BC63] és [Cor73] monográfiák.

4.4. Periodikus rendszerek és Floquet elmélet

Az $F : C \rightarrow C$ periódus-leképezést az alábbi relációkkal definiáljuk:

$$F(\phi) = x_1^\phi, x_t(s) = x(t+s), s \in [-1, 0].$$

Ekkor $\{F^n(\phi) : n \in \mathbb{N}\}$ egy diszkrét dinamikai rendszert definiál. A megoldásra $x_n^\phi = F^n(\phi)$ teljesül. Ebből látszik, hogy a megoldások aszimptotikus viselkedését F és iteráltjai határozzák meg. A megoldás kezdeti értéktől való folytonos függése miatt az F operátor is folytonos. Használni fogjuk a $[-1, 0]$ intervallumon komplex értékű folytonos függvények Banach terét is a sup-normával, ezt $C_{\mathbb{C}}$ jelöli. A 0 egyensúlyi helyzet közelében a megoldások viselkedését az U monodrómia operátor $\sigma(U)$ spektruma határozza meg. Ez a periódus-leképezés deriváltja 0-ban. A monodrómia operátor folytonos és lineáris, az $U(\psi) = U(\operatorname{Re} \psi) + iU(\operatorname{Im} \psi)$ relációkkal $C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ komplex operátornak tekinthető, ami az $U(\psi) = y_1^\psi$ egyenlőséggel van megadva, ahol y^ψ az

$$\dot{y}(t) = \gamma(a(t)y(t) + f_\xi(t, 0)y(t-1)) \quad (4.2)$$

lineáris variációs egyenletek megoldása $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ kezdeti értékkel. (4.2) a (4.1) linearizáltja a 0 egyensúlyi helyzetben. Az U operátor kompakt, így a nemnulla spektrumpontjai izoláltak, valamint véges multiplicitású sajátértékek. A megfelelő $P_\mu : C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ sajátprojekciók képtere is véges dimenziós, ahol $\mu \in \sigma(U), \mu \neq 0$. Ezeket a sajátértékeket nevezzük Floquet-együtthatóknak. Ha $\mu = e^\lambda$ Floquet-együttható, akkor λ -t Floquet-exponens-nek nevezzük. Nagyon fontos a következő Floquet típusú tétel ([HVL93, 8. fejezet]):

4.4.1. Tétel. $\mu = e^\lambda$ akkor és csak akkor Floquet-együtthatója (4.2)-nek, ha létezik egy nem azonosan 0,

$$y(t) = p(t)e^{\lambda t}$$

alakú megoldása, ahol $p(t+1) = p(t)$.

Helyettesítsük be ezt a megoldást (4.2)-be és használjuk fel, hogy $p(t-1) = p(t)!$ Egy közönséges differenciálegyenletet kapunk $p(t)$ -re:

$$\dot{p}(t) = p(t)(\gamma a(t) + \gamma f_\xi(t, 0)e^{-\lambda} - \lambda).$$

Ennek a megoldása

$$p(t) = p(t_0)e^{\int_{t_0}^t [\gamma a(s) + \gamma f_\xi(s, 0)e^{-\lambda} - \lambda] ds}.$$

Válasszunk egy t_0 -t úgy, hogy $p(t_0) \neq 0$ teljesüljön. Tekintve $t = t_0 + 1 - t$, $p(t)$ periodicitásából következik, hogy a Floquet-exponensek az alábbi

$$h(\lambda) = \gamma\alpha + \gamma\beta e^{-\lambda} - \lambda \quad (4.3)$$

karakterisztikus függvény gyökei, ahol

$$\alpha = \int_{t_0}^{t_0+1} a(t)dt = \int_{-1}^0 a(t)dt,$$

$$\beta = \int_{t_0}^{t_0+1} f_\xi(t, 0)dt = \int_{-1}^0 f_\xi(t, 0)dt.$$

Az egyszeres sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények

$$\chi_\mu(t) : [-1, 0] \ni t \mapsto e^{\int_{-1}^t [\gamma a(s) + \gamma f_\xi(s, 0)e^{-\lambda}] ds} \in \mathbb{C}$$

alakúak. A karakterisztikus függvény bármely λ gyökére a hozzá tartozó $\chi_\mu(t)$ definiálja (4.2) egy Floquet-típusú megoldását, ezért a Floquet-együtthatók pontosan megegyeznek a karakterisztikus egyenlet gyökeivel.

4.5. Spektrális dekompozíció

A funkcionál-differenciálegyenletek spektrálméletét a korábban felsorolt monográfiák mellett részletesen tárgyalja [VL01] és [FVL03] is.

Legyen

$$\Delta(z) = z - e^{[\gamma\alpha + \frac{\gamma\beta}{z}]}$$

A $\Delta(z) = 0$ egyenlet ekvivalens a karakterisztikus egyenlettel. Egy $\mu = e^\lambda$ komplex szám pontosan akkor gyöke $\Delta(z)$ -nek, ha λ egy Floquet-exponens. A (4.1) egyenletre alkalmazva 3.1 Tételt ([HVL93, p. 247]) következik, hogy a Floquet-együtthatók egybeesnek $\Delta(z)$ gyökeivel, valamint egy μ sajátérték algebrai multiplicitása megegyezik μ rendjével, mint $\Delta(z)$ zéróhelye. Amikor ez a szám éppen 1, akkor μ -t egyszerű sajátértéknek nevezzük. A nevezetes Riesz-Schauder Tételt csak egyszerű sajátértékek esetére mondjuk ki.

4.5.1. Tétel. *Legyen $U : C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ egy kompakt operátor. Ha $z = \mu$ egyszerű sajátértéke U -nak, akkor létezik két zárt altér, E_μ és Q_μ úgy, hogy*

- (1) E_μ egy-dimenziós;
- (2) $E_\mu \oplus Q_\mu = C_{\mathbb{C}}$;

- (3) $U(E_\mu) \subset E_\mu$ és $U(Q_\mu) \subset Q_\mu$;
 (4) $\sigma(U|E_\mu) = \{\mu\}$, $\sigma(U|Q_\mu) = \sigma(U) \setminus \{\mu\}$;
 (5) Az E_μ -re Q_μ mentén történő P_μ spektrál projekció egy Riesz-Dunford integrállal reprezentálható;

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\mu} (zI - U)^{-1} dz = \operatorname{Res}_{z=\mu} (zI - U)^{-1},$$

ahol Γ_μ egy olyan kis zárt görbe μ körül, hogy μ az egyetlen szingularitása $(zI - U)^{-1}$ -nek a Γ_μ belsejében.

Ezt a tételt fogjuk felhasználni a spektrális projekció operátor kiszámításához, amire nagy szükségünk van a projekciós módszer alkalmazásakor.

4.6. Centrális sokaságok

A dinamikai rendszerek elméletében fontos mérföldkő volt a centrális sokaságok felfedezése ([Pli64],[Kel67]). A stabil, instabil alterekhez hasonlóan a centrális irányhoz is tartozik lokális invariáns sokaság. Fontos különbség, hogy a centrális sokaságra unicitás nem teljesül. A redukciós elv ([Sho75]) kimondja, hogy egy nemhiperbolikus fixpont környezetében a dinamika topologikusan ekvivalens a centrális sokaságra megszorított dinamika standard nyereg általi szuszpenziójával. Ez azt jelenti, hogy minden lényeges dolog a centrális sokaságon történik. A redukciós elv és a centrális sokaság tétel lehetővé teszi, hogy projekciós módszereket alkalmazva magasabb dimenziós rendszerek bifurkációját vizsgáljuk ([Kuz98]), akár R^n -ben, L_2 -ben vagy $C[-1, 0]$ -ban definiáltunk dinamikai rendszert. Centrális sokaság tételt azóta különböző folytonos és diszkrét dinamikai rendszerekre bizonyítottak, lásd [Car81], [Van89]. Funkcionál-differenciálegyenletekre [DvG91]-ben, Banach-térbeli leképezésekre [KWW99]-ben találunk bizonyítást centrális sokaság létezésére. A bifurkációanalízishez elegendő simaságú centrális sokaságra van szükség. C^k -sima centrális sokaság létezését végtelen dimenziós Banach-terek leképezéseire csak 2002-ben publikálták először, Faria, Huang és Wu cikkében ([FHW02]). Ezt a tételt most a mi esetünkre adaptált speciális változatában mondjuk ki.

4.6.1. Tétel (C^k -sima centrális sokaság tétel ([FHW02])). Legyen $F : C \mapsto C$ egy C^k -sima kompakt operátor a 0 fixponttal és legyen $U = DF(0)$. Tegyük fel, hogy C -re teljesül a

$$C = E_c \oplus E_u \oplus E_s$$

dekompozíció, ahol E_s egy zárt altér, E_c és E_s pedig véges dimenziós alterek. Legyen $E_{su} = E_s \oplus E_u$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\sigma_s = \sigma(U|_{E_s} : E_s \rightarrow E_s) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\sigma_c = \sigma(U|_{E_c} : E_c \rightarrow E_c) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\sigma_u = \sigma(U|_{E_u} : E_u \rightarrow E_u) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Ekkor léteznek a 0-nak olyan N_c, N_{su}, N nyílt környezetei rendre E_c -ben, E_{su} -ban és E -ben, valamint létezik egy olyan $M : N_c \mapsto E_{su}$ C^k -sima leképezés, amelyre $M(0) = 0$, $DM(0) = 0$ és $M(N_c) \subset N_{su}$, hogy a $W = \{x + M(x), x \in N_c\}$ függvénygrafikonra $F(W \cap N) \subset W$ teljesül. Mindemellett ha létezik egy $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$ sorozat úgy, hogy $x_{n+1} = F(x_n)$ és $x_n \in N_c + N_{su}$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, akkor $x_0 \in W$.

5. NEIMARK-SACKER BIFURKÁCIÓ

5.1. A karakterisztikus egyenlet és a Floquet-együtthatók

Egy autonóm egyenlet periodikus pályája körüli linearizálás hasonló alakú karakterisztikus egyenlethez vezet, mint a periodikus egyenlet linearizálása. Ebből kifolyólag a (4.3) típusú karakterisztikus függvényekről már sok mindent tudunk, egy alapos áttekintés található például [DVGVLW95, XI.fejezet]-ben. Felelevenítünk néhány alapvető tulajdonságot.

Definiáljuk az I_k intervallumokat minden $k = 0, 1, 2, \dots$ -re a következő módon:

$$I_k = ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi).$$

Minden I_k intervallumot két részre oszt a $2k\pi$ pont, jelölje ezeket I_k^- és I_k^+ :

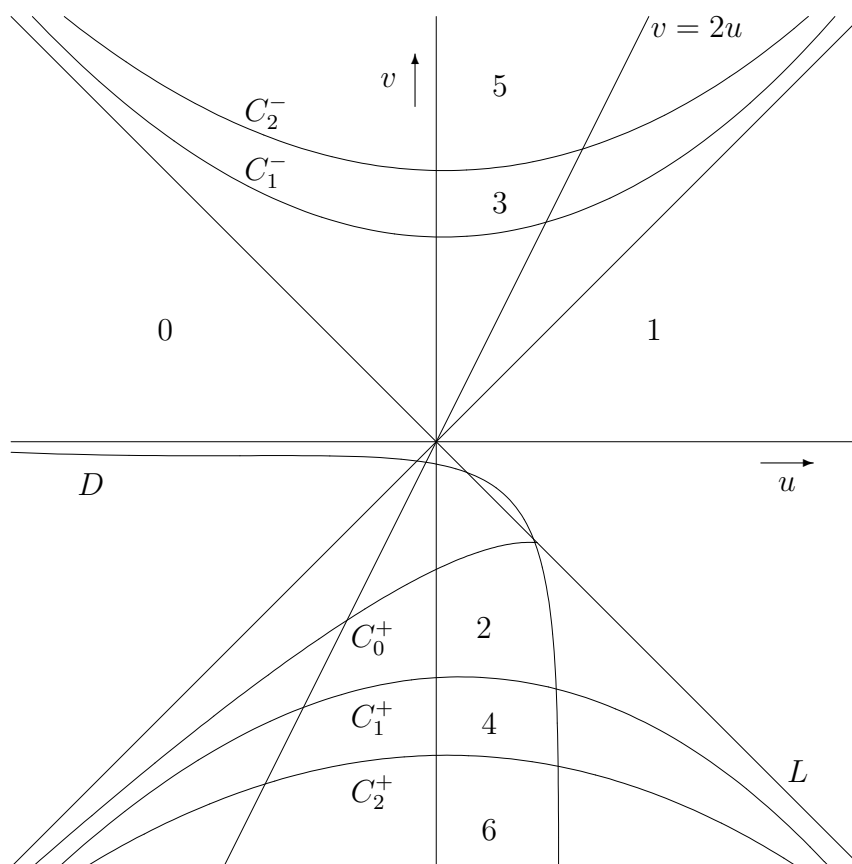
$$I_k^- = ((2k - 1)\pi, 2k\pi), \quad I_k^+ = (2k\pi, (2k + 1)\pi).$$

Legyenek a C_k^\pm , ν -vel paraméterezett görbék az (u, v) -síkon az alábbiak:

$$C_k^\pm = \left\{ (u, v) = \left(\frac{\nu \cos(\nu)}{\sin(\nu)}, -\frac{\nu}{\sin(\nu)} \right) \mid \nu \in I_k^\pm \right\}.$$

A C_k^\pm görbék elhelyezkedését lerajzoltuk a 2. Ábrára. A görbék a $v > |u|$ és a $v < -|u|$ szekciókon belül helyezkednek el, nem metszik egymást, abban a sorrendben vannak rendezve, ahogy a 2. Ábrán, továbbá aszimptotikusak a $v = \pm u$ egyenesekhez. Ezek a görbék az $L = \{(u, v) \mid v = -u\}$ egyenessel együtt tartományokra osztják a síkot. Az $u = \gamma\alpha$ -t és $v = \gamma\beta$ -t tekintve a karakterisztikus függvény egységkörön kívüli gyökeinek száma nem változik egy ilyen tartományon belül. Ezeket a számokat szintén feltüntettük a 2. Ábrán. Egy karakterisztikus gyök konjugáltja szintén karakterisztikus gyök. A $h(\lambda)$ függvény λ szerinti deriváltja $h'(\lambda) = -ve^{-\lambda} - 1$, ebből következik, hogy λ csakis akkor kétszeres gyöke $h(\lambda)$ -nak, ha $v = -e^{u-1}$ és $\lambda = u - 1$, ami tisztán valós. A 2. Ábrán látható D görbét $v = -e^{u-1}$ definiálja és D

metszi a C_k^+ görbét. A $h(\lambda)$ -nak csak a D görbe mentén vannak kétszeres gyökei.



2. Ábra

Kétszeres 0 gyök az $(1, -1)$ pontban van, a többi metszéspontban $u > 1$ és a kétszeres gyök pozitív. A mi vizsgálatunk viszont csak a $v > |u|$ vagy a $v < -|u|$ esetekre terjednek ki, amikor is $\beta^2 > \alpha^2$, hiszen a Neimark-Sacker bifurkáció ezen a tartományon belül zajlik, itt pedig az egységkörön található Floquet-együtthatók mindig egyszeres gyökök. Az $u = 0$ és a $v = 2u$ egyenesek képviselik a rezonancia esetét, a 5.2.4. Lemma szerint. Egy lerögzített α és β esetén egyszerűen kiszámolhatjuk a kritikus paraméterértékeket a

$$(\gamma\alpha, \gamma\beta) = \left(\frac{\nu \cos(\nu)}{\sin(\nu)}, -\frac{\nu}{\sin(\nu)} \right)$$

egyenletből:

$$\gamma_{\pm n} = -\frac{\pm \arccos(-\frac{\alpha}{\beta}) + 2n\pi}{\pm \beta \sin(\arccos(-\frac{\alpha}{\beta}))}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.1.1. Lemma. *A két kritikus Floquet-együttható $\mu_j = e^{\lambda_j} = e^{i\gamma_j \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = -\frac{\alpha}{\beta} - i\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$ és $\bar{\mu}_j = e^{\bar{\lambda}_j} = e^{-i\gamma_j \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = -\frac{\alpha}{\beta} + i\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$.*

Bizonyítás: Mivel $|\mu_j| = 1$, van olyan $\theta \in \mathbb{R}$, hogy $\lambda_j = i\theta$. Ebben az esetben a (4.3) karakterisztikus egyenlet valós és képzetes része szétválasztható így:

$$\begin{cases} 0 = \gamma_j \alpha + \gamma_j \beta \cos(\theta) \\ \theta = -\gamma_j \beta \sin(\theta), \end{cases} \quad (5.1)$$

ebből

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \cos^2(\theta) \\ \frac{\theta^2}{\gamma_j^2 \beta^2} = \sin^2(\theta) \end{cases} \quad (5.2)$$

következik. Az utolsó két egyenletet összegezve kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\theta^2}{\gamma_j^2 \beta^2} = 1$$

és

$$\theta^2 = \gamma_j^2 (\beta^2 - \alpha^2).$$

(5.1) alapján adódik, hogy

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\alpha}{\beta} \\ \sin(\theta) = -\frac{\theta}{\gamma_j \beta}, \end{cases} \quad (5.3)$$

és végül

$$e_j^\lambda = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = -\frac{\alpha}{\beta} - i\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}.$$

□

5.2. Neimark-Sacker bifurkáció

A sima centrális sokaság tétele és a Neimark-Sacker bifurkációs tétel egyszerű kombinálásával (a részleteket lásd a [Car81], [Kuz98] és [Wig90] művekben) adódik a következő állítás:

5.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (4.1) egyenlethez tartozó $F_\gamma : C \rightarrow C$ periódus-leképezések egyparaméteres családjának a $\gamma = \gamma_j$ kritikus paraméterértéknél a $\phi = 0$ olyan fixpontja, amelynek pontosan két Floquet-együtthatója ($e^{i\theta}$ és $e^{-i\theta}$) van a komplex egységkörön. Ekkor létezik egy olyan környezete a 0-nak, amelyben pontosan egy invariáns görbe bifurkál a 0 fixpontból, amint a γ paraméterérték áthalad a kritikus γ_j értéken, feltéve, hogy a*

$$\frac{\partial |\mu(\gamma)|}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma_j} \neq 0$$

transzverzálitási, illetve a

$$\mu_j^4 \neq 1, \quad \mu_j^3 \neq 1$$

nem-rezonancia feltételek teljesülnek.

Most kimondjuk a fejezet fő eredményét. Az 5.2.2. tételben szereplő kifejezések (R_μ, V, W) definíciója és a részletes számítások a fejezet későbbi részében találhatóak.

5.2.2. Tétel. *Az invariáns görbe megjelenésének irányát az alábbi kifejezés előjele határozza meg:*

$$\delta(\gamma_j) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu} R_\mu \left(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu) + 2V(\chi_\mu, (1-U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \right. \right. \\ \left. \left. + V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu)) \right) \right),$$

ahol minden tényező explicit módon kiszámolható a (4.1) egyenletből.

Érdemes megemlíteni, hogy a $\delta(\gamma_j) < 0$ és a $\delta(\gamma_j) > 0$ eseteket szuperkritikus, illetve szubkritikus bifurkációnak nevezzük. A szuperkritikus esetben egy stabil (csak egy megszorított értelemben, az invariáns sokaságon belül stabil) invariáns görbe jelenik meg, ha $\gamma > \gamma_j$, míg a szubkritikus esetben egy instabil invariáns görbe tűnik el, amint a γ paraméter növekedve áthalad γ_j -n. Amennyiben $\delta(\gamma_j) = 0$, további vizsgálatokra van szükség. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban lásd [BGVF99]-t. Jelen dolgozatban feltesszük, hogy a $\delta(\gamma_j) \neq 0$ nem-degeneráltsági feltétel teljesül. Az F_γ leképezések simasága az $a(t)$ és $f(t, \xi)$ függvények megfelelő simaságából következik.

5.2.3. Lemma. *A transzverzálitási feltétel mindig teljesül (4.1)-re.*

Bizonyítás: Legyen μ_j egy 1 abszolút értékű Floquet-együttható a γ_j kritikus paraméterértékre. Az implicit függvénytétel alapján létezik egy $\mu(\gamma) = e^{\lambda(\gamma)}$ sima függvény γ_j egy környezetében úgy, hogy $\mu(\gamma_j) = \mu_j$, ahol $\lambda(\gamma_j)$ kielégíti a karakterisztikus egyenletet. Bevezetve a $\lambda(\gamma) = k(\gamma) + il(\gamma)$ jelölést, a transzverzálitási feltétel ekvivalens a

$$k'(\gamma_j) \neq 0$$

feltétellel. Világos, hogy $k(\gamma_j) = 0$, $l(\gamma_j) \neq 0$ és $\gamma_j \neq 0$. Külön-külön felírva a karakterisztikus egyenlet valós és képzetes részét azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} k(\gamma) = \gamma\alpha + \gamma\beta e^{-k(\gamma)} \cos(l(\gamma)) \\ l(\gamma) = -\gamma\beta e^{-k(\gamma)} \sin(l(\gamma)). \end{cases} \quad (5.4)$$

(5.4) deriváltja γ szerint nem más, mint

$$\begin{cases} k'(\gamma) = \alpha + \beta e^{-k(\gamma)} \cos(l(\gamma)) - \gamma\beta e^{-k(\gamma)} k'(\gamma) \cos(l(\gamma)) \\ \quad - \gamma\beta e^{-k(\gamma)} \sin(l(\gamma)) l'(\gamma) \\ l'(\gamma) = -\beta e^{-k(\gamma)} \sin(l(\gamma)) + \gamma\beta e^{-k(\gamma)} k'(\gamma) \sin(l(\gamma)) \\ \quad - \gamma\beta e^{-k(\gamma)} \cos(l(\gamma)) l'(\gamma). \end{cases} \quad (5.5)$$

A kritikus paraméterértékeknél (5.4) a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \cos(l(\gamma_j)) \\ l(\gamma_j) = -\gamma_j \beta \sin(l(\gamma_j)). \end{cases} \quad (5.6)$$

Behelyettesítve (5.6)-ot (5.5)-be,

$$\begin{cases} k'(\gamma_j) = \gamma_j \alpha k'(\gamma_j) + l(\gamma_j) l'(\gamma_j) \\ l'(\gamma_j) = \frac{l(\gamma_j)}{\gamma_j} - k'(\gamma_j) l(\gamma_j) + \alpha \gamma_j l'(\gamma_j) \end{cases}$$

adódik. Tegyük fel most, hogy $k'(\gamma_j) = 0$, ekkor $l'(\gamma_j) = 0$ és végezetül $l(\gamma_j) = 0$, ellentmondásra jutottunk, így a transzverzálitási feltétel teljesül. Megjegyezzük, hogy ez a tény intuitív módon a 2. Ábra alapján is látszik. \square

5.2.4. Lemma. $\mu_j^4 = 1$ pontosan akkor, ha $\alpha = 0$, valamint $\mu_j^3 = 1$ pontosan akkor, ha $\beta = 2\alpha$.

Bizonyítás: Ha behelyettesítjük az egységgyökök megfelelő értékeit a karakterisztikus egyenlet valós és képzetes részébe, elemi számolásokból adódik az állítás, hasonlóan, mint az 5.2.3. lemmában. \square

5.3. Rezolvens és spektrál projekció

Az egyszerűség kedvéért legyen $b(t) = \gamma f_\xi(t, 0)$ és $c(t) = \gamma a(t)$. Ezzel a jelöléssel a linearizált egyenlet így írható:

$$\dot{y}(t) = c(t)y(t) + b(t)y(t-1),$$

$\alpha = \frac{1}{\gamma} \int_{-1}^0 c(t) dt$, $\beta = \frac{1}{\gamma} \int_{-1}^0 b(t) dt$, a sajátfüggvények pedig:

$$\chi_\mu(t) : [-1, 0] \ni t \mapsto e^{\int_{-1}^t [c(s) + \frac{b(s)}{\mu}] ds} \in \mathbb{C}.$$

A közönséges differenciálegyenletekre jól ismert konstans-variációs formula használatával a periódus-leképezés kifejezhető, mint

$$F(\phi)(t) = e^{\int_{-1}^t c(u) du} (\phi(0) + \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u) du} \gamma f(s, \phi(s)) ds), \quad t \in [-1, 0], \quad (5.7)$$

ami alapján a monodrómia-operátorra az

$$U(\phi)(t) = e^{\int_{-1}^t c(u) du} (\phi(0) + \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u) du} b(s) \phi(s) ds), \quad t \in [-1, 0] \quad (5.8)$$

kifejezés adódik.

5.3.1. Lemma. *A monodrómia-operátor rezolvense az alábbi formulával fejezhető ki:*

$$\begin{aligned}
(zI - U)^{-1}(\psi)(t) &= e^{\int_{-1}^t [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \\
&\times \left(\left(\frac{1}{z} \psi(0) + e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \int_{-1}^0 \frac{1}{z^2} e^{-\int_{-1}^s [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} b(s) \psi(s) ds \right) \right. \\
&\times \left(z - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \right)^{-1} + \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^t [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \psi(t) \\
&\left. + \int_{-1}^t \frac{1}{z^2} e^{-\int_{-1}^s [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} b(s) \psi(s) ds \right). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Bizonyítás: Legyen $\phi = (zI - U)^{-1}\psi$, vagy ezzel ekvivalens módon

$$\psi(t) = z\phi(t) - U(\phi)(t), \quad t \in [-1, 0]. \tag{5.10}$$

A rezolvens kiszámításához meg kell oldanunk ezt az egyenletet. Legyen

$$\hat{\phi}(t) = e^{-\int_{-1}^t c(u) du} \phi(t), \tag{5.11}$$

ekkor az (5.8) reprezentáció és a (5.11) jelölés alapján, (5.10)-t megszorozva az $e^{-\int_{-1}^t c(u) du}$ kifejezéssel azt kapjuk, hogy

$$\hat{\psi}(t) = z\hat{\phi}(t) - \phi(0) - \int_{-1}^t b(s) \hat{\phi}(s) ds. \tag{5.12}$$

Először tegyük fel, hogy a ψ függvény differenciálható. Most differenciáljuk (5.12)-t!

$$\hat{\phi}'(t) = \frac{b(t)}{z} \hat{\phi}(t) + \frac{1}{z} \hat{\psi}'(t) \tag{5.13}$$

A $t = -1$ érték (5.12)-ben azt adja, hogy

$$\hat{\psi}(-1) = z\hat{\phi}(-1) - e^{\int_{-1}^0 c(u) du} \hat{\phi}(0). \tag{5.14}$$

Az (5.13) és az (5.14) egyenlőség együttesen egy peremérték-problémát definiál. Ennek megoldása (5.13) alapján a konstansvariációs formula alkalmazásával

$$\hat{\phi}(t) = e^{\int_{-1}^t \frac{b(u)}{z} du} \left(\hat{\phi}(-1) + \int_{-1}^t \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right). \tag{5.15}$$

Most $t = 0$ -ra kapjuk, hogy

$$\hat{\phi}(0) = e^{\int_{-1}^0 \frac{b(u)}{z} du} \left(\hat{\phi}(-1) + \int_{-1}^0 \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right),$$

ezt behelyettesítve a peremfeltételekbe (5.14)-ből

$$\hat{\psi}(-1) = z\hat{\phi}(-1) - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \left(\hat{\phi}(-1) + \int_{-1}^0 \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right)$$

levezethető, ami alapján

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(-1) = & \left(\hat{\psi}(-1) + e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \int_{-1}^0 \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right) \\ & \times \left(z - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

mindannyiszor, amikor

$$\left(z - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \right) \neq 0,$$

vagyis $z \notin \sigma(U)$. Ha most visszahelyettesítjük (5.16)-t (5.15)-be és visszatérünk a $\phi(t)$ függvényhez, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \phi(t) = & e^{\int_{-1}^t [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \left(\left(\hat{\psi}(-1) + e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \int_{-1}^0 \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right) \right. \\ & \times \left(z - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du} \right)^{-1} \\ & \left. + \int_{-1}^t \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} \hat{\psi}'(s) ds \right). \end{aligned}$$

Parciális integrálás után visszatérve $\psi(t)$ -re éppen a (5.9) kifejezést kapjuk. Ez a formula tehát érvényes minden differenciálható ψ esetén. Mivel a differenciálható függvények a $C_{\mathbb{C}}$ térben sűrű halmazt alkotnak, a formulánk folytonossága alapján következik, hogy a (5.9) összefüggés minden $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ függvényre érvényes, így levezettünk egy explicit kifejezést a rezolvensre. \square

5.3.2. Tétel. *A spektrál projekció operátorra μ egyszerű sajátérték esetén a*

$$P_\mu(\psi) = \chi_\mu R_\mu(\psi)$$

reprezentáció teljesül, ahol

$$R_\mu(\psi) = \left(\frac{1}{\mu + \gamma\beta} \right) \left(\psi(0) + \int_{-1}^0 \frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right).$$

és μ egyszerű sajátérték.

Bizonyítás: A Riesz-Schauder tétel (4.5.1 Tétel) alkalmazása után egy standard levezetés igazolja a tételt.

$$\begin{aligned} P_\mu(\psi)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\mu} (zI - U)^{-1} dz (\psi)(t) = \operatorname{Res}_{z=\mu} (zI - U)^{-1} (\psi)(t) \\ &= \lim_{z \rightarrow \mu} ((z - \mu)(zI - U)^{-1} (\psi)(t)) = e^{\int_{-1}^t [c(u) + \frac{b(u)}{\mu}] ds} \left(\psi(-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \psi(0) - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{\mu}] du} \frac{1}{\mu} \psi(-1) + e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{\mu}] du} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu^2} e^{-\int_{-1}^s [c(u) + \frac{b(u)}{\mu}] du} b(s) \psi(s) ds \right) \\ &\quad \times \lim_{z \rightarrow \mu} ((z - \mu)(z - e^{\int_{-1}^0 [c(u) + \frac{b(u)}{z}] du})^{-1}) \\ &= \chi_\mu(t) \left(\lim_{z \rightarrow \mu} ((z - \mu)\Delta(z)^{-1}) \right) \left(\psi(-1) + \frac{1}{\mu} \psi(0) \right. \\ &\quad \left. - e^{[\gamma\alpha + \frac{\gamma\beta}{\mu}]} \frac{1}{\mu} \psi(-1) + e^{[\gamma\alpha + \frac{\gamma\beta}{\mu}]} \frac{1}{\mu^2} \int_{-1}^0 \frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right) \\ &= \chi_\mu(t) \frac{1}{\Delta'(\mu)} \left(\frac{1}{\mu} \psi(0) + \frac{1}{\mu} \int_{-1}^0 \frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right) \\ &= \chi_\mu(t) \left(\frac{1}{\mu + \gamma\beta} \right) \left(\psi(0) + \int_{-1}^0 \frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right) \end{aligned}$$

□

5.4. A bifurkáció iránya

Tekintsük a

$$C = T^c \oplus T^{su}$$

dekompozíciót, ahol $T^c = \text{Re } E_\mu \oplus \text{Im } E_\mu$ a μ -höz tartozó kritikus 2-dimenziós valós centrális sajátter, amit $\{\text{Re } \chi_\mu \text{ és } \text{Im } \chi_\mu\}$ feszít ki, $T^{su} = \text{Re } Q_\mu \oplus \text{Im } Q_\mu$ a 2-kodimenziós valós stabil-instabil altér, ami a $\sigma(U)$ spektrum többi részéhez tartozik. A projekciós módszer lényege, hogy bevezetünk új, $x \in T^c, y \in T^{su}$ változókat és ezeket mint koordinátákat használjuk a megfelelő altereken, amelyek invariánsak $DF(0)$ -ra. Tegyük fel, hogy az F leképezésünk az

$$\begin{cases} \tilde{x} = A(x) + g(x, y) \\ \tilde{y} = B(y) + h(x, y) \end{cases}$$

formában adott, ahol $(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x, y)$; $x, \tilde{x} \in T^c$; $y, \tilde{y} \in T^{su}$; A és B pedig lineáris leképezések a megfelelő altereken, valamint

$$g(0, 0) = 0, \quad Dg(0, 0) = 0,$$

$$h(0, 0) = 0, \quad Dh(0, 0) = 0.$$

Egy $y = M(x)$ sokaságra felírható, hogy

$$\begin{cases} \tilde{x} = A(x) + g(x, M(x)) \\ \tilde{y} = B(M(x)) + h(x, M(x)). \end{cases}$$

Ha $M(x)$ speciálisan a centrális sokaságot jelöli, akkor az invariancia miatt $\tilde{y} = M(\tilde{x})$, és így

$$M(A(x) + g(x, M(x))) = B(M(x)) + h(x, M(x)). \quad (5.17)$$

Ezen formula alapján az $M(x)$ Taylor-sorának együtthatói lépésről-lépésre kiszámíthatóak. A részletek és további példák sokasága található a [Kuz98] és a [Wig90] könyvekben. A mi számításaink többé-kevésbé [Kuz98]-at követik, viszont a T^{su} altér esetünkben nem véges dimenziós és a skaláris szorzat helyett a spektrál projekció 5.3.2-ben megadott reprezentációjával kalkulálunk.

Ehhez szükségünk lesz az F operátor deriváltjaira egészen a harmadrendűig, amelyek az (5.7) reprezentációból adódnak, úgymint

$$DF(\eta)(\phi)(t) = e^{\int_{-1}^t c(u)du} \left(\phi(0) + \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u)du} \gamma f_{\xi}(s, \eta(s)) \phi(s) ds \right),$$

$$D^2F(\eta)(\phi_1, \phi_2)(t) = e^{\int_{-1}^t c(u)du} \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u)du} \gamma f_{\xi\xi}(s, \eta(s)) \phi_1(s) \phi_2(s) ds,$$

és

$$D^3F(\eta)(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = e^{\int_{-1}^t c(u)du} \times \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u)du} \gamma f_{\xi\xi\xi}(s, \eta(s)) \phi_1(s) \phi_2(s) \phi_3(s) ds.$$

Az $\eta = 0$ pontban kiértékelünk: $F(0) = 0$ és $DF(0) = U$. Legyen $V = D^2F(0)$ és $W = D^3F(0)$. V és W multilinéáris operátorok. F Taylor-sorát írjuk fel

$$F(\phi) = U(\phi) + \frac{1}{2}V(\phi, \phi) + \frac{1}{6}W(\phi, \phi, \phi) + O(\|\phi\|^4)$$

alakban. Legyen $Z(\phi) = F(\phi) - U(\phi)$ az F nemlineáris része. Most bontsuk fel $\phi \in C$ -t!

$$\phi = z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} + \psi,$$

ahol $z = R_{\mu}(\phi) \in \mathbb{C}$, $z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} \in T^c$ és $\psi \in T^{su}$. A komplex változó szolgál koordinátaként a T^c 2-dimenziós valós centrális sajátterén és a ψ függvény szolgál változóként T^{su} -n. A T^c és T^{su} alterek invariánsak U -ra nézve. Minden valós ϕ -re, $\phi \in T^{su}$ akkor és csak akkor, ha $P_{\mu}(\phi) = 0$. $U(\chi_{\mu}) = \mu\chi_{\mu}$ következménye $U(\bar{\chi}_{\mu}) = \bar{\mu}\bar{\chi}_{\mu}$ és $\bar{R}_{\mu} = R_{\bar{\mu}}$. A fenti megjegyzések alapján a leképezésünk

$$\begin{cases} \tilde{z} = \mu z + R_{\mu}(Z(\phi)) \\ \tilde{\psi} = U(\psi) + Z(\phi) - R_{\mu}(\phi)\chi_{\mu} - R_{\bar{\mu}}(\phi)\bar{\chi}_{\mu} \end{cases}$$

alakba írható, továbbá

$$\begin{cases} \tilde{z} = \mu z + R_{\mu}(Z(z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} + \psi)) \\ \tilde{\psi} = U(\psi) + Z(z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} + \psi) - R_{\mu}(Z(z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} + \psi))\chi_{\mu} \\ \quad - R_{\bar{\mu}}(Z(z\chi_{\mu} + \bar{z}\bar{\chi}_{\mu} + \psi))\bar{\chi}_{\mu}. \end{cases} \quad (5.18)$$

$Z(z\chi_\mu + \bar{z}\bar{\chi}_\mu + \psi)$ Taylor-sora a 0 körül z, \bar{z} és ψ szerint, V -vel és W -vel kifejezve

$$\begin{aligned} Z(z\chi_\mu + \bar{z}\bar{\chi}_\mu + \psi) &= \frac{1}{2}V(\chi_\mu, \chi_\mu)z^2 + V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)z\bar{z} + \frac{1}{2}V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu)\bar{z}^2 \\ &\quad + V(\chi_\mu, \psi)z + V(\bar{\chi}_\mu, \psi)\bar{z} + \frac{1}{2}V(\psi, \psi) \\ &\quad + \frac{1}{6}W(\chi_\mu, \chi_\mu, \chi_\mu)z^3 + \frac{1}{2}W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)z^2\bar{z} + \dots \end{aligned}$$

Használva R_μ linearitását is, (5.18) átalakítható a

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} = \mu z + \frac{1}{2}R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu))z^2 + R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))z\bar{z} + \frac{1}{2}R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\bar{z}^2 \\ \quad + R_\mu(V(\chi_\mu, \psi))z + R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \psi))\bar{z} + \frac{1}{2}R_\mu(V(\psi, \psi)) \\ \quad + \frac{1}{6}R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \chi_\mu))z^3 + \frac{1}{2}R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))z^2\bar{z} + \dots \\ \tilde{\psi} = U(\psi) + \frac{1}{2}\zeta_{20}z^2 + \zeta_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\zeta_{02}\bar{z}^2 + \dots \end{array} \right.$$

formába, ahol

$$\begin{aligned} \zeta_{20} &= V(\chi_\mu, \chi_\mu) - R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu))\chi_\mu - R_{\bar{\mu}}(V(\chi_\mu, \chi_\mu))\bar{\chi}_\mu, \\ \zeta_{11} &= V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu) - R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))\chi_\mu - R_{\bar{\mu}}(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))\bar{\chi}_\mu, \\ \zeta_{02} &= V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu) - R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\chi_\mu - R_{\bar{\mu}}(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\bar{\chi}_\mu. \end{aligned}$$

A centrális sokaság érinti a T^c alteret a 0-ban és így az alábbi formában is felírható:

$$\psi = M(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\nu_{20}z^2 + \nu_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\nu_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

ahol $P_\mu(\nu_{ij}) = 0$. Figyelembe véve az (5.17) formulát, a ν_{ij} együtthatók a

$$\begin{aligned} (\mu^2 I - U)\nu_{20} &= \zeta_{20}, \\ (I - U)\nu_{11} &= \zeta_{11}, \\ (\mu^{-2} I - U)\nu_{02} &= \zeta_{02} \end{aligned}$$

képletekkel számolhatóak.

Megjegyezzük, hogy μ és $\bar{\mu}$ az egyetlen sajátérték-pár az egységkörön és nem harmadik egységgyökök, ezért az $(I - U)$, $(\mu^2 I - U)$, $(\mu^{-2} I - U)$ operátorok invertálhatóak és (5.9) által adottak. A

$$\tilde{z} = \mu z + R_\mu(Z(z\chi_\mu + \bar{z}\bar{\chi}_\mu + M(z, \bar{z})))$$

megszorított leképezés a

$$\tilde{z} = \mu z + \frac{1}{2}\rho_{20}z^2 + \rho_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\rho_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\rho_{21}z^2\bar{z} + \dots \quad (5.19)$$

alakba írható, ahol csak azt a köbös tagot tüntettük fel, amelyikre szükségünk van a Neimark-Sacker bifurkációs analízishez (lásd [Kuz98]), emellett

$$\begin{aligned} \rho_{20} &= R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu)) \\ \rho_{11} &= R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\ \rho_{02} &= R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\ \rho_{21} &= R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + 2R_\mu(V(\chi_\mu, \nu_{11})) + R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \nu_{20})) = \\ &= R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + R_\mu(V(\chi_\mu, (1 - U)^{-1}\zeta_{11})) \\ &+ R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}\zeta_{20})) = \\ &= R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + R_\mu(V(\chi_\mu, (1 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))) \\ &- R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))\chi_\mu - R_{\bar{\mu}}(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))\bar{\chi}_\mu \\ &+ R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu))) - R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu))\chi_\mu \\ &- R_{\bar{\mu}}(V(\chi_\mu, \chi_\mu))\bar{\chi}_\mu). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Figyelembe véve a

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad \overline{R_{\bar{\mu}}(V(\phi, \psi))} = R_\mu(V(\bar{\phi}, \bar{\psi})),$$

$$(1 - U)^{-1}\chi_\mu = \frac{1}{1 - \mu}\chi_\mu, \quad (\mu^2 - U)^{-1}\chi_\mu = \frac{1}{\mu(\mu - 1)}\chi_\mu,$$

$$(1 - U)^{-1}\bar{\chi}_\mu = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}}\bar{\chi}_\mu, \quad (\mu^2 - U)^{-1}\bar{\chi}_\mu = \frac{\mu}{\mu^3 - 1}\bar{\chi}_\mu$$

azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\rho_{21} = & R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + 2R_\mu(V(\chi_\mu, (1-U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))) \\
& + R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu))) \\
& + \frac{\frac{1}{\mu}(1-2\mu)}{1-\mu} R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu))R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\
& - \frac{2}{1-\frac{1}{\mu}} |R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))|^2 - \frac{\mu}{\mu^3-1} |R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))|^2.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

[Kuz98] alapján az (5.19) alakú megszorított leképezések

$$\tilde{z} = \mu z(1 + d(\gamma_j)|z|^2) + O(|z|^4)$$

alakba transzformálhatóak, a $\delta(\gamma_j) = \operatorname{Re} d(\gamma_j)$ valós szám előjele határozza meg a bifurkáció irányát, amely a

$$\delta(\gamma_j) = \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1}{\mu}\rho_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1-2\mu)\frac{1}{\mu^2}}{2(1-\mu)} \rho_{20}\rho_{11} \right) - \frac{1}{2} |\rho_{11}|^2 - \frac{1}{4} |\rho_{02}|^2$$

formulával számolható. Ha ezt a formulát használjuk az (5.20)-ban és (5.21)-ben megadott együtthatókkal, akkor a

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma_j) = & \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu} R_\mu \left(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu) + 2V(\chi_\mu, (1-U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \right. \right. \\
& \left. \left. + V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu)) \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

invariáns kifejezéshez jutunk, ezzel az 5.2.2. Tétel bizonyítását befejeztük. (5.22)-ben minden tényező explicit módon kifejezhető $a(t)$, $f(t, \xi)$ parciális deriváltjai és $\mu = e^\lambda$ segítségével, például

$$\begin{aligned}
V(\chi_\mu, \chi_\mu)(t) = & e^{\int_{-1}^t c(u)du} \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s c(u)du} \gamma f_{\xi\xi}(s, 0) \chi_\mu(s)^2 ds = \\
& e^{\int_{-1}^t \gamma a(u)du} \int_{-1}^t \gamma f_{\xi\xi}(s, 0) (e^{\int_{-1}^s \gamma a(u)+2\gamma f_\xi(u,0)e^{-\lambda}du}) ds \text{ stb.}
\end{aligned}$$

□

5.5. Az invariáns tórusz

A (4.1) egyenlet megoldásai mentén történő eltoláshoz egy evolúciós rendszer társítható a

$$T(t, s)\varphi = x_t^{\varphi, s}$$

reláció által, ahol $t > s$, $T(t, s) : C \rightarrow C$ és $x_t^{\varphi, s}$ a (4.1) azon megoldása, amelyre $x_s^{\varphi, s} = \varphi$ teljesül. Legyen $F^\tau = T(\tau + 1, \tau)$, ekkor $F^0 = F$. (4.1) periodicitása miatt $F^\tau = F^{\tau+1}$ és a dinamikai rendszerünk úgy is felfogható, mint egy autonóm rendszer a $C \times S^1$ térben, melynek megoldás-operátorai

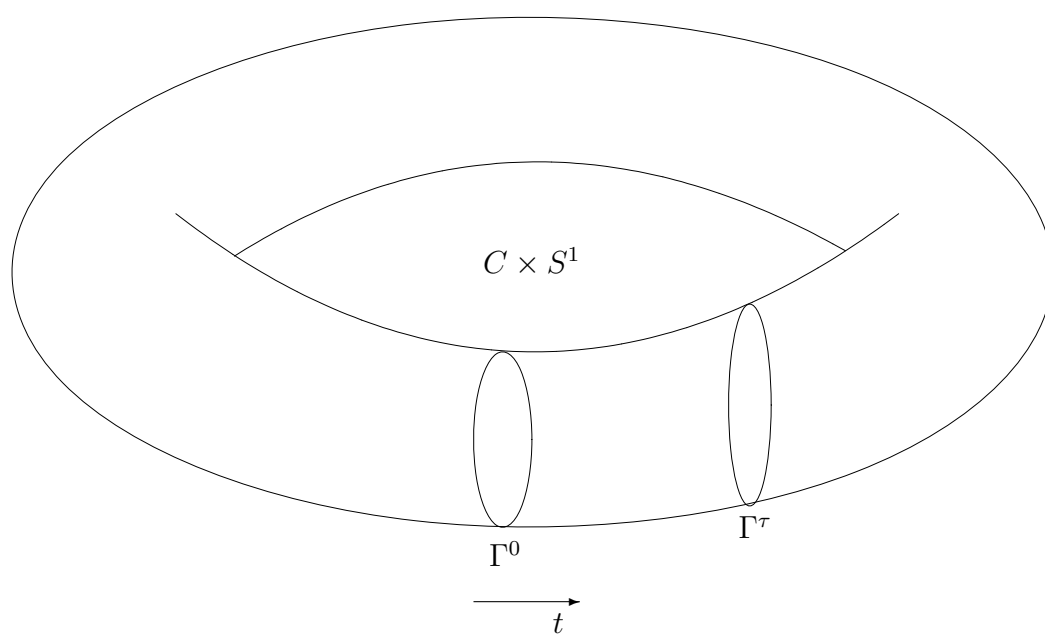
$$G(t) : C \times S^1 \ni (\varphi, s) \mapsto (x_t^{\varphi, s}, t + s \bmod 1) \in C \times S^1.$$

A karakterisztikus egyenlet, valamint az $U^\tau = DF^\tau(0)$ monodrómia-operátorokhoz tartozó Floquet-együtthetők nem függenek τ -tól, ezért minden F^τ esetén ugyanannál a kritikus paraméterértéknél jelennek meg a bifurkáló invariáns görbék. Jelöljük ezeket a görbéket Γ^τ -val. Mivel $T(t, s)(\Gamma^s)$ egy invariáns görbe F^t -re nézve, az unicitási tulajdonság alapján $T(t, s)(\Gamma^s) = \Gamma^t$ és a

$$\mathbb{T} = \bigcup_{\tau \in [0, 1)} (\Gamma^\tau, \tau)$$

halmaz egy invariáns tóruszt definiál a $C \times S^1$ térben, mégpedig a $G(t)$ megoldás-operátorok által meghatározott dinamikára nézve.

5.5.1. Tétel. *Ha a Neimark-Sacker bifurkációs tétel feltételei teljesülnek, akkor a $G_\gamma(t) : C \times S^1 \rightarrow C \times S^1$ megoldás-operátorok által generált dinamikai rendszerek egyparaméteres, a (4.1) egyenlethez tartozó családjában pontosan egy invariáns tórusz bifurkál a $(0, t)$ periodikus megoldásból, amint a γ paraméter áthalad a kritikus γ_j értéken. Az invariáns tórusz megjelenésének irányát a $\delta(\gamma_j)$ együtthető előjele határozza meg, amely explicit módon kiszámolható.*



3. Ábra

A 3. Ábrán a $C \times S^1$ térben megjelenő invariáns tóruszt illusztráljuk.

6. ALKALMAZÁSOK

6.1. Jelölések

Ebben a fejezetben egyenletünket az

$$\varepsilon \dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t, x(t-1)) \quad (6.1)$$

formában is tekintjük, legyen $v := \frac{1}{\varepsilon}$, az egyszerűség kedvéért néha ezzel fogunk számolni. A lineáris variációs egyenletünk

$$\varepsilon \dot{y}(t) = a(t)y(t) + f_\xi(t, 0)y(t-1), \quad (6.2)$$

ahol $y_0^\psi = \psi \in C_{\mathbb{C}}$. A fejezetben végig használni fogjuk a $G(t) = \int_{-1}^t g(s)ds$ és $G = G(0)$ jelölést, ha g valamilyen függvény. Legyen $b(t) = f_\xi(t, 0)$. A sajátfüggvényeink most

$$\chi_\mu(t) : [-1, 0] \ni t \mapsto e^{\int_{-1}^t [va(s) + vf_\xi(s, 0)e^{-\lambda}]ds} = e^{vA(t) + vB(t)e^{-\lambda}} \in \mathbb{C}$$

alakba írhatóak, karakterisztikus egyenletünk pedig

$$h(\lambda) = vA + vBe^{-\lambda} - \lambda. \quad (6.3)$$

Ha $v \neq 0$, a karakterisztikus függvénynek pontosan akkor van gyöke az egységkörön, ha $|A|/|B| < 1$ és

$$v_{\pm n} = -\frac{\pm \arccos(-\frac{A}{B}) + 2n\pi}{\pm B \sin(\arccos(-\frac{A}{B}))} = -\frac{\pm \arccos(-\frac{A}{B}) + 2n\pi}{\pm B \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

Az egységkörön belüli Floquet együtthatók száma nem változik, amint v a (v_n, v_{n+1}) vagy a (v_{-n-2}, v_{-n-1}) intervallumon belül változik, mégpedig rendre $2n + 2$ és $2n + 1$. Más szavakkal, bifurkáció csak a $v_{\pm n}$ kritikus értékeknél történik. Érdeemes megfigyelni, hogy $v_{\pm n}$ előjele nem szükségszerűen

egyezik meg indexének előjével. Ha $B < 0$ és $-|A| < B < |A|$, akkor a 0 megoldás stabilitási tartományában vagyunk. A transzverzálitási feltétel mindig teljesül, a $\mu^4 \neq 1$ és $\mu^3 \neq 1$ nem-rezonancia feltétel szintén, ha $A \neq 0$ és $B \neq 2A$. Ha $|\mu| = 1$, akkor $\mu = e^\lambda = e^{iv\sqrt{B^2-A^2}} = -\frac{A}{B} - i\sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}$ és $\bar{\mu} = e^{\bar{\lambda}} = e^{-iv\sqrt{B^2-A^2}} = -\frac{A}{B} + i\sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}$. Új jelöléseinkkel néhány már ismert formula alakja:

$$F(\phi)(t) = e^{vA(t)}\left(\phi(0) + \int_{-1}^t e^{-vA(s)}vf(s, \phi(s))ds\right), \quad t \in [-1, 0], \quad (6.5)$$

$$U(\phi)(t) = e^{vA(t)}\left(\phi(0) + \int_{-1}^t e^{-vA(s)}vb(s)\phi(s)ds\right), \quad t \in [-1, 0], \quad (6.6)$$

$$V(\phi_1, \phi_2)(t) = e^{vA(t)} \int_{-1}^t e^{-vA(s)}vf_{\xi\xi}(s, 0)\phi_1(s)\phi_2(s)ds, \quad (6.7)$$

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = e^{vA(t)} \int_{-1}^t e^{-vA(s)}vf_{\xi\xi\xi}(s, 0)\phi_1(s)\phi_2(s)\phi_3(s)ds, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} (zI - U)^{-1}(\psi)(t) &= e^{[A(t) + \frac{B(t)}{z}]} \left(\left(\frac{1}{z}\psi(0) + e^{[A + \frac{B}{z}]} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-1}^0 \frac{1}{z^2} e^{-[A(s) + \frac{B(s)}{z}]} b(s)\psi(s)ds \right) (z - e^{[A + \frac{B}{z}]})^{-1} \\ &\quad \left. + \frac{1}{z} e^{-[A(t) + \frac{B(t)}{z}]} \psi(t) + \int_{-1}^t \frac{1}{z^2} e^{-[A(s) + \frac{B(s)}{z}]} b(s)\psi(s)ds \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\mathcal{R}_\mu(\psi) = \left(\frac{1}{\mu + vB} \right) \left(\psi(0) + \int_{-1}^0 \frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right). \quad (6.10)$$

Innentől kezdve μ mindig kritikus Floquet-együtthatót jelent, ami valamely $v = v_n$ kritikus értékhez tartozik, azaz $|\mu| = 1$. Kényelmi szempontok miatt néha elhagyjuk az alsó indexet is, ez nem okoz félreértést.

6.2. Krisztin-Walther egyenlet periodikus együtthatóval

Tekintsük a

$$\dot{z}(t) = vr(t)(-mz(t) + g(z(t-1))) \quad (6.11)$$

egyenletet, ahol v valós paraméter, $m > 0$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^4 -sima függvények, r teljesíti az $r(t+1) = r(t)$ relációt minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, $g(0) = 0$. Amikor $r(t)$ a konstans függvény, akkor (6.11) autonóm egyenletté válik, ami nem más, mint a Krisztin-Walther egyenlet. Ezt az egyenletet Krisztin, Walther és Wu behatóan tanulmányozta mind a pozitív ($\xi g(\xi) > 0$ ha $\xi \neq 0$), mind a negatív ($\xi g(\xi) < 0$ ha $\xi \neq 0$) visszacsatolás esetében. A széleskörű eredmények megtalálhatóak a [Kri01b], [Kri00], [KW01], [Wal95] cikkekben, valamint a [KWW99] monográfiában. Bizonyos eredményekhez a visszacsatolás monotonitási tulajdonságát is fel kell tételezni. A globális attraktor szerkezetét meghatározták a paraméterek széles tartományán, de bonyolultabb viselkedés is előfordulhat ([LW99]). A Hopf-bifurkáció során megjelenő periodikus pályák fontos szerepet játszanak a dinamikában. Néhány speciális modell a neurális hálózatok területén a $g(\xi) = k_1 \tanh(k_2 \xi)$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ függvényt használja ([Wu98]).

Még realiztikusabb a modellünk, amikor $r(t)$ egy periodikus függvény.

6.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0 < \int_{-1}^0 r(s)ds$, $g'(0) < 0$, $g''(0) = 0$ és $g'''(0) \neq 0$. Ekkor a (6.11) egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer a $g'''(0) < 0$ esetben szubkritikus, a $g'''(0) > 0$ esetben szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a v paraméter növekedve áthalad v_0 -n.*

Megemlítjük, hogy a $g''(0) = 0$ feltételt kielégítik például a $g(\xi) = \arctan(\xi)$ és a $g(\xi) = \tanh(\xi)$ függvények. A tétel egy olyan szituációt ír le, amikor a $g'''(0)$ előjele határozza meg a bifurkáló invariáns görbe megjelenésének irányát. Legyen

$$R = \int_{-1}^0 r(s)ds, \quad R(t) = \int_{-1}^t r(s)ds.$$

A korábbi jelöléseinket használva

$$\begin{aligned} a(t) &= -mr(t), & f(t, x(t-1)) &= r(t)g(x(t-1)), \\ f_\xi(t, 0) &= r(t)g'(0), & f_{\xi\xi}(t, 0) &= r(t)g''(0), & f_{\xi\xi\xi}(t, 0) &= r(t)g'''(0), \\ \alpha &= -mR, & \beta &= g'(0)R, & c(u) &= -v_0mr(u), & b(u) &= v_0g'(0)r(u). \end{aligned}$$

6.2.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|\mu| = 1$. Ekkor a centrális altérhez tartozó sajátfüggvényekre $|\chi_\mu(t)| = 1$ és $\chi_\mu(t)\bar{\chi}_\mu(t) = 1$ minden $t \in [-1, 0]$ esetén.*

Bizonyítás: A (6.11) karakterisztikus egyenlete

$$\lambda = -mRv + g'(0)Rve^{-\lambda} \quad (6.12)$$

és a sajátfüggvény

$$\chi_\mu(s) = e^{v(-m+g'(0)e^{-\lambda}R)s}, \quad (6.13)$$

így elegendő megmutatni, hogy

$$\operatorname{Re}(-m + g'(0)e^{-\lambda}) = 0.$$

A (6.24) karakterisztikus egyenlet alapján

$$-m + g'(0)e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{Rv} = i\frac{\theta}{Rv},$$

ami egy tisztán képzetes szám. □

Ha $0 < v < v_0$, akkor minden Floquet együttható az egységkörön belül van és a 0 stacionárius megoldás aszimptotikusan stabil. Az első bifurkációt tanulmányozzuk, amikor v áthalad v_0 -n. Felhasználva (6.13)-t és az előző lemmát, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} W(\chi_{\mu_0}, \chi_{\mu_0}, \bar{\chi}_{\mu_0})(t) &= e^{\int_{-1}^t -v_0mr(u)du} \\ &\times \int_{-1}^t e^{-\int_{-1}^s -v_0mr(u)du} v_0r(s)g'''(0)\chi_{\mu_0}(s)\chi_{\mu_0}(s)\bar{\chi}_{\mu_0}(s)ds \\ &= v_0g'''(0)e^{-v_0mR(t)} \int_{-1}^t e^{v_0g'(0)\bar{\mu}_0R(s)} r(s)ds \\ &= v_0g'''(0)e^{-v_0mR(t)} \left(e^{v_0g'(0)\bar{\mu}_0R(t)} - 1 \right) \frac{1}{v_0g'(0)\bar{\mu}_0} \\ &= \frac{g'''(0)\mu_0}{g'(0)} \left(\chi_{\mu_0}(t) - e^{-v_0mR(t)} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Jelöljük ezt a függvényt röviden $W_0(t)$ -vel. Legyen $x \cong y$ pontosan akkor, ha $xy > 0$. A $g''(0) = 0$ feltétel miatt $V \equiv 0$. Ezen megjegyzések és az előzmények alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\delta(v_0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu_0} R_{\mu_0} (W_0(t)) \right) \\
&\cong \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_0 + v_0 R g'(0)} \right) \left(W_0(0) + \int_{-1}^0 \frac{v_0 g'(0) r(s) W_0(s)}{\chi_{\mu_0}(s)} ds \right) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\bar{\mu}_0 + v_0 R g'(0)}{|\mu_0 + v_0 R g'(0)|^2} \right) \left(\frac{g'''(0) \mu_0}{g'(0)} (\chi_{\mu_0}(0) - e^{-v_0 m R(0)}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{-1}^0 \frac{v_0 g'(0) r(s) g'''(0) \mu_0 (\chi_{\mu_0}(s) - e^{-v_0 m R(s)}) \bar{\chi}_{\mu_0}(s)}{g'(0) |\chi_{\mu_0}(s)|^2} ds \right) \right) \\
&\cong -g'''(0) \operatorname{Re} \left(\left(\bar{\mu}_0 + v_0 R g'(0) \right) \left(\mu_0 - e^{-v_0 m R} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{-1}^0 v_0 g'(0) r(s) (1 - e^{-v_0 m R(s)}) \bar{\chi}_{\mu_0}(s) ds \right) \right) \\
&= -g'''(0) \operatorname{Re} \left(\left(\bar{\mu}_0 + v_0 R g'(0) \right) \left(\mu_0 - e^{-v_0 m R} + v_0 g'(0) R \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1 - \bar{\mu}_0 e^{-v_0 m R}}{\mu_0 - 2 \frac{m}{g'(0)}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Vezessük be a

$$w = \frac{m}{g'(0)} \in (-1, 0), \quad \tilde{w} = \frac{\arccos(w)}{\sin(\arccos(w))} > 0$$

jelöléseket, ekkor

$$v_0 = \frac{-\tilde{w}}{R g'(0)} > 0.$$

A 5.1.1 Lemma szerint

$$\mu_0 = w - i\sqrt{1-w^2}, \quad \bar{\mu}_0 = w + i\sqrt{1-w^2}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$v_0 g'(0) R = -\tilde{w}, \quad v_0 m R = -\tilde{w} w,$$

a reális rész argumentumában levő kifejezés így írható:

$$\begin{aligned} & (w + i\sqrt{1-w^2} - \tilde{w})(w - i\sqrt{1-w^2} - e^{\tilde{w}w} - \tilde{w} + \frac{1 - (w + i\sqrt{1-w^2})e^{\tilde{w}w}}{w - i\sqrt{1-w^2} - 2w}) \\ &= (w + i\sqrt{1-w^2} - \tilde{w})(w - i\sqrt{1-w^2} - e^{\tilde{w}w} - \tilde{w} - (w - i\sqrt{1-w^2}) + e^{\tilde{w}w}) \\ &= (w + i\sqrt{1-w^2} - \tilde{w})(-\tilde{w}), \end{aligned}$$

aminek a valós része

$$\tilde{w}(\tilde{w} - w).$$

A bizonyítás befejezéséhez már csak egy kis elemi függvénykalkulusra van szükség. Az

$$f(\xi) = \frac{\arccos(\xi)}{\sin(\arccos(\xi))} - \xi$$

függvény deriváltja

$$f'(\xi) = -1 - \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{\xi \arccos(\xi)}{(1-\xi^2)^{3/2}},$$

ami negatív a $(-1, 0]$ intervallumon. Mivel $f(0) = \frac{\pi}{2} > 0$ és $f(\xi)$ monoton csökken a $(-1, 0]$ -n, $f(\xi) > \frac{\pi}{2} > 0$ az egész $(-1, 0)$ intervallumon és az előbb felírt valós rész pozitív minden $w \in (-1, 0)$ esetén. Ezért $\delta(v_0) \cong -g'''(0)$.

□

6.3. Mackey-Glass egyenlet

A híres

$$\dot{x}(t) = -mx(t) + \frac{qx(t-\tau)}{1+x(t-\tau)^n} \quad (6.15)$$

Mackey-Glass egyenletet eredetileg a vérsejtek képződésének modelljeként, majd különböző betegségek leírására alkalmazták. Alaposan tanulmányozták a tulajdonságait az m, q, τ, n paraméterek legkülönbözőbb értékeire, később kaotikus viselkedése révén vált közismertté. Remek történeti áttekintés található a névadók [GM88] művében, de ma is jelennek meg új eredmények ([LTT02]).

Mi a Mackey-Glass egyenlet egy még realiztikusabb, periodikus változatát tekintjük:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -m(t)x(t) + \frac{q(t)x(t-1)}{1+x(t-1)^2}, \quad (6.16)$$

ahol $\varepsilon > 0$ valós paraméter, $m, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rendelkezik az $m(t+1) = m(t) > 0$ és $q(t+1) = q(t) > 0$ tulajdonságokkal minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Rögzítsük $v = v_n$ -t. Korábbi jelöléseinket használva

$$a(t) = -m(t), \quad f(t, \xi) = \frac{q(t)\xi}{1+\xi^2},$$

$$f_\xi(t, 0) = q(t), \quad f_{\xi\xi}(t, 0) = 0, \quad f_{\xi\xi\xi}(t, 0) = -6q(t),$$

$$A = -M, \quad B = Q$$

$$\chi_\mu(s) = e^{v(-M(s)+\bar{\mu}Q(s))}$$

$$\lambda = v(-M + Qe^{-\lambda})$$

$$\mu = e^\lambda = e^{iv\sqrt{B^2-A^2}} = \frac{M}{Q} - i\sqrt{1 - \left(\frac{M}{Q}\right)^2},$$

ahol μ, λ, χ_μ a megfelelő v_n -hez tartozik. Bifurkációs jelenségek csak az $\frac{M}{Q} < 1$ esetben fordulnak elő.

6.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0,9 < \frac{M}{Q} < 1$. Ekkor a (6.16) egyenlet-hez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a paraméter növekedve áthalad v_n -en.*

Bizonyítás: (6.8)-at használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)(t) &= e^{-vM(t)} \int_{-1}^t e^{vM(s)} (-6)vq(s)\chi_\mu(s)\chi_\mu(s)\bar{\chi}_\mu(s)ds \\ &= -e^{-vM(t)} \int_{-1}^t e^{v(-2M(s)+(2\bar{\mu}+\mu)Q(s))} (-6)vq(s)ds. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Jelöljük ezt a függvényt röviden $W_0(t)$ -vel és írjuk át

$$W_0(t) = -e^{-vM(t)} \int_{-1}^t g(s)e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2}Q(s)} ds \quad (6.18)$$

alakba, ahol $g(s)$ egy pozitív valós értékű függvény, amelybe összegyűjtöttük az összes pozitív tényezőt. Legyen $x \cong y$ akkor és csak akkor, ha $xy > 0$. Mivel $f_{\xi\xi}(t, 0) = 0$, $V \equiv 0$. Most az 5.2.1. Tétel, (6.10) és (5.2.2) alapján

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu} R_{\mu} (W_0(t)) \right) \\ &\cong \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu + vQ} \right) \left(W_0(0) + \int_{-1}^0 \frac{vq(s)W_0(s)}{\chi_{\mu}(s)} ds \right) \right) \\ &\cong - \operatorname{Re} \left(\bar{\mu} (\bar{\mu} + vQ) \left(e^{-vM} \int_{-1}^0 g(s) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(s)} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-1}^0 vq(s) \int_{-1}^s g(u) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(u)} du e^{-iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(s)} ds \right) \right). \end{aligned}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\operatorname{Re} (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) e^{-vM} g(s) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(s)} \cong (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(s)} > 0 \quad (6.19)$$

és

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) vq(s) \int_{-1}^s g(u) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(u)} du e^{-iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q(s)} \\ \cong \operatorname{Re} (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) \int_{-1}^s g(u) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} (Q(u)-Q(s))} du > 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

minden $s \in [-1, 0]$ esetén. Az utóbbi (6.20) egyenlőtlenséghez elegendő belátni, hogy,

$$\operatorname{Re} (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) e^{iv\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} (Q(u)-Q(s))} du > 0$$

minden $0 \geq s \geq u \geq -1$ esetén. Minthogy $Q(s)$ és $Q(u) - Q(s)$ értékkészlete is $[-Q, Q]$ -ba esik, ha

$$\operatorname{Re} (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}vQ) e^{i\theta v\sqrt{1-\left(\frac{M}{Q}\right)^2} Q} du > 0$$

bármely $\theta \in [-1, 1]$ -re, akkor (6.19) és (6.20) is fennáll. Vezessük be a $w = \frac{M}{Q}$ jelölést. Ekkor $\bar{\mu} = w + i\sqrt{1-w^2}$ és (6.4) alapján $vQ = \frac{\arccos w}{\sqrt{1-w^2}}$. Ezzel a

jelöléssel a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(w + i\sqrt{1-w^2} \right)^2 + (w + i\sqrt{1-w^2}) \frac{\arccos w}{\sqrt{1-w^2}} e^{i\theta \arccos w} = \\ & \operatorname{Re} \left(2w^2 + \frac{w \arccos w}{\sqrt{1-w^2}} - 1 + i(2w\sqrt{1-w^2} + \arccos w) \right) e^{i\theta \arccos w} > 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

relációt kell igazolni minden $\theta \in [-1, 1]$ értékre. Minthogy $2w\sqrt{1-w^2} + \arccos w \geq 0$, $2w^2 + \frac{w \arccos w}{\sqrt{1-w^2}} - 1 \geq 0$ és $\frac{\pi}{2} \geq \arccos w \geq 0$, ha $w \in [\frac{9}{10}, 1]$, hogyha (6.21) teljesül $\theta = 1$ -re, akkor minden $\theta \in [-1, 1]$ -re teljesül. A $\theta = 1$ esetben azt kapjuk, hogy $e^{i\theta \arccos w} = w + i\sqrt{1-w^2}$. Ha most közvetlenül kiszámoljuk a (6.21) valós részét, akkor kijön, hogy

$$3w^3 - 3w + \arccos w \frac{2w^2 - 1}{\sqrt{1-w^2}} > 3w^3 + 2w^2 - 3w - 1 > 0$$

minden $0,9 < w < 1$ esetén.

Közben felhasználtuk a jól ismert $\frac{t}{\sin t} > 1$ ($t > 0$) egyenlőtlenséget, valamint azokat az egyszerűen ellenőrizhető tényeket, mint $2w^2 - 1 > 0$, ha $w > 0,9$, továbbá $3w^3 + 2w^2 - 3w - 1 > 0$ a $w = 0,9$ értékre és ezen polinom deriváltja $6w^2 + 4w - 3$, ami pozitív, ha $w > 0,9$. \square

6.4. Nicholson-féle legyek

Ebben a részben a

$$\dot{N}(t) = qr(t) \left(-dN(t) + pN(t-1)e^{-aN(t-1)} \right) \quad (6.22)$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol $q > 0$ valós paraméter, $d > 0$, $p > 0$, $a > 0$ előre adott konstansok, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos függvény az $r(t+1) = r(t) > 0$ tulajdonsággal minden valós t -re. Ha speciálisan $qr(t) \equiv 1$, akkor (6.22) éppen a nevezetes eredeti Nicholson-féle légyszaporodási modellt adja. Itt $N(t)$ jelöli a populáció méretét, δ a halálozási ráta, p az egy főre eső napi lerakott tojás mennyisége, $\frac{1}{a}$ pedig az a méret, amely mellett a populáció reprodukciós rátája maximális. A Nicholson modellel széleskörben foglalkoztak, például a [GL91] vagy a [Smi95] monográfiákban. Léteznek friss cikkek is a témában, egy újfajta oszcillációs kritériumot prezentál [GT02], [SA02] számos régebbi, autonóm eredményt terjeszt ki a periodikus együtthatós esetre,

[LW05] pedig a Hopf-bifurkációt tanulmányozza, hogyha a késleltetést választjuk paraméternek.

$N_0 = 0$ mindig egyensúlyi helyzete (6.22)-nek. Az $N_1 = \frac{\ln(\frac{p}{d})}{a}$ pozitív egyensúlyi helyzet pontosan akkor létezik, ha $a > 0$ és $p > d$. Az $N(t) = N_1 + \frac{1}{a}x(t)$, $v = dq$, $k = \ln(\frac{p}{d}) > 0$ jelölésekkel $x(t)$ kielégíti az

$$\dot{x}(t) = vr(t)(-x(t) - k(1 - e^{-x(t-1)}) + x(t-1)e^{-x(t-1)}) \quad (6.23)$$

egyenletet. A modell biológiai interpretációjának megfelelően csak a pozitív megoldásokat vesszük számításba, ezért csak a pozitív egyensúlyi helyzet bifurkációjának vizsgálatában vagyunk érdekeltek, ami a (6.23) egyenlet 0 egyensúlyi helyzetébe transzformálódik. Korábbi jelöléseinkkel

$$\begin{aligned} a(t) &= -r(t), & f(t, \xi) &= r(t)(-k(1 - e^{-\xi}) + \xi e^{-\xi}), \\ f_\xi(t, 0) &= b(t) = r(t)(1 - k), & f_{\xi\xi}(t, 0) &= r(t)(k - 2), \\ f_{\xi\xi\xi}(t, 0) &= r(t)(3 - k), & A &= -R, & B &= R(1 - k). \end{aligned}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $R = \int_{-1}^0 r(s)ds = 1$. Ha $k \leq 2$, akkor az összes Floquet-együttható az egységkörön belül található és a (6.23) egyenlet 0 stacionárius megoldása aszimptotikusan stabil. A $k = 3$ eset rezonanciát okoz, hiszen ekkor $B = 2A$. Tegyük fel, hogy $2 < k \neq 3$.

6.4.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|\mu| = 1$. Ekkor a centrális altérhez tartozó sajátfüggvényre $|\chi_\mu(t)| = 1$ és $\chi_\mu(t)\bar{\chi}_\mu(t) = 1$ teljesül minden $t \in [-1, 0]$ esetén.*

Bizonyítás: A (6.23)-hoz a

$$\lambda = -v + (1 - k)ve^{-\lambda} \quad (6.24)$$

karakterisztikus egyenlet tartozik, a sajátfüggvény pedig

$$\chi_\mu(s) = e^{vR(s)(-1+(1-k)e^{-\lambda})} = e^{\lambda R(s)}, \quad (6.25)$$

így $\lambda R(s) = i\theta R(s)$ egy tisztán képzetes szám.

□

6.4.2. Tétel. *A (6.23) egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy keresztül, amint a v paraméter növekedve áthalad a kritikus v_n értéken, ahol $n \geq 1$.*

Bizonyítás:

Az $\int_{-1}^t e^{F(s)} f(s) ds = e^{F(t)} - 1$ egyszerű azonosságot az alábbiakban sokszor felhasználjuk.

(6.7), (6.8) és (6.25) alapján

$$\begin{aligned}
W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)(t) &= e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} v(3-k)r(s)\chi_\mu(s)\chi_\mu(s)\bar{\chi}_\mu(s) ds \\
&= v(3-k)e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{(v+\lambda)R(s)} r(s) ds \\
&= v(3-k)e^{-vR(t)} \left(e^{(v+\lambda)R(t)} - 1 \right) \frac{1}{v+\lambda} \\
&= \frac{(k-3)v}{v+\lambda} \left(e^{-vR(t)} - \chi_\mu(t) \right),
\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)(t) &= e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} v(k-2)r(s)\chi_\mu(s)\bar{\chi}_\mu(s) ds \\
&= (k-2)e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} vr(s) ds \\
&= (2-k)(e^{-vR(t)} - 1)
\end{aligned} \tag{6.27}$$

és

$$\begin{aligned}
V(\chi_\mu, \chi_\mu)(t) &= e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} v(k-2)r(s)\chi_\mu(s)\chi_\mu(s) ds \\
&= (k-2)v e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{(2\lambda+v)R(s)} r(s) ds \\
&= \frac{(k-2)v}{2\lambda+v} e^{-vR(t)} (e^{(2\lambda+v)R(t)} - 1) \\
&= \frac{(2-k)v}{2\lambda+v} (e^{-vR(t)} - \chi_\mu(t)^2).
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Jelöljük a fenti függvényeket röviden rendre $W_0(t)$, $V_0(t)$ és $V_1(t)$ -vel. Most

kiszámítjuk a rezolvenst, erre szükségünk lesz, hogy megkapjuk $\delta(v)$ -t.

$$\begin{aligned}
(I - U)^{-1}(V_0)(t) &= e^{-kvR(t)} \left(\left(V_0(0) \right. \right. \\
&+ e^{-kv} \int_{-1}^0 e^{kvR(s)} v(1-k)r(s)V_0(s) ds \Big) \\
&\times (1 - e^{-kv})^{-1} + e^{kvR(t)} V_0(t) + \int_{-1}^t e^{kvR(s)} v(1-k)r(s)V_0(s) ds \Big) \\
&= (2-k)e^{-kvR(t)} \left(\left(e^{-v} - 1 \right. \right. \\
&+ e^{-kv} \int_{-1}^0 e^{kvR(s)} v(1-k)r(s)(e^{-vR(s)} - 1) ds \Big) \\
&\times (1 - e^{-kv})^{-1} + e^{kvR(t)} (e^{-vR(t)} - 1) + \\
&\left. \int_{-1}^t e^{kvR(s)} v(1-k)r(s)(e^{-vR(s)} - 1) ds \right),
\end{aligned}$$

ebből az egyszerű azonosságunk segítségével

$$\begin{aligned}
&(2-k)e^{-kvR(t)} \left(\left(e^{-v} - 1 + \right. \right. \\
&e^{-kv} \left(- (e^{(k-1)v} - 1) + \frac{k-1}{k} (e^{kv} - 1) \right) \Big) \\
&\times (1 - e^{-kv})^{-1} + e^{kvR(t)} (e^{-vR(t)} - 1) - (e^{(k-1)vR(t)} - 1) \\
&+ \frac{k-1}{k} (e^{kvR(t)} - 1) \Big) \tag{6.29} \\
&= (2-k)e^{-kvR(t)} \left(-\frac{1}{k} (1 - e^{kv})(1 - e^{kv})^{-1} - \frac{1}{k} (e^{kvR(t)} - 1) \right) \\
&= \frac{k-2}{k}.
\end{aligned}$$

Legyen $\omega = v(-1 + (1-k)\bar{\mu}^2)$, ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned}
(\mu^2 I - U)^{-1}(V_1)(t) &= e^{\omega R(t)} \left(\left(\bar{\mu}^2 V_1(0) + e^\omega \right. \right. \\
&\quad \times \int_{-1}^0 \bar{\mu}^4 e^{-\omega R(s)} v(1-k)r(s)V_1(s) ds \left. \left. \right) (\mu^2 - e^\omega)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mu}^2 e^{-\omega R(t)} V_1(t) + \int_{-1}^t \bar{\mu}^4 e^{-\omega R(s)} v(1-k)r(s)V_1(s) ds \right) \\
&= \frac{(2-k)v}{2\lambda+v} e^{\omega R(t)} \left(\left(\bar{\mu}^2 (e^{-v} - \mu^2) + e^\omega \right. \right. \\
&\quad \times \int_{-1}^0 \bar{\mu}^4 e^{-\omega R(s)} v(1-k)r(s) (e^{-vR(s)} - \chi_\mu(s)^2) ds \left. \left. \right) (\mu^2 - e^\omega)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mu}^2 e^{-\omega R(t)} (e^{-vR(t)} - \chi_\mu(t)^2) \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^t \bar{\mu}^4 e^{-\omega R(s)} v(1-k)r(s) (e^{-vR(s)} - \chi_\mu(s)^2) ds \right),
\end{aligned}$$

felhasználva újra az egyszerű azonosságunkat mindez így leegyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
&\frac{(2-k)v}{2\lambda+v} e^{\omega R(t)} \left(\left(\bar{\mu}^2 e^{-v} - 1 + e^\omega \bar{\mu}^4 v(1-k) \right. \right. \\
&\quad \times \left(\frac{e^{-\omega-v} - 1}{-\omega-v} - \frac{e^{2\lambda-\omega} - 1}{2\lambda-\omega} \right) \left. \left. \right) (\mu^2 - e^\omega)^{-1} + \bar{\mu}^2 e^{-\omega R(t)} (e^{-vR(t)} - \chi_\mu(t)^2) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mu}^4 v(1-k) \left(\frac{e^{(-\omega-v)R(t)} - 1}{-\omega-v} - \frac{e^{(2\lambda-\omega)R(t)} - 1}{2\lambda-\omega} \right) \right) \\
&= \frac{(2-k)v}{2\lambda+v} \left(e^{\omega R(t)} \bar{\mu}^2 \left(\frac{\omega+v}{\omega-2\lambda} - 1 \right) + \bar{\mu}^2 (e^{2\lambda R(t)} - e^{\omega R(t)}) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\omega+v}{\omega-2\lambda} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{(2-k)v}{\omega-2\lambda} \bar{\mu}^2 e^{2\lambda R(t)}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Mindemellett

$$\begin{aligned}
V(\chi_\mu, (1-U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) &= e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} v(k-2)r(s)e^{\lambda R(s)} \frac{k-2}{k} \\
&= -\frac{(k-2)^2 v}{k(v+\lambda)} (e^{-vR(t)} - e^{\lambda R(t)}),
\end{aligned} \tag{6.31}$$

és

$$\begin{aligned}
V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu)) \\
&= e^{-vR(t)} \int_{-1}^t e^{vR(s)} v(k-2)r(s)e^{-\lambda R(s)} \frac{(2-k)v}{\omega-2\lambda} \bar{\mu}^2 e^{2\lambda R(s)} ds \\
&= \frac{(k-2)^2 v^2 \bar{\mu}^2}{(\omega-2\lambda)(v+\lambda)} (e^{-vR(t)} - e^{\lambda R(t)}).
\end{aligned} \tag{6.32}$$

A most kiszámolt függvényeket behelyettesítjük (5.2.2) formulájába, így

$$\begin{aligned}
\delta(v) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu} \mathcal{R}_\mu \left((e^{-vR(t)} - e^{\lambda R(t)}) \left(\frac{(k-3)v}{v+\lambda} + \frac{(k-2)^2 v^2 \bar{\mu}^2}{(\omega-2\lambda)(v+\lambda)} \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - 2 \frac{(k-2)^2 v}{k(v+\lambda)} \right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Számításba vesszük az alábbi összefüggéseket is:

- $\mu = \frac{1}{1-k} - i\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}$,
- $\lambda = iv(1-k)\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}$,
- $\mu^2 = \frac{2}{(1-k)^2} - 1 - i2\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}}{1-k}$,
- $v + \lambda = v(1-k)\bar{\mu}$.

Legyen $z = \frac{v\bar{\mu}^2}{(\omega-2\lambda)} = z_1 + iz_2 = \frac{w_1 - iw_2}{w_1^2 + w_2^2}$, ahol $1/z = w_1 + iw_2$. Számítsuk ki $(1/z)$ -t!

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= (\omega - 2\lambda)\mu^2 = -\mu^2 + (1-k) - \mu^2 \left(i2(1-k) \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \right) \\
&= -k - 2 + \frac{2}{(1-k)^2} + i2 \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \left((1-k) - \frac{1}{(1-k)} \right).
\end{aligned} \tag{6.34}$$

A (6.10)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(e^{-vR(t)}) &= \left(\frac{1}{\mu + v(1-k)} \right) \left(e^{-v} + \int_{-1}^0 e^{-vR(s)} \bar{\chi}_\mu(s) v(1-k) r(s) ds \right) \\
&= \left(\frac{1}{\mu + v(1-k)} \right) \left(e^{-v} + \frac{v(1-k)(e^{-v}\bar{\mu} - 1)}{-v - \lambda} \right) \\
&= \frac{\mu}{\mu + v(1-k)} = \frac{1}{1 + v + \lambda},
\end{aligned}$$

így aztán

$$\mathcal{R}_\mu(e^{-vR(t)}) - 1 = \frac{1}{1 + v + \lambda} - 1 = -\frac{v + \lambda}{1 + v + \lambda} = -\frac{v + \lambda}{1 + v + \lambda},$$

és (6.33) leegyszerűsíthető a következőre:

$$\delta(v) \cong -v \operatorname{Re} \left(\left(\bar{\mu}(1 + v - \lambda) \right) \left(z + \frac{k-3}{(k-2)^2} - \frac{2}{k} \right) \right). \tag{6.35}$$

Ne feledjük, hogy $v > 0$. Az első tényező kifejezhető, úgymint

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}(1 + v - \lambda) \\
&= \left(\frac{1}{1-k} + i \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \right) \left(1 + v - iv(1-k) \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \right) \\
&= \frac{1}{1-k} + v(1-k) + i \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Ezzel, valamint z valós és képzetes részének különválasztásával (6.35) így alakul:

$$\begin{aligned}\delta(v) &\cong -\left(\left(\frac{1}{1-k} + v(1-k)\right)\left(z_1 + \frac{k-3}{(k-2)^2} - \frac{2}{k}\right) - z_2 \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}\right) \\ &\cong -\left(\left(\frac{1}{1-k} + v(1-k)\right)\left(w_1 + \left(\frac{k-3}{(k-2)^2} - \frac{2}{k}\right)(w_1^2 + w_2^2)\right)\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} w_2\right).\end{aligned}\tag{6.37}$$

Ha $2 < k \in \mathbb{R}$ és $1 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor a

- $\frac{1}{(1-k)^2} < 1$ miatt $w_1 = -k - 2 + \frac{2}{(1-k)^2} < -k$,
- $\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} w_2 = 2\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} \left((1-k) - \frac{1}{(1-k)}\right)$
 $= 2(1-k)\left(1 - \frac{1}{(1-k)^2}\right)^2 > 2(1-k)$,
- $v = v_n = -\frac{\arccos(\frac{1}{1-k}) + 2n\pi}{(1-k)\sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}}}$,
- $\frac{k-3}{(k-2)^2} - \frac{2}{k} = \frac{-k^2 + 5k - 8}{(k-2)^2 k} < 0$

relációk felhasználásával levezethető

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{1}{1-k} + v(1-k)\right)\left(w_1 + \left(\frac{k-3}{(k-2)^2} - \frac{2}{k}\right)(w_1^2 + w_2^2)\right)\right. \\ &\quad \left.+ \sqrt{1 - \frac{1}{(1-k)^2}} w_2\right) > \left(\left(\frac{1}{1-k} + v(1-k)\right)w_1 + 2(1-k)\right) \\ &> \frac{k}{k-1} + 2n\pi k - 2(k-1) > 0,\end{aligned}\tag{6.38}$$

ha $n \geq 1$, ezért $\delta(v_n) < 0$, amit bizonyítani akartunk. \square

Az $n = 0$ esetre is hasonló eredményeket kaphatunk. A számítások innen kezdve mechanikusak, viszont nagyon hosszúak és technikai jellegűek, ezért itt nem részletezzük. Elég durva becslésekkel dolgoztunk, de az $n \geq 1$ esetre

ezek is elegendőek voltak. Ha $n = 0$, akkor az egyszerű $\arccos(\frac{1}{1-k}) > \frac{\pi}{2}$ becslésből közvetlenül adódik ugyanez az egyenlőtlenség $k < 7$ -re. Amennyiben behelyettesítjük (6.37)-be a v, w_1, w_2 -re levezetett kifejezéseinket, akkor k egy racionális törtfüggvényét kapjuk, ami még \arccos -os tényezőt is tartalmaz, ennek előjele egyszerűen eldönthető. Habár ez a függvény nehezen kezelhető analitikusan az általános formájában, minden konkrét k esetén könnyen kiszámolható $\delta(v_0)$ előjele. Végezetül, az eredeti (6.22) egyenlet q_n kritikus értéke megegyezik (v_n/d) -vel. A (6.23) egyenlet bifurkációja a 0 egyensúlyi helyzetből az eredeti (6.22) egyenlet bifurkációját jelenti a pozitív egyensúlyi helyzetből.

6.5. Periodikus Krisztin-Walther egyenlet és periodikusan gerjesztett neuronok

Tekintsük (3.1) paraméterezett, periodikus változatát!

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -m(t)x(t) + \alpha(t) \tanh(\beta x(t-1)), \quad (6.39)$$

ahol $m(t) = m(t+1) > 0$ és $\alpha(t) = \alpha(t+1) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re, $\beta > 0$. Vegyük észre, hogy a 6.3.1 Tétel alkalmazható (6.39)-re. Minden pontosan úgy megy, mint a Mackey-Glass egyenlet esetében, az egyetlen különbség, hogy most $f_{\xi\xi\xi}(t, 0) = -2\beta^3\alpha(t)$, nem pedig $-6q(t)$. De a bizonyítás során nem használtuk a pontos értéket, csakis a parciális derivált előjelét, ezért az alábbi tétel azonnali következmény.

6.5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0,9 < \frac{M}{\beta \int_{-1}^0 \alpha(s) ds} < 1$. Ekkor a (6.39) egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a v paraméter növekedve áthalad a v_n kritikus értéken.*

Ha ránézünk a 6.3.1 Tétel bizonyítására, láthatjuk, hogy a számítások teljesen hasonlóan elvégezhetőek akkor is, ha az időbeli periodicitás a nemlineáritáson belül, annak argumentumában jelenik meg, és akkor is, ha $f_{\xi\xi\xi}(t, 0) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, csak ekkor a δ együttható előjele az ellenkezőjére változik. Most kimondjuk a tételt a legáltalánosabb formában.

6.5.2. Tétel. *Tekintsük az*

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -a(t)x(t) + f(t, x(t-1)) \quad (6.40)$$

egyenletet, ahol $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^4 -sima függvények, amelyekre $a(t+1) = a(t)$, $f(t+1, \xi) = f(t, \xi)$ és $f(t, 0) = 0$ teljesül minden $t, \xi \in \mathbb{R}$ esetén, $\varepsilon \neq 0$ valós paraméter. Tételezzük fel, hogy $f_\xi(t, 0) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re és $0,9 < \frac{A}{\int_{-1}^0 f_\xi(s, 0) ds} < 1$. Ekkor ha $f_{\xi\xi}(t, 0) < 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a (6.40) egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus, ha pedig $f_{\xi\xi}(t, 0) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor szubkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a $v = 1/\varepsilon$ paraméter növekedve áthalad a v_n kritikus értéken.

Vegyük észre, hogy a $0,9 < \frac{A}{\int_{-1}^0 f_\xi(s, 0) ds} < 1$ feltétel kizárja a rezonancia esetét.

A neurális hálózatok elméletében gyakran előfordul egy, a rendszer állapotától független külső periodikus erő feltételezése. Egy ilyen periodikus külső erő az autonóm rendszert periodikus rendszerbe viszi át. Tekintsük az alábbi egyenletet, ami egy periodikusan ingerelt egyedi neuron modellje:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -mx(t) + f(x(t-1)) + p(t), \quad (6.41)$$

ahol $p(t+1) = p(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. A $y(t) = x(t) - \int_{-\infty}^t e^{-a(t-s)} p(s) ds$ változó-transzformáció segítségével az integrálos tag periodicitása miatt a (6.41) egyenlet a periodikus

$$\varepsilon \dot{y}(t) = -my(t) + f(y(t-1) + \int_{-\infty}^t e^{-a(t-s)} p(s) ds) \quad (6.42)$$

egyenletbe megy át. Utolsó megjegyzésünk, hogy ha ismerünk egy partikuláris megoldást, mondjuk (6.41) egy periodikus megoldását 1 periódussal, akkor az (6.42) egy periodikus megoldásába transzformálódik. Egy kontroll-probléma esetén előfordulhat, hogy $p(t)$ -t megválaszthatjuk úgy, hogy egy előírt megoldást kapjunk. A paraméter változtatásával elvégezhetjük egy invariáns görbe (6.42) rendszerbeli Neimark-Sacker bifurkációjának analízisét ugyanúgy, mint eddig, ha a periodikus megoldás körül linearizálunk. Ebben az esetben a tóruszos interpretáció jobban rávilágít a lényegre, szemléletesebben tekinthetjük mindezt úgy, mint egy invariáns tórusz bifurkációját a periodikus megoldásból.

7. REZONÁNS POINCARÉ-NORMÁLFORMA

7.1. Rezonáns normálforma tétel

A normálforma tulajdonképpen egy leképezés legegyszerűbb alakra hozása nemlineáris koordinátatranszformációk segítségével. Kimondjuk a Poincaré normálformák tételét 1:4 rezonancia esetére ([Kuz98, p. 436]).

7.1.1. Tétel (Rezonáns normálforma). *Legyen $g = g_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$g(z) = \mu z + \frac{\rho_{20}}{2} z^2 + \rho_{11} z \bar{z} + \frac{\rho_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{\rho_{30}}{6} z^3 + \frac{\rho_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{\rho_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{\rho_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4) \quad (7.1)$$

egy $\gamma \in \mathbb{R}$ paramétertől függő leképezés, ahol $\mu = \mu(\gamma)$ és a $\rho_{kl} = \rho_{kl}(\gamma)$ együtthatók a paraméter sima függvényei, valamint $\mu(\gamma_j) = i$ a kritikus $\gamma = \gamma_j$ paraméterértékekre. Ekkor egy, a paramétertől simán függő koordinátatranszformáció segítségével a kritikus esetben a leképezés a

$$\tilde{g}(w) = iw + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 \bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

alakba transzformálható, ahol

$$c_1 = \frac{1+3i}{4} \rho_{20} \rho_{11} + \frac{1-i}{2} \rho_{11} \bar{\rho}_{11} + \frac{-1-i}{4} \rho_{02} \bar{\rho}_{02} + \frac{\rho_{21}}{2}$$

és

$$c_2 = \frac{i-1}{4} \rho_{11} \rho_{02} + \frac{-i-1}{4} \rho_{02} \bar{\rho}_{20} + \frac{\rho_{03}}{6}.$$

Az irodalomban hasonló, de különböző formulák jelentek meg a c_2 együtthatóra:

- Iooss ([Ioo79, Chapter IV]):

$$c_2 = \frac{i-1}{4} (\rho_{11} + \bar{\rho}_{20}) \rho_{02} + \frac{\rho_{03}}{6}$$

- Wan ([Wan78]):

$$c_2 = \frac{2i-1}{4}\rho_{11}\rho_{02} + \frac{-2i-1}{4}\rho_{02}\bar{\rho}_{20} + \frac{\rho_{03}}{6}$$

Ezek a formulák tévesek, el lettek számolva, a helyes az, amelyik a tételünkben szerepel és [Kuz98]-ban lett közölve. Ugyanakkor [Kuz98]-ban a részletes számításokat mellőzték, ezért ezt most prezentáljuk a következő alfejezetben. Tulajdonképpen egészen egyszerű és magától értetődő, azonban hosszadalmas és munkaigényes számításokról van szó. Viszont fontos ismerünk a helyes formulát, ha egy konkrét egyenlet bifurkációját akarjuk vizsgálni. Sajnos az irodalomban többen is az Iooss-féle formulát használják, a közelmúltban több cikkben alkalmazták bizonyos mechanikai rendszerekre, amelyeknél a rezonáns bifurkáció jelensége lép fel ([GJ01], [LX02], [WXX05], [LX]). Mivel a téves formulát alkalmazták, a kapott eredmények is tévesek lehetnek. Könnyű eltéveszteni a formulát, amint az az eset is mutatja, hogy Holmes és Whitley a c_1 -et számolta el [HW84a]-ban, amit egy erratumban korrigáltak ([HW84b]). Mindezek miatt a számításokat teljes részletességgel közöljük.

Érdeemes megjegyezni, hogy nemrezonáns esetben a \bar{w}^3 együtthatóját, c_2 -t (ez az úgynevezett rezonáns tag) is ki lehet nullázni, viszont a c_1 akkor is ugyanígy számolandó ([Kuz98]).

7.2. A rezonáns együttható kiszámítása

7.2.1. A számítás menete

Tekintsük a (7.1) leképezést és a

$$z = t(w) = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2$$

transzformációt. A számolás hat lépésből áll. Kiszámítjuk t^{-1} -t, aután $(f \circ t)$ -t és $(t^{-1} \circ f \circ t)$ -t. A h_{ij} együtthatók ügyes megválasztásával kinullázzuk a másodrendű tagokat, majd egy újabb transzformációval az alkalmas harmadrendű tagokat, ezután meghatározzuk a nem kinullázható harmadrendű tagokat. A két transzformáció együttesen Poincaré normálformára hozza az eredeti leképezést.

7.2.2. A t^{-1} meghatározása

Fejtsük sorba t^{-1} -t z és \bar{z} szerint:

$$t^{-1}(z) = z + \frac{a_{20}}{2}z^2 + a_{11}z\bar{z} + \frac{a_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{a_{30}}{6}z^3 + \frac{a_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{a_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{a_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Helyettesítsünk z helyébe $t(w)$ -t, figyelembe véve, hogy

$$\bar{z} = t(\bar{w}) = \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}w\bar{w} + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^2.$$

A harmadrendű tagokig számolva kapjuk, hogy

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2,$$

$$\frac{a_{20}}{2}z^2 = [w^2 + h_{20}w^3 + 2h_{11}w^2\bar{w} + h_{02}w\bar{w}^2] \frac{a_{02}}{2} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$a_{11}z\bar{z} = [w\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}w\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}w^2\bar{w} + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^3 + \frac{h_{20}}{2}\bar{w}w^2 + h_{11}w\bar{w}^2 + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^3]a_{11} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{a_{02}}{2}\bar{z}^2 = [\bar{w}^2 + \bar{h}_{20}\bar{w}^3 + 2\bar{h}_{11}w\bar{w}^2 + \bar{h}_{02}w^2\bar{w}] \frac{a_{02}}{2} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{a_{30}}{6}z^3 = \frac{a_{30}}{6}w^3 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{a_{21}}{2}z^2\bar{z} = \frac{a_{21}}{2}w^2\bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{a_{12}}{2}z\bar{z}^2 = \frac{a_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{a_{03}}{6}\bar{z}^3 = \frac{a_{03}}{6}\bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4).$$

Ezt mind összegezve vissza kell kapnunk a $t^{-1} \circ t(w) = w$ azonosságot. Jelölje $[u]$ az u együtthatóját. Összegezve a w egyes hatványainak együtthatóira,

$$[w^2] = \frac{h_{20}}{2} + \frac{a_{20}}{2} = 0,$$

$$[w\bar{w}] = h_{11} + a_{11} = 0,$$

$$[\bar{w}^2] = \frac{h_{02}}{2} + \frac{a_{02}}{2} = 0,$$

$$[w^3] = \frac{a_{20}}{2} \frac{h_{20}}{2} + a_{11} \frac{\bar{h}_{02}}{2} + \frac{a_{30}}{6} = 0,$$

$$[w^2\bar{w}] = a_{20} + a_{11}\bar{h}_{11} + a_{11} \frac{h_{20}}{2} + \frac{a_{02}}{2} \frac{\bar{h}_{02}}{2} + \frac{a_{21}}{2} = 0,$$

$$[w\bar{w}^2] = \frac{a_{02}}{2} h_{02} + a_{11} \frac{\bar{h}_{20}}{2} + a_{11} h_{11} + \bar{h}_{11} a_{02} + \frac{a_{12}}{2} = 0,$$

$$[\bar{w}^3] = a_{11} \frac{h_{02}}{2} + \frac{a_{02}}{2} \bar{h}_{20} + \frac{a_{03}}{6} = 0$$

adódik, vagyis az a_{ij} -kre kapjuk, hogy

$$a_{20} = -h_{20},$$

$$a_{11} = -h_{11},$$

$$a_{02} = -h_{02},$$

$$\frac{a_{30}}{6} = \frac{h_{20}^2}{2} + \frac{h_{11}\bar{h}_{02}}{2},$$

$$\frac{a_{21}}{2} = \frac{3h_{11}h_{20}}{2} + h_{11}\bar{h}_{11} + \frac{h_{02}\bar{h}_{02}}{2},$$

$$\frac{a_{12}}{2} = \frac{h_{02}h_{20}}{2} + \frac{h_{11}\bar{h}_{20}}{2} + h_{11}^2 + \bar{h}_{11}h_{02},$$

$$\frac{a_{03}}{6} = \frac{h_{11}h_{02}}{2} + \frac{h_{02}\bar{h}_{20}}{2}.$$

Az inverz transzformáció:

$$\begin{aligned}
t^{-1}(z) = & z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + \left[\frac{h_{20}^2}{2} + \frac{h_{11}\bar{h}_{02}}{2}\right]z^3 \\
& + \left[\frac{3h_{11}h_{20}}{2} + h_{11}\bar{h}_{11} + \frac{h_{02}\bar{h}_{02}}{2}\right]z^2\bar{z} + \left[\frac{h_{02}h_{20}}{2} + \frac{h_{11}\bar{h}_{20}}{2} + h_{11}^2 + \bar{h}_{11}h_{02}\right]z\bar{z}^2 \\
& + \left[\frac{h_{11}h_{02}}{2} + \frac{h_{02}\bar{h}_{20}}{2}\right]\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2.3. Az $(f \circ t)$ meghatározása

Világos, hogy

$$\begin{aligned}
(f \circ t)(w) = f(t(w)) = & \mu t(w) + \frac{\rho_{20}}{2}t(w)^2 + \rho_{11}t(w)\bar{t}(w) + \frac{\rho_{02}}{2}\bar{t}(w)^2 \\
& + \frac{\rho_{30}}{6}t(w)^3 + \frac{\rho_{21}}{2}t(w)^2\bar{t}(w) + \frac{\rho_{12}}{2}t(w)\bar{t}(w)^2 + \frac{\rho_{03}}{6}\bar{t}(w)^3 + \mathcal{O}(|t(w)|^4),
\end{aligned}$$

ahol

$$\mu t(w) = \mu \left[w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \right],$$

$$\frac{\rho_{20}}{2}t(w)^2 = \frac{\rho_{20}}{2} \left[w^2 + h_{20}w^3 + 2h_{11}w^2\bar{w} + h_{02}w\bar{w}^2 \right] + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\rho_{11}t(w)\bar{t}(w) = \rho_{11} \left[w\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}w\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}w^2\bar{w} + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^3 + \frac{h_{20}}{2}w^2\bar{w} + h_{11}w\bar{w}^2 + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^3 \right] + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{\rho_{02}}{2}\bar{t}(w)^2 = \frac{\rho_{02}}{2} \left[\bar{w}^2 + \bar{h}_{20}\bar{w}^3 + 2\bar{h}_{11}w\bar{w}^2 + \bar{h}_{02}w^2\bar{w} \right] + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{\rho_{30}}{6}t(w)^3 = \frac{\rho_{30}}{6}w^3 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{\rho_{21}}{2}t(w)^2\bar{t}(w) = \frac{\rho_{21}}{2}w^2\bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{\rho_{12}}{2}t(w)\bar{t}(w)^2 = \frac{\rho_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

$$\frac{\rho_{03}}{6}\bar{t}(w)^3 = \frac{\rho_{03}}{6}\bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4).$$

Összegyűjtve a tagokat w és \bar{w} hatványai szerint, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (f \circ t)(w) = f(t(w)) &= \mu w + \left[\frac{\mu h_{20}}{2} + \frac{\rho_{20}}{2}\right]w^2 + [\mu h_{11} + \rho_{11}]w\bar{w} + \left[\frac{\mu h_{02}}{2} + \frac{\rho_{02}}{2}\right]\bar{w}^2 \\ &+ \left[\frac{\rho_{20}h_{20}}{2} + \frac{\rho_{11}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{\rho_{30}}{6}\right]w^3 + \left[\rho_{20}h_{11} + \rho_{11}\bar{h}_{11} + \frac{\rho_{11}h_{20}}{2} + \frac{\rho_{21}}{2} + \frac{\rho_{02}\bar{h}_{02}}{2}\right]w^2\bar{w} \\ &+ \left[\frac{\rho_{20}h_{02}}{2} + \frac{\rho_{11}\bar{h}_{20}}{2} + \rho_{11}h_{11} + \frac{\rho_{12}}{2} + \rho_{02}\bar{h}_{11}\right]w\bar{w}^2 + \left[\frac{\rho_{11}h_{02}}{2} + \frac{\rho_{02}\bar{h}_{20}}{2} + \frac{\rho_{03}}{6}\right]\bar{w}^3 \\ &+ \mathcal{O}(|t(w)|^4). \end{aligned}$$

7.2.4. A $(t^{-1} \circ f \circ t)$ kiszámítása a másodrendű tagokig

Mivel $z = (f \circ t)(w)$, (7.2) alapján könnyen megkapjuk az együtthatókat a másodrendű tagokig. A w csak z -ben, w^2 z -ben és z^2 -ben, $w\bar{w}$ z -ben és $z\bar{z}$ -ben, \bar{w}^2 pedig z -ban és \bar{z}^2 -ban fordul elő, így:

$$[w] = \mu,$$

$$[w^2] = -\frac{h_{20}}{2}\mu^2 + \mu\frac{h_{20}}{2} + \frac{\rho_{20}}{2},$$

$$[w\bar{w}] = \mu h_{11} + \rho_{11} - h_{11}\mu\bar{\mu},$$

$$[\bar{w}^2] = \mu\frac{h_{02}}{2} + \frac{\rho_{02}}{2} - \frac{h_{02}}{2}\bar{\mu}^2.$$

7.2.5. A h_{ij} együtthatók megválasztása

Ahhoz, hogy kinullázzuk a másodrendű tagokat, legyen

$$h_{20} = \frac{\rho_{20}}{\mu^2 - \mu},$$

$$h_{11} = \frac{\rho_{11}}{\mu\bar{\mu} - \mu},$$

$$h_{02} = \frac{\rho_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu}.$$

Ha $\mu^3 \neq 1$, akkor ez megtehető, a nevezők nem lesznek zérók a kritikus paraméterértékre, ezért annak egy környezetében sem. Könnyen látható, hogy így a másodrendű tagok együtthatói éppen kiesnek. Ezzel a választással az alábbi alakra hoztuk a leképezést:

$$\hat{f}(w) := (t^{-1} \circ f \circ t)(w) = \mu w + \frac{g_{30}}{6} w^3 + \frac{g_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{g_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4)$$

7.2.6. Harmadrendű tagok kiiktatása

Tekintsük a

$$\hat{t}(w) = u + \frac{\hat{h}_{30}}{6} u^3 + \frac{\hat{h}_{21}}{2} u^2 \bar{u} + \frac{\hat{h}_{12}}{2} u \bar{u}^2 + \frac{\hat{h}_{03}}{6} \bar{u}^3$$

transzformációt, ennek inverze

$$\hat{t}^{-1}(u) = w - \frac{\hat{h}_{30}}{6} w^3 - \frac{\hat{h}_{21}}{2} w^2 \bar{w} - \frac{\hat{h}_{12}}{2} w \bar{w}^2 - \frac{\hat{h}_{03}}{6} \bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4).$$

Az új transzformált leképezés így az

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u) &= (\hat{t}^{-1} \circ \hat{f} \circ \hat{t})(u) = \mu u + \frac{1}{6} [g_{30} + (\mu - \mu^3) \hat{h}_{30}] u^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{21} + (\mu - \mu^2 \bar{\mu}) \hat{h}_{21}] u^2 \bar{u} + \frac{1}{2} [g_{12} + (\mu - \mu \bar{\mu}^2) \hat{h}_{12}] u \bar{u}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} [g_{03} + (\mu - \bar{\mu}^3) \hat{h}_{03}] \bar{u}^3 + \mathcal{O}(|u|^4) \end{aligned}$$

alakot ölti. Az együtthatók kinullázására megpróbálhatjuk a

$$\hat{h}_{30} = \frac{g_{30}}{\mu^3 - \mu},$$

$$\hat{h}_{12} = \frac{g_{12}}{\bar{\mu}^2 \mu - \mu},$$

$$\hat{h}_{21} = \frac{g_{21}}{\mu - \mu^2 \bar{\mu}},$$

$$\hat{h}_{03} = \frac{g_{03}}{\bar{\mu}^3 - \mu},$$

együtthetőség választást. Ez \hat{h}_{30} és \hat{h}_{12} esetében rendben is van, viszont ha $|\mu| = 1$, akkor $\mu - \mu^2\bar{\mu} = \mu(1 - |\mu|^2) = 0$ és $\bar{\mu}^3 - \mu = \bar{\mu}^3(1 - \mu^4) = 0$, amint $\mu^4 = 1$. A rezonáns esetben g_{21} -től és g_{30} -tól nem tudunk így megszabadulni, ezek megmaradnak a transzformált leképezésben is. Válasszuk meg tehát \hat{h}_{30} -t és \hat{h}_{12} -t, mint fent, valamint legyen $\hat{h}_{21} = \hat{h}_{03} = 0$, így a transzformáció simán függ a paramétertől. Igaz, hogy $u\bar{u}^2$ és \bar{u}^3 együtthetőségeit nem lehet kiejteni, viszont azok a második transzformációnk után ugyanazok maradnak, a transzformált leképezésünk tehát így néz ki:

$$\tilde{f}(u) = \mu u + \frac{1}{2}g_{21}u\bar{u}^2 + \frac{1}{6}g_{03}\bar{u}^3 + \mathcal{O}(|u|^4)$$

7.2.7. A megmaradt harmadrendű tagok

Nincs más hátra, mint kiszámolni a megmaradt harmadrendű tagok együtthetőségeit, $c_1 = \frac{g_{21}}{2}$ -t és $c_2 = \frac{g_{03}}{6}$ -t. Itt g_{21} éppen ugyanaz lesz, mint a nemrezonáns esetben ([Kuz98]), tehát

$$c_1 = \frac{\rho_{20}\rho_{11}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{\rho_{11}\bar{\rho}_{11}}{1 - \bar{\mu}} + \frac{\rho_{02}\bar{\rho}_{02}}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{\rho_{21}}{2}$$

A c_2 együtthetőséget 7.2.4. alapján határozhatjuk meg, mivel \bar{w}^3 csak $z, z\bar{z}, \bar{z}^2, \bar{z}^3$ -ban fordul elő, ezeket összegyűjtve c_2 -re a

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{11}h_{02}}{2} + \frac{\rho_{02}\bar{h}_{20}}{2} + \frac{\rho_{03}}{6} + (-h_{11})\left(\mu\frac{h_{02}}{2} + \frac{\rho_{02}}{2}\right)\bar{\mu} \\ & + \left(-\frac{h_{02}}{2}\right)2\bar{\mu}\frac{\overline{\mu h_{20} + \rho_{20}}}{2} + \frac{h_{11}h_{02} + h_{02}\bar{h}_{20}}{2}\bar{\mu}^3 \end{aligned}$$

kifejezést kapjuk. Most térjünk át a kritikus esetre, amikor $\mu = i$, vagyis $\bar{\mu} = -i$ és $\bar{\mu}^3 = i$. Ekkor

$$h_{20} = \frac{\rho_{20}}{\mu^2 - \mu} = \frac{\rho_{20}}{i^2 - i} = \frac{-\rho_{20}}{1 + i} = \rho_{20}\frac{i - 1}{2},$$

$$h_{11} = \frac{\rho_{11}}{\mu\bar{\mu} - \mu} = \frac{\rho_{11}}{1 - i} = \rho_{11}\frac{i + 1}{2},$$

$$h_{02} = \frac{\rho_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu} = \rho_{02}\frac{i - 1}{2}.$$

Mindebből az következik, hogy

$$c_2 = P\rho_{11}\rho_{02} + Q\rho_{02}\bar{\rho}_{20} + \frac{\rho_{03}}{6},$$

ahol

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{i-1}{2} - \frac{i+1}{2} \left(\frac{i}{2} \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2} \right) (-i) + (-i)^3 \frac{1}{2} \frac{i+1}{2} \frac{i-1}{2} \\ &= \frac{i}{4} - \frac{1}{4} + \frac{i-1}{2} \frac{i}{2} \frac{i-1}{2} + \frac{i-1}{4} - \frac{i}{4} = \frac{i-1}{4} \end{aligned} \quad (7.3)$$

és

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{i}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (-i-1) \left(\frac{-i+1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{i}{8} (i+1)(i-1) \\ &= -\frac{i}{4} - \frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{i}{4} = \frac{-i-1}{4}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ezzel a rezonáns normálforma tételben a c_2 -re vonatkozó formula helyességét beláttuk.

□

8. BIFURKÁCIÓ REZONANCIA ESETÉN

8.1. A rezonáns egyenlet

A fejezet célja, hogy a nemrezonáns esethez hasonlóan a rezonáns esetben is elvégezzük a differenciálegyenlet bifurkációanalízisét. Tekintsük a

$$\dot{x}(t) = \gamma f(t, x(t-1)) \quad (8.1)$$

egyenletet, ahol γ valós paraméter, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy C^4 -sima függvény, amelyre

$$f(t+1, \xi) = f(t, \xi)$$

és

$$f(t, 0) = 0$$

teljesül minden $t, \xi \in \mathbb{R}$ esetén. Ez ugyanaz, mint a (4.1) egyenlet $a(t) \equiv 0$ esetén. Ilyen típusú egyenletek is természetes módon előfordulnak alkalmazásokban, amikor nincs azonnali visszacsatolás. Használjuk a korábbi jelöléseinket, vagyis F a periódus-leképezés, U pedig a monodrómia operátor. A lineáris variációs egyenlet alakja

$$\dot{y}(t) = \gamma f_\xi(t, 0)y(t-1), \quad (8.2)$$

ahol $y^\psi|_{[-1,0]} \equiv \psi$. A (4.1) egyenletre kapott számolások jó része most is érvényes lesz, viszont (8.1) kritikus sajátértékei mindig i és $-i$, vagyis 1:4 erős rezonancia lép fel és a bifurkációs tételeink nem érvényesek. Erős rezonancia esetén általában nem várható el az invariáns görbe megjelenése, ezt számos példa mutatja ([Arn88], [AAIS99]). Wan ([Wan78]) feltételt adott az invariáns görbe megjelenésére, tőle függetlenül hasonló eredményre jutott Lemaire is ([LB78]). Kissé leegyszerűsítve arról van szó, hogy ha nem bifurkál 4-periodikus pont, akkor az invariáns görbe megjelenik. Wan és Lemaire tételét is kiterjesztjük a végtelen dimenziós esetre a spektrális projekciónk és a centrális sokaság redukciónk segítségével.

8.2. A rezonáns egyenlet, mint speciális eset

Az alábbiakban összeszedjük azokat az eredményeket, amelyeket a nemrezonáns eset vizsgálatából megkaphatunk egyszerűen $a(t) \equiv 0$ -t választva. A formulák sok esetben így még rövidebbek lesznek, hogy nincs azonnali visszacsatolás. Az $y(t) = p(t)e^{\lambda t}$, $p(t+1) = p(t)$ Floquet megoldást behelyettesítve (8.2)-be látható, hogy a Floquet együtthatók pontosan a

$$h(\lambda) = \lambda - \gamma\beta e^{-\lambda}, \quad (8.3)$$

karakterisztikus egyenlet gyökei, ahol

$$\beta = \int_{-1}^0 f_{\xi}(t, 0) dt.$$

Feltesszük, hogy $\beta \neq 0$. Egy egyszeres sajátértékhez tartozó sajátfüggvény

$$\chi_{\mu}(t) : [-1, 0] \ni t \mapsto e^{\gamma e^{-\lambda} \int_{-1}^t f_{\xi}(s, 0) ds} \in \mathbb{C}$$

alakú. A korábbiakhoz hasonlóan felhasználjuk, hogy a Floquet együtthatók egybeesnek

$$\Delta(z) = z - e^{\frac{\gamma\beta}{z}}$$

gyökeivel, ráadásul ugyanazzal a multiplicitással ([HVL93]). Az egyszerűbb jelölések kedvéért legyen $b(t) = \gamma f_{\xi}(t, 0)$ és $B(t) = \int_{-1}^t b(s) ds$. Ezzel a jelöléssel a linearizált egyenlet

$$\dot{y}(t) = b(t)y(t-1)$$

alakú, ahol $\beta = \frac{1}{\gamma} \int_{-1}^0 b(t) dt$. A konstansvariációs formulából levezethető a periódus-leképezés és a monodrómia operátor alábbi reprezentációja:

$$F(\phi)(t) = \phi(0) + \int_{-1}^t \gamma f(s, \phi(s)) ds, \quad t \in [-1, 0], \quad (8.4)$$

$$U(\phi)(t) = \phi(0) + \int_{-1}^t b(s)\phi(s) ds, \quad t \in [-1, 0]. \quad (8.5)$$

Szükségünk lesz a $V = D^2F(0)$ és $W = D^3F(0)$ magasabb rendű deriváltakra is.

$$V(\phi_1, \phi_2)(t) = \int_{-1}^t \gamma f_{\xi\xi}(s, 0) \phi_1(s) \phi_2(s) ds, \quad t \in [-1, 0],$$

és

$$W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(t) = \int_{-1}^t \gamma f_{\xi\xi\xi}(s, 0) \phi_1(s) \phi_2(s) \phi_3(s) ds, \quad t \in [-1, 0].$$

A következő lemma az 5.3.1. Lemma speciális esete $a(t) \equiv 0$ -val.

8.2.1. Lemma. *A monodrómia-operátor rezolvense az alábbi formulával fejezhető ki:*

$$\begin{aligned} (zI - U)^{-1}(\psi)(t) = & e^{\int_{-1}^t \frac{b(u)}{z} du} \left(\left(\frac{1}{z} \psi(0) + e^{\int_{-1}^0 \frac{b(u)}{z} du} \int_{-1}^0 \frac{1}{z^2} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} b(s) \psi(s) ds \right) \right. \\ & \cdot (z - e^{\int_{-1}^0 \frac{b(u)}{z} du})^{-1} + \frac{1}{z} e^{-\int_{-1}^t \frac{b(u)}{z} du} \psi(t) \\ & \left. + \int_{-1}^t \frac{1}{z^2} e^{-\int_{-1}^s \frac{b(u)}{z} du} b(s) \psi(s) ds \right), \quad t \in [-1, 0]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Az alábbi tétel is ugyanúgy érvényes (lásd 5.3.2. Tétel).

8.2.2. Tétel. *A spektrál projekció operátorra a*

$$P_\mu(\psi) = \chi_\mu R_\mu(\psi),$$

reprezentáció teljesül, ahol

$$R_\mu(\psi) = \left(\frac{1}{\mu + \gamma\beta} \right) \left(\psi(0) + \int_{-1}^0 \frac{b(s) \psi(s)}{\chi_\mu(s)} ds \right),$$

és μ egyszerű sajátérték.

A spektrál dekompozíció és a projekciós módszer teljesen ugyanúgy megy, mint a nemrezonáns esetben. A megszorított leképezésre a következő tételt kapjuk.

8.2.3. Tétel. *A megszorított leképezés*

$$\tilde{z} = \mu z + \frac{1}{2}\rho_{20}z^2 + \rho_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\rho_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\rho_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{6}\rho_{03}\bar{z}^3 + \dots, \quad (8.7)$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} \rho_{20} &= R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu)) \\ \rho_{11} &= R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\ \rho_{02} &= R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\ \rho_{21} &= R_\mu(W(\chi_\mu, \chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + 2R_\mu(V(\chi_\mu, (1-U)^{-1}V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))) \\ &\quad + R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^2 - U)^{-1}V(\chi_\mu, \chi_\mu))) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{\mu}(1-2\mu)}{1-\mu}R_\mu(V(\chi_\mu, \chi_\mu))R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu)) \\ &\quad - \frac{2}{1-\frac{1}{\mu}}|R_\mu(V(\chi_\mu, \bar{\chi}_\mu))|^2 - \frac{\mu}{\mu^3-1}|R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))|^2 \\ \rho_{03} &= R_\mu(W(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu)) + 3R_\mu\left(V(\bar{\chi}_\mu, (\mu^{-2}I - U)^{-1}(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\right. \\ &\quad \left. - R_\mu(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\chi_\mu - R_{\bar{\mu}}(V(\bar{\chi}_\mu, \bar{\chi}_\mu))\bar{\chi}_\mu)\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Bizonyítás: A $\rho_{20}, \rho_{11}, \rho_{02}, \rho_{21}$ együtthatókat az 5. fejezetben már kiszámoltuk az (5.20) és az (5.21) formulákban. A nemrezonáns esetben ρ_{03} -ra nem volt szükség, de teljesen analóg módon megkapható, lásd az 5.4. alfejezetet. \square

8.3. A periódus leképezés bifurkációja 1:4 rezonancia esetén

A Neimark-Sacker bifurkációs tételhez két feltétel volt megfogalmazva: a transzverzálitási feltétel és a nemrezonancia feltétel, vagyis hogy $\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} |_{\gamma_j} \neq 0$ és $\mu_j^3 \neq 1, \mu_j^4 \neq 1$, ahol γ_j a kritikus paraméterérték és μ_j a hozzá tartozó kritikus Floquet együttható. A következő lemmákban megmutatjuk, hogy a transzverzálitás mindig teljesül a (8.1) egyenletre, míg $\mu_j^4 = 1$, vagyis 1:4 erős rezonanciával állunk szemben.

8.3.1. Lemma. *A (8.2) egyenlethez tartozó kritikus paraméterértékek*

$$\gamma_j = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2j\pi}{\beta}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

amelyekhez $\mu_j = e^{\lambda_j} = i$ és $\bar{\mu}_j = e^{\bar{\lambda}_j} = -i$ Floquet együtthatók tartoznak és ezek egyszerű sajátértékek. A sajátfüggvények:

$$\chi_{\pm i}(t) : [-1, 0] \ni t \mapsto e^{\mp iB(t)} \in \mathbb{C}$$

Bizonyítás: Egyszerű differenciálással lehet ellenőrizni, hogy i és $-i$ nem lehet $\Delta(z)$ kétszeres gyöke, így ha ezek Floquet együtthatók, akkor mindig egyszerű sajátértékek.

Tegyük fel, hogy $\lambda = i\theta$ egy kritikus Floquet-exponens, ekkor (8.3) valós része alapján $\cos(\theta) = 0$, azaz $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ vagy $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Figyelembe véve (4.3) képzetes részét is, mindkét lehetőség elemi kalkulációk után a lemma állításához vezet. \square

Vezessük be a $B = B(0) = \gamma\beta$ jelölést.

8.3.2. Lemma.

$$\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma_j} = \frac{\beta}{1 + \lambda(\gamma_j)} = \frac{\beta}{1 + B^2} (1 + iB)$$

Bizonyítás: A karakterisztikus egyenlet és az implicit függvénytétel alapján $\mu(\gamma) = e^{\frac{\gamma\beta}{\mu(\gamma)}}$ definiált γ_j egy környezetében. Differenciálva γ szerint

$$\mu'(\gamma) = e^{\frac{\gamma\beta}{\mu(\gamma)}} \left(\frac{\beta\mu(\gamma) - \beta\gamma\mu'(\gamma)}{\mu^2(\gamma)} \right) = \beta - \lambda(\gamma)\mu'(\gamma)$$

adódik, amiből $\mu'(\gamma) = \frac{\beta}{1 + \lambda(\gamma)}$ következik. A $\gamma = \gamma_j$ értékekre $\lambda = -i\gamma_j\beta = -iB$ és a lemmát beláttuk. \square

Mielőtt Iooست ([Ioo79]) és Want ([Wan78]) követve kimondjuk a rezonáns bifurkációs tételt, definiáljuk az $a_1 = \frac{c_1}{i}$, $a_2 = \frac{c_2}{i}$ és $d = \frac{\partial |\mu(\gamma)|}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_j}$ mennyiségeket.

8.3.3. Tétel (Rezonáns bifurkáció tétele). *Tegyük fel, hogy $g_\lambda(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ egy (5.18) alakú, a γ paramétertől simán függő leképezés, amelyre $d \neq 0$ és $\mu(\gamma_j) = i$ teljesül.*

Ha $|\operatorname{Im}(\frac{a_1}{d})| > |\frac{a_2}{d}|$, akkor pontosan egy invariáns görbe bifurkál (és 4-periodikus pont nem) a 0 egyensúlyi helyzetből, amint a γ paraméter áthalad a γ_j kritikus értéken. A $\operatorname{Re} a_1 < 0$ és $\operatorname{Re} a_1 > 0$ eseteket szuperkritikus és szubkritikus bifurkációnak nevezzük. A szuperkritikus esetben egy stabil

invariáns görbe jelenik meg $\gamma > \gamma_j$ -re, míg a szubkritikus esetben egy instabil invariáns görbe tűnik el, amint γ növekedve áthalad γ_j -n.

Ha $|\operatorname{Im}(\frac{a_1}{d})| < |\frac{a_2}{d}|$, akkor 4-periodikus pontok két családja bifurkál, invariáns görbe pedig nem. Továbbá, ha $|a_1| > |a_2|$, akkor ez a két család ugyanazon az oldalon jelenik meg és legalább az egyik instabil. Ha $|a_1| < |a_2|$, akkor a két család ellentétes oldalon jelenik meg és mindkettő instabil.

8.3.4. Lemma. A (8.1) periódus-leképezéséhez tartozó megszorított leképezés esetén

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3-i}{4}\rho_{20}\rho_{11} - \frac{1+i}{2}|\rho_{11}|^2 - \frac{1-i}{4}|\rho_{02}|^2 - \frac{i}{2}\rho_{21} \\ &= -\frac{i}{2}\left[R_i(W(\chi_i, \chi_i, \bar{\chi}_i)) + 2R_i(V(\chi_i, (1-U)^{-1}V(\chi_i, \bar{\chi}_i))) \right. \\ &\quad \left. + R_i(V(\bar{\chi}_i, (i^2-U)^{-1}V(\chi_i, \chi_i)))\right] \end{aligned} \quad (8.9)$$

és

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1+i}{4}\bar{\rho}_{20}\rho_{02} + \frac{1+i}{4}\rho_{11}\rho_{02} - \frac{i}{6}\rho_{03} \\ &= -\frac{i}{6}\left[R_i(W(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i)) + 3R_i\left(V(\bar{\chi}_i, (i^{-2}I-U)^{-1}(V(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i)))\right)\right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk a ??- és a 8.2.3. Tételt $\mu = i$ -re. Ezután a lemma könnyű számolásból adódik. □

Definiáljuk a

$$\delta = |\operatorname{Im}(a_1) - B\operatorname{Re}(a_1)| - |a_2|\sqrt{1+B^2} \quad (8.11)$$

mennyiséget, amely a paramétertől is függ. Néhány elemi átalakítás után

$$|\operatorname{Im}(\frac{a_1}{d})| > |\frac{a_2}{d}| \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(a_1(1-iB))| > |a_2(1-iB)|$$

levezethető, ami pontosan azt jelenti, hogy $\delta > 0$.

Összegezzük az eddigi lemmákat, kombináljuk a rezonáns bifurkációs tétellel és a centrális sokaság tétellel, így következményként megkapjuk a fejezet fő eredményét.

8.3.5. Tétel. *A (8.1) egyenlethez tartozó F_γ periódus-leképezések családjának a $\phi = 0$ fixpontjának a $\gamma = \gamma_j$ kritikus értékben pontosan két egyszerű Floquet együtthatója van a komplex egységkörön, mégpedig $\mu_j = i$ és $\bar{\mu}_j = -i$. Ez egy 1:4 erős rezonanciát jelent. A transzverzálitási feltétel teljesül. A 0-nak van egy környezete, amelyben egy invariáns görbe bifurkál (és 4-periodikus pont nem) az egyensúlyi helyzetből, amennyiben $\delta > 0$ fennáll. A bifurkáció irányát $\text{Re}(a_1)$ határozza meg. Ha $\delta < 0$, akkor 4-periodikus pontok két családja bifurkál a 0 egyensúlyi helyzetből, invariáns görbe pedig nem. Továbbá, ha $|a_1| > |a_2|$, akkor a két család azonos oldalon jelenik meg és legalább az egyik instabil. Ha $|a_1| < |a_2|$, akkor a két család különböző oldalon jelenik meg és mindkettő instabil.*

Látható, hogy sokféle lehetséges kimenetele van a bifurkációnak. A tételben megfogalmazott feltételek mindegyike leellenőrizhető egy adott egyenlet esetén, γ_j , a_1 , a_2 és B is explicit módon kifejezhető $f(t, \xi)$ és parciális deriváltjai segítségével, így bármelyik konkrét egyenletnél meg tudjuk mondani, milyen bifurkáció történik.

8.4. A periodikus együttható esete

A továbbiakban a

$$\dot{z}(t) = -\gamma r(t)g(z(t-1)) \quad (8.12)$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol γ egy valós paraméter, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $r(t+1) = r(t)$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, $g(\xi)$ egy C^4 -sima függvény, amelyre $g(0) = 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$g(\xi) = \xi + \frac{S}{2}\xi^2 + \frac{T}{6}\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4),$$

ahol $S, T \in \mathbb{R}$. A korábbi jelöléseinket használva

$$f(t, \xi) = -r(t)g(\xi),$$

$$f_\xi(t, 0) = -r(t),$$

$$f_{\xi\xi}(t, 0) = -Sr(t),$$

$$f_{\xi\xi\xi}(t, 0) = -Tr(t),$$

és

$$b(t) = -\gamma r(t).$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy ez az egyenlet a bifurkációs pontokban a nem-rezonáns egyenlethez hasonló tulajdonságokat mutat: a 0 egyensúlyi helyzetből mindig invariáns görbe bifurkál, sosem 4-periodikus pont. A következő egyszerű lemma hasznos lesz a számítások során.

8.4.1. Lemma. *Legyen $B(t) = \int_{-1}^t b(s)ds$. Ekkor*

$$\int_{-1}^t e^{B(s)} b(s) ds = e^{B(t)} - 1,$$

$$\int_{-1}^t e^{B(s)} b(s) B(s) ds = e^{B(t)} B(t) - e^{B(t)} + 1.$$

Bizonyítás: Az első azonosság nyilvánvaló, a másodikat az első alapján egy parciális integrálással kapjuk. \square

8.4.2. Tétel. *A (8.12) egyenlethez tartozó periódus leképezések családjára a következő teljesül: ha $T \neq \frac{11S^2}{5}$, akkor a 0 egyensúlyi helyzetből pontosan egy invariáns görbe bifurkál amint a γ paraméter áthalad a γ_j kritikus értéken. A bifurkáció szuperkritikus, ha $T < S^2\left(\frac{11B+2}{5B}\right)$ és szubkritikus, ha $T > S^2\left(\frac{11B+2}{5B}\right)$.*

Bizonyítás:

Rögzítsünk egy $\gamma = \gamma_j$ kritikus paraméterértéket. Az előző lemma szerint számolva

$$V(\chi_i, \chi_i)(t) = \int_{-1}^t S b(s) e^{-2iB(s)} ds = \frac{S}{-2i} (e^{-2iB(t)} - 1) = \frac{iS}{2} (e^{-2iB(t)} - 1),$$

$$V(\chi_i, \bar{\chi}_i)(t) = SB(t),$$

$$V(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i)(t) = \int_{-1}^t S b(s) e^{2iB(s)} ds = \frac{S}{2i} (e^{2iB(t)} - 1) = \frac{-iS}{2} (e^{2iB(t)} - 1),$$

$$W(\chi_i, \chi_i, \bar{\chi}_i) = \int_{-1}^t T b(s) e^{-iB(s)} ds = iT(e^{-iB(t)} - 1),$$

és

$$W(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i) = \int_{-1}^t T b(s) e^{3iB(s)} ds = \frac{-iT}{3}(e^{3iB(t)} - 1).$$

Vegyük észre, hogy $B = -\frac{\pi}{2} + 2j\pi$, ezért $e^{iB} = \cos B + i \sin B = -i$, és $e^{imB} = (-i)^m$ minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén. Figyelembe véve ezt a tényt

$$\begin{aligned} R_i(e^{miB(t)}) &= \left(\frac{1}{i+B} \right) \left(e^{miB} + \int_{-1}^0 b(s) e^{(m+1)iB(s)} ds \right) \\ &= \left(\frac{1}{i+B} \right) \left(e^{miB} + \frac{1}{(m+1)i} (e^{(m+1)iB} - 1) \right) \\ &= \left(\frac{1}{i+B} \right) \left((-i)^m - i \frac{(-i)^{m+1} - 1}{m+1} \right) \\ &= \frac{m(-i)^m + i}{(i+B)(m+1)} \end{aligned} \tag{8.13}$$

levezethető minden $m \neq -1$ esetén. Megjegyezzük, hogy $R_i(e^{3iB(t)}) = \frac{i}{i+B} = R_i(1)$. Ha $m = -1$, akkor éppen az $e^{-iB(t)}$ sajátfüggvényt kapjuk, és az általános esethez hasonlóan

$$R_i(e^{-iB(t)}) = R_i(\chi_i(t)) = \left(\frac{1}{i+B} \right) \left(e^{-iB} + \int_{-1}^0 b(s) ds \right) = \frac{i+B}{i+B} = 1. \tag{8.14}$$

Most a 8.6. Lemma alapján kiszámolható az alábbi rezolvens:

$$\begin{aligned}
(1-U)^{-1}V(\chi_i, \bar{\chi}_i) &= e^{B(t)} \left((SB + e^B \int_{-1}^0 e^{-B(s)} b(s) SB(s) ds) (1 - e^B)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + e^{-B(t)} SB(t) + \int_{-1}^t e^{-B(s)} b(s) SB(s) ds \right) \\
&= S e^{B(t)} \left((B + e^B (-e^{-B} B - e^{-B} + 1)) (1 - e^B)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + e^{-B(t)} B(t) - e^{-B(t)} B(t) - e^{-B(t)} + 1 \right) \\
&= S e^{B(t)} (-1 - e^{-B(t)} + 1) = -S.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

A 8.3.4. Lemma és $(i^2 - U)^{-1} = (i^{-2} - U)^{-1} = (-1 - U)^{-1}$ alapján szükségünk van az alábbi rezolvensre is:

$$\begin{aligned}
(-1-U)^{-1}(e^{miB(t)}) &= e^{-B(t)} \left((-e^{miB} + e^{-B} \int_{-1}^0 b(s) e^{(mi+1)B(s)} ds) \right. \\
&\quad \cdot (-1 - e^{-B})^{-1} - e^{(1+mi)B(t)} \\
&\quad \left. + \int_{-1}^t b(s) e^{(1+mi)B(s)} ds \right) \\
&= e^{-B(t)} \left((-e^{miB} + e^{-B} \frac{e^{(mi+1)B} - 1}{mi+1}) (-1 - e^{-B})^{-1} \right. \\
&\quad \left. - e^{(1+mi)B(t)} + \frac{e^{(mi+1)B(t)} - 1}{mi+1} \right) \\
&= e^{-B(t)} \frac{(-i)^m mi - 1}{(1 + e^{-B})(mi+1)} - e^{miB(t)} \frac{mi}{mi+1}.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Speciálisan,

$$\begin{aligned}
(-1-U)^{-1}(e^{2iB(t)} - 1) &= e^{-B(t)} \frac{(-i)^2 2i - 1}{(1 + e^{-B})(2i+1)} - e^{2iB(t)} \frac{2i}{2i+1} \\
&\quad - e^{-B(t)} \frac{-1}{1 + e^{-B}} \\
&= -e^{2iB(t)} \frac{2i}{2i+1}.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Hasonlóan megkapható

$$(-1 - U)^{-1}(e^{-2iB(t)} - 1) = e^{-2iB(t)} \frac{2i}{-2i + 1} \quad (8.18)$$

is. Most már nekiláthatunk a normálforma együtthatóinak meghatározásához, nevezetesen

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{i}{6} R_i \left[W(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i) + 3V(\bar{\chi}_i, (-1 - U)^{-1}(V(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i))) \right] \\ &= -\frac{i}{6} R_i \left[\frac{-iT}{3} (e^{3iB(t)} - 1) - \frac{3iS}{2} V(\bar{\chi}_i, (-1 - U)^{-1}(e^{2iB(t)} - 1)) \right] \\ &= -\frac{T}{18} R_i \left[(e^{3iB(t)} - 1) \right] - \frac{S}{4} R_i \left[V(\bar{\chi}_i, -e^{2iB(t)} \frac{2i}{2i + 1}) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (8.19)$$

ahol közben R_i linearitását és az

$$\frac{1}{S} R_i(V(\bar{\chi}_i, e^{2iB(t)})) = \frac{1}{T} R_i(W(\bar{\chi}_i, \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i)) = \frac{1}{3i} R_i(e^{3iB(t)} - 1) = 0$$

azonosságot használtuk. Felhasználva a (8.13) és a (8.16) formulákat,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i}{2} R_i \left[W(\chi_i, \chi_i, \bar{\chi}_i) + 2V(\chi_i, -S) + V(\bar{\chi}_i, (-1 - U)^{-1}V(\chi_i, \chi_i)) \right] \\ &= -\frac{i}{2} R_i \left[Ti(e^{-iB(t)} - 1) + 2(-i)S^2(e^{-iB(t)} - 1) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} R_i \left[V(\bar{\chi}_i, (-1 - U)^{-1} \left(\frac{iS}{2} (e^{-2iB(t)} - 1) \right)) \right] \\ &= \frac{T - 2S^2}{2} R_i[e^{-iB(t)} - 1] + \frac{S}{4} R_i \left[V(\bar{\chi}_i, e^{-2iB(t)} \frac{2i}{-2i + 1}) \right] \\ &= \frac{(T - 2S^2)B}{2(i + B)} + \frac{Si}{2 - 4i} R_i[V(\bar{\chi}_i, e^{-2iB(t)})] \\ &= \frac{(T - 2S^2)B}{2(i + B)} + \frac{Si}{2 - 4i} R_i \left[\frac{S}{-i} (e^{-iB(t)} - 1) \right] \\ &= \frac{(T - 2S^2)B}{2(i + B)} - \frac{S^2B}{(2 - 4i)(i + B)} = \frac{B}{2(i + B)} \left(T - S^2 \frac{11 + 2i}{5} \right) \end{aligned} \quad (8.20)$$

adódik. Alkalmazzuk most (8.20)-t, (8.19)-t és az $\frac{1}{i+B} = \frac{B-i}{1+B^2}$ egyenlőtlenséget (8.11)-re, ezek alapján

$$2(1+B^2)\operatorname{Re}(a_1) = TB^2 - BS^2 \frac{11B+2}{5}, \quad (8.21)$$

$$2(1+B^2)\operatorname{Im}(a_1) = -TB + BS^2 \frac{11-2B}{5}. \quad (8.22)$$

$\operatorname{Re}(a_1)$ előjele határozza meg a bifurkáció irányát, ahogy a tételben is megfogalmaztuk, ami megegyezik $T - S^2 \left(\frac{11B+2}{5B}\right)$ előjelével. A fenti két formulát behelyettesítve (8.11)-be azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2(1+B^2)} |B| \cdot \left| -T - TB^2 + \frac{S^2}{5}(11-2B+2B+11B^2) \right| \\ &= \frac{|B|}{2} \cdot \left| T - S^2 \frac{11}{5} \right|. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Mivel $B \neq 0$, a $T \neq \frac{11S^2}{5}$ feltétel biztosítja, hogy $\delta > 0$, így a tételt bebizonyítottuk. □

8.5. Wright-egyenlet periodikus együtthatóval

A nevezetes Wright-Hutchinson egyenlet (vagy másnéven késleltetett logisztikus egyenlet) klasszikus formája

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t-1)(1+y(t)).$$

A $z(t) = \ln(1+y(t))$ új változó bevezetésével Wright egyenlete a

$$\dot{z}(t) = -\alpha(e^{z(t-1)} - 1)$$

alakba transzformálódik. Wright úttörő munkássága óta ([Wri55]) dolgozók tucatjai foglalkoztak ennek az egyenletnek és különféle általánosításainak a dinamikájával. Most a Wright egyenlet periodikus együtthatós változatát tanulmányozzuk:

$$\dot{z}(t) = -\alpha r(t)(e^{z(t-1)} - 1), \quad (8.24)$$

ahol $\alpha > 0$ és $r(t)$ folytonos függvény, amelyre $r(t+1) = r(t)$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\int_{-1}^0 r(s) ds = 1$, mivel a konstansszorzót kihozhatjuk a paraméterbe. Ekkor $g(\xi) = \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)$, ami azt jelenti, hogy $S = 1$ és $T = 1$. Az alábbi tétel a 8.3.1. Lemma és a 8.4.2. Tétel közvetlen alkalmazásából adódik.

8.5.1. Tétel. *A (8.24) egyenlet periódus-leképezéseinek családja szuperkritikus bifurkáción megy át és pontosan egy invariáns görbe bifurkál a 0 egyensúlyi helyzetből, amint az α paraméter áthalad $\frac{\pi}{2}$ -n.*

Érdemes megjegyezni, hogy ha $r(t) \equiv 1$, akkor visszakapjuk az autonóm esetet. Az autonóm Wright egyenletre közismert, hogy az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ -ben egy periodikus megoldás jelenik meg az egyensúlyi helyzet körül egy szuperkritikus Hopf bifurkáció következtében. Ez konzisztens a mi tételünkkel is.

9. AZ INVARIÁNS TÓRUSZ DINAMIKÁJA ÉS EGZISZTENCIÁJA, TOVÁBBI KÉRDÉSEK

9.1. Dinamika a tóruszon

A matematika önálló ágának tekinthető a dinamikai rendszerek vizsgálata tóruszon, amely rendkívül kiterjedt irodalommal rendelkezik. Itt csak néhány alapvető eredményt említünk meg, amelyek kapcsolódnak a problémáinkhoz, és amelyekről [Wig90]-ben, [Kuz98]-ban és [Guc83]-ban is olvashatunk. A Neimark-Sacker bifurkációnál eltekintettünk a magasabb rendű tagoktól, azok nem befolyásolták az invariáns tórusz keletkezését, a tórusz dinamikájában viszont már jelentős szerepet játszanak. Legyen \mathbb{T}^2 egy invariáns tórusz. Vegyünk rajta egy merőleges metszetet, ehhez tartozik egy P Poincaré-leképezés, ami egy S^1 -gyel homeomorf zárt görbét önmagába képez, ez felel meg az invariáns görbéknek. Ezen definiálhatjuk az

$$a(\phi) = P(\phi) - \phi$$

anguláris függvényt. Ha egy p -periodikus pont a meridiánt q -szor kerüli meg egy p -hosszú ciklus alatt, akkor ezt (p, q) -ciklusnak nevezzük. A rotációs számot a

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(\phi) + a(P(\phi)) + \dots + a(P^{k-1}(\phi))}{k}$$

formulával definiáljuk. A rotációs szám jól meghatározott, a határérték létezik és független ϕ -től. P -nek pontosan akkor van (p, q) -ciklusa, ha $\rho = \frac{p}{q}$. Ha ρ irracionális és P legalább C^2 -sima, akkor topologikusan ekvivalens a $2\pi\rho$ szöghöz tartozó egyenletes forgatással. Vannak ellenpéldák, ha P csak C^1 -sima. Strukturális stabilitás akkor van, ha ρ racionális és minden periodikus pálya hiperbolikus. A phase-locking az a jelenség, amikor egy racionális rotációs számunk van és a rendszer "beragad" az adott (p, q) frekvenciára, mint ahogy ez egy úgynevezett Arnold-nyelv belsejében történhet. Képzeljünk el, hogy a komplex síkon az egységkör minden racionális pontjából egy vékony kis nyelvet indítunk kifelé. Szuperkritikus bifurkáció esetén a kritikus

sajátérték a komplex egységkört kifelé metszi, és tipikus esetben átmetszi ezeket a sűrűn elhelyezkedő nyelveket is. A jelenség prototípusa az Arnold-féle körleképezés:

$$x \mapsto x + \omega + \varepsilon \cos(2\pi x) \pmod{1},$$

amely több tankönyvben is szerepel. Az Arnold-nyelvek máig komoly kutatás tárgyát képezik, lásd pl. [BGV03]. Egy Arnold-nyelv belsejében a rotációs szám csakis az a racionális szám lehet, amelyikből az adott nyelv indul. Másrészt minden racionális pontból indul egy nyelv, amelyek kiszélesednek, így metszik is egymást. Ebből az következik, hogy ha a sajátérték a komplex síkon Arnold-nyelvek metszetébe kerül, akkor ott már nem létezhet az invariáns görbe, mivel két különböző rotációs száma lenne. A bifurkáció után tehát az általános viselkedés az, hogy a sajátérték különböző Arnold-nyelveken halad át, eközben az invariáns görbe rotációs száma állandóan változik, állandóan hosszú periodikus pályák születnek és halnak el, amíg az invariáns görbe meg nem szűnik. A dinamikai viselkedést tehát a magasabb rendű nemlinearitás mellett a kritikus sajátérték számelméleti tulajdonságai is befolyásolják.

Egy másik tipikus példája az Arnold-nyelveknek és az invariáns görbe megszűnésének az

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_{k-1}) + \epsilon$$

perturbált logisztikus leképezés ([Kuz98]). Ha kiindulunk az 1:7 gyenge rezonanciához tartozó bifurkációs pontból, egy rövid ideig az 1:7 Arnold-nyelv belsejében létezik az invariáns görbe, hamarosan azonban egy periódus-kettőző bifurkáción megy át a hét-periodikus pálya és az invariáns görbe megszűnik.

9.2. Globális bifurkáció

A globális bifurkációs tételek funkcionál-differenciálegyenletekre egészen Rabinowitz 70-es évek eleji munkájáig nyúlnak vissza ([Rab71]). Az alaptételek Nussbaum nevéhez fűződnek ([Nus75], [Nus76], [Nus78], [MPN86]). Egy alkalmazás a Wright-egyenletre szerepel [CH82]-ben, egy kissé általánosabb egyenlet pozitív monoton esetre [AB88]-ban. A lényeg nagyjából az, hogy ha a rendszer elég szabályos, akkor a lokális bifurkáció során kialakult struktúrák (pl. periodikus megoldások) nem tűnhetnek el csak úgy hirtelen, topológiai folytathatóság van és összefüggőségnek kell lennie különböző bifurkációs pontok között. Egy áttekintő monográfia a témában [KW97]. Azt néha nem nehéz belátni (pl. a diszkrét Ljapunov-funkcionál alkalmazásával), hogy a különböző pontokban bifurkált struktúrák a köztes paraméterértékeken nem

alakulhatnak át egymásba. Az irodalomban fellelhető példák szinte mind autonóm egyenletek Hopf-bifurkációja során keletkezett periodikus megoldások globális létezésével kapcsolatosak. Definiálunk egy leképezést (az adott egyenlettől függően) az $\mathbb{R} \times C$ téren, ahol C a fázistér, az \mathbb{R} -komponens pedig a paraméter. A bifurkációs pontok egy környezetéhez hozzárendelhetők ennek a leképezésnek bizonyos, a periodikus megoldásból adódó fixpontjai, ha például egy "time- t map"-et használunk, ahol t egy lehetséges periódushossz. Ez a módszer a mi esetünkre nem alkalmazható, hiszen a fázistérben nem tudunk fixpontot garantálni semmilyen time- t map-re. Legyen

$$\mathcal{G} := \{g \mid g : S^1 \mapsto C, g \in C^1\}$$

a folytonosan differenciálható zárt görbék metrikus tere a

$$\|g\|_1 = \|g\| + \|g'\|$$

normával, ahol $\|\cdot\|$ jelöli a szokásos szuprénum-normát. Definiáljuk az

$$\hat{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R} \times \mathcal{G},$$

$$\hat{F}(\gamma, g) = F_\gamma(\{g(t) \mid t \in (0, 1]\})$$

leképezést. Ha adott a C térben egy zárt görbe, aminek a pontjai $\phi \in C$ függvények, akkor az F periódus-leképezés melletti képhalmaza ezen görbe pontjainak szintén egy zárt görbét alkot a folytonosság miatt. Ily módon F egy leképezést indukál a görbék halmazán. Amennyiben egy invariáns görbéről van szó, akkor az fixpontja lesz ennek az indukált leképezésnek. Tehát egy kritikus paraméterérték környezetében (γ, g_γ) fixpontja lesz \hat{F} -nak, ahol g_γ jelöli a bifurkálódott invariáns görbét, γ pedig közel van valamelyik kritikus γ_n értékhez. Most már hasonlít a szituáció a fejezet elején vázoltakhoz. Ellenőriznünk kell még, hogy a bifurkáció során megjelenő invariáns görbe eleme-e a \mathcal{G} térnek, valamint az \hat{F} leképezés jól definiált, mindezek után ellenőrizni kell, hogy a folytathatósági, globális bifurkációs tételekben megkövetelt tulajdonságokat is teljesíti-e \hat{F} . Ez egy lehetséges eljárásnak tűnik, az előbb ismertetett Arnold-nyelvek és a másodlagos bifurkációk miatt azonban úgy néz ki, nem nagyon lehet globális létezését elvárni. Az irodalomban egyáltalán nem találtam globális eredményeket tórusz-bifurkációra.

9.3. Különböző késleltetések és periódusok

A disszertációban végig kulcsfontosságú volt, hogy egyenleteinkben a periódus megegyezett a késleltetéssel, így pontosan ki tudtuk számolni a Floquet-együtthetők. Érdekes és további kutatásra érdemes probléma, hogy mi történik az egyéb esetekben. Ha a késleltetés a periódus egész számú többszöröse, akkor triviálisan visszavezethető a probléma az általunk tárgyaltra. Ha racionális többszöröse, akkor Floquet tétele egy többdimenziós differenciálegyenletre vezet, ezt kellene megoldanunk a Floquet-együtthetők kiszámolásához. Az általános esetben azonban ez egzakt módon nem oldható meg. Hasonló probléma, amikor egy autonóm egyenletet linearizálunk egy periodikus megoldás körül. Ezt vizsgálta Walther és Skubachevski, akiknek sikerült némi információt nyerni a Floquet-együtthetőkről (van-e az egységkörön) abban az esetben, amikor a periódus három és még egyéb feltételek teljesülnek a jobboldalra ([WS03]). Waltheréknek van egy újabb munkája is, amely még nem jelent meg ([WS05]), ebben racionális approximációval próbálnak feltételt nyerni a periodikus pálya hiperbolicitására irracionális periódus esetén is. A magasabbrendű egyenleteknél, mint a Mathieu-egyenlet, ugyanez a probléma áll elő, nincs zárt formula a Floquet-együtthetőkre. A gyakorlati alkalmazások szempontjából néha elég a Floquet-együtthetők közelítő értéke, ehhez a monodrómia-operátor különböző approximációit tekintik, vagy a C tér egy véges-dimenziós közelítését szakaszonként konstans függvényekkel. A numerikus módszerek jelenleg is intenzív kutatás alatt állnak, egy friss eredmény például [BMV04]. Az az eset, amikor a késleltetés és a periódus irracionális egymáshoz, rendkívül nehéznek tűnik. Az egyetlen általam ismert próbálkozás ebben az irányban a Floquet-együtthetők meghatározására Huang és Mallet-Paret egy 1995-ös preprintje ([HMP95]), amely azonban soha nem került publikálásra. Ebben egy homotópia elvén működő módszert ismertetnek, amellyel bizonyos diofantikus feltételeket teljesítő egyenletek esetén a Floquet-együtthetők egyértelműen megfeleltethetőek egy racionális eset együtthetőinak és azoknak adott környezetében helyezkednek el.

10. SUMMARY

We study the local dynamics of the time-periodic scalar delay differential equation

$$\dot{x}(t) = \gamma(a(t)x(t) + f(t, x(t-1))),$$

in the neighborhood of critical values of the parameter. Such equations arise very naturally in several applications (neural networks, population dynamics, mechanics of high speed machines). At certain critical values of the parameter the dynamics dramatically change, for instance the equilibrium loses its stability, appearance of periodic orbits can be observed, etc. The classical theory of bifurcations was established for one- and two-dimensional dynamical systems. Using center manifold reduction and projection methods, one can generalize bifurcation theory to higher dimensional systems. For delay differential equations the usual phase space is the infinite dimensional Banach space of continuous functions on the initial interval. In the critical case, all the essential qualitative features of our dynamical system are captured by the center manifold. Unfortunately, the classical process of computing the dynamical system restricted to the center manifold using Hale bilinear forms can not be applied directly to periodic equations. Recently a normal form theory was presented for general periodic functional differential equations, but that works only for equations with autonomous linear part.

The main achievement of this dissertation is that we give a complete bifurcation analysis for a wide class of periodic delay differential equations. When the delay is the same as the period, then we are able to build up the entire theory of Neimark-Sacker bifurcations for the infinite dimensional case without any additional restrictions on the nonlinearity. The main technical difficulty is that we need explicit computation of normal forms and finite dimensional manifolds in our Banach space. To perform this, we use a functional analytic approach, the spectral projection method. All the results are explicit, we can determine the bifurcation points and the direction of bifurcations by the right hand side of our equation, this is important for specific

applications. We observe the appearance of invariant tori in an extended phase space.

The equation

$$\dot{x}(t) = \gamma f(t, x(t-1))$$

is not only a special case of the previous one, taking $a(t) \equiv 0$, but qualitatively new phenomena may appear. In this situation we have bifurcations with strong 1:4 resonance and the invariant torus does not necessarily exist. Strong resonances have an extended theory, in this dissertation we also generalize the case of 1:4 strong resonance to periodic delay equations. All our results are explicit again.

Now we delineate the applied mathematical tools. Using Floquet theory, we detect the critical values and the critical multipliers. The Floquet multipliers are the eigenvalues of the monodromy operator, which is the derivative of the period map at the equilibrium 0. By the characteristic equation we find the number of multipliers inside the unit circle. We show that the conditions of the bifurcation theorem are fulfilled. Varying the parameter, at critical values a pair of Floquet multipliers crosses the unit circle and Neimark-Sacker bifurcation of an invariant curve occurs, which can be considered as an invariant torus in an extended phase space. To compute the map restricted to the center manifold and to determine the direction of the bifurcation, we generalize the projection method. The spectral projection operator is represented by a Riesz-Dunford integral. After solving a boundary-value problem, we are able to compute the resolvent. The spectral projection is the residuum of the resolvent. Then we present the bifurcation analysis and give an explicit, checkable condition to determine the direction of the bifurcation and stability properties of the invariant curve. We apply this result to periodic versions of the most remarkable equations such as Mackey-Glass, Nicholson and Krisztin-Walther equations. We obtain several new bifurcation theorems. We give explicit results on extending the results to the resonant case. We can detect the appearance of stable and unstable 4-periodic points. We deduce the resonant Poincaré normal form. We prove that in case of periodic coefficients the strong resonance has no effect on the bifurcation. We illustrate this on the example of the celebrated Wright-equation with periodic coefficient. We pose some further questions: global existence of invariant tori, generalization to the case when the delay is not the same as the period and to higher order systems.

The dissertation is organized as follows: after a short summary in Chapter 2 one finds a brief introduction into the history of delay equations and bifurcations, and we explain how our theorems are connected to the previous papers in the literature. As a motivation, we give an overview of applications from different subjects, leading to periodic delay differential equations in Chapter 3. Chapter 4 is a general outline of the mathematical background. Chapter 5, 6 and 8 contains only new results. In Chapter 5 we compute the characteristic equation, the Floquet-multipliers, the resolvent of the monodromy operator and the spectral projection operator, then we generalize the projection method to prove the Neimark-Sacker bifurcation theorem for periodic delay equations. Applying this theorem, in Chapter 6 we prove several new bifurcation theorems for some notable specific equations. Chapter 7 is a special one, we deduce the resonant Poincaré normal form. In the literature there are contradictory results about that. The correct formula was also published, but without the detailed computations. For that reason we present the details here. In Chapter 8 the results related to the strong resonances are collected: resonant bifurcation theorem and the theorem of periodic coefficients. Some further questions are discussed in Chapter 9, such as the possible dynamics on the invariant tori and the case of different delay and period. We finish the dissertation with an English summary and a comprehensive bibliography.

The dissertation is based on the following publications of the author:

- Röst, G. , *Neimark-Sacker Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations*, *Nonlinear Analysis Theor.*, 2005, vol. 60, issue 6, pp. 1025-1044
- Röst, G. , *Some Applications of Bifurcation Formulae to the Period Map of Delay Differential Equations*, in: *Dynamical Systems and Applications : Proceedings of the ACMA International Conference 2004 - Dynamical Systems and Applications*, July 05-10, 2004, Antalya, Turkey (eds.: Akca H., Boucherif A. and Covachev V), GBS Publishers, Delhi, 2005, pp. 624-641
- Röst, G. , *Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations at Points of 1:4 Resonance*, to appear in *Functional Differential Equations*, pp. 1-17

11. Irodalomjegyzék

- [AAIS99] V. I. Arnold, V. S. Afrajmovich, Yu. S. Ilyashenko, and L. P. Shilnikov. *Bifurcation theory and catastrophe theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1986 Russian original by N. D. Kazarinoff, Reprint of the 1994 English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences [*Dynamical systems. V*, Encyclopaedia Math. Sci., 5, Springer, Berlin, 1994].
- [AB88] O. Arino and R. Benkhalti. Periodic solutions for: $\dot{x}(t) = \lambda f(x(t), x(t-1))$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 109(3-4):245–260, 1988.
- [Arn88] V. I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988. Translated from the Russian by Joseph Szűcs [József M. Szűcs].
- [Bar03] M. Bartha. Periodic solutions for differential equations with state-dependent delay and positive feedback. *Nonlinear Anal.*, 53(6):839–857, 2003.
- [BB02] E. Bueler and E. Butcher. Stability of periodic linear delay-differential equations and the Chebyshev approximation of fundamental solutions. Technical report, UAF Dept. of Mathematical Sciences Technical Report 02-03, 2002.
- [BC63] R. E. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-difference Equations*. Academic Press, New York-London, 1963.

-
- [BdRL99] R. Boucekkine, F. del Rio, and O. Licandro. Endogenous vs. exogenously driven fluctuations in vintage capital models. *Journal of Economic Theory*, 88:161–187, 1999.
- [BGV03] H. W. Broer, M. Golubitsky, and G. Vegter. The geometry of resonance tongues: a singularity theory approach. *Nonlinearity*, 16(4):1511–1538, 2003.
- [BGVF99] F. Balibrea Gallego and J. C. Valverde Fajardo. Bifurcations and nondegenerated conditions of higher degree and a new simple proof of the Hopf-Neimark-Sacker bifurcation theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 237:93–105, 1999.
- [BMB⁺04] E. A. Butcher, H. Ma, E. Bueler, V. Averina, and Z. Szabo. Stability of time-periodic delay-differential equations via Chebyshev polynomials. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 59(7):895–922, 2004.
- [BMV04] D. Breda, S. Maset, and R. Vermiglio. Computing the characteristic roots for delay differential equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 24(1):1–19, 2004.
- [Car81] J. Carr. *Applications of the Centre Manifold Theory*, volume 35 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [CF04] Y. Chen and H. Fang. Periodic solutions of a delayed periodic hematopoiesis model. *Int. J. Appl. Math.*, 16(1):55–67, 2004.
- [CH82] S.-N. Chow and J. K. Hale. *Methods of bifurcation theory*, volume 251 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Che90] Ch.-Q. Cheng. Hopf bifurcations in nonautonomous systems at points of resonance. *Sci. China Ser. A*, 33(2):206–219, 1990.
- [Cor73] C. Corduneanu. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. Academic Press, New York-London, 1973.
- [CZ01] S. S. Cheng and G. Zhang. Existence of positive periodic solutions for non-autonomous functional differential equations. *Electron. J. Differential Equations*, (59):1–8, 2001.

-
- [DvG91] O. Diekmann and S.A. van Gils. The center manifold for delay equations in the light of suns and stars. In *Singularity theory and its applications, Part II (Coventry, 1988/1989)*, volume 1463 of *Lecture Notes in Math.*, pages 122–141. Springer, Berlin, 1991.
- [DVGVLW95] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther. *Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, volume 110 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Far97] T. Faria. Normal forms for periodic retarded functional-differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 127(1):21–46, 1997.
- [Far98] T. Faria. Normal forms on centre manifolds for periodic functional-differential equations. In *International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, pages 322–326. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.
- [FHW02] T. Faria, W. Huang, and J. Wu. Smoothness of center manifolds for maps and formal adjoints for semilinear FDEs in general Banach spaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(1):173–203, 2002.
- [FVL03] M. V. S. Frasson and S. M. Verduyn Lunel. Large time behaviour of linear functional differential equations. *Integral Equations Operator Theory*, 47(1):91–121, 2003.
- [Gam85] J.-M. Gambaudo. Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing. *J. Differential Equations*, 57(2):172–199, 1985.
- [GBN80] W.S.C. Gurney, S.P. Blythe, and R.M. Nisbet. Nicholson’s blowflies revisited. *Nature*, 287:17–21, 1980.
- [GJ01] Luo G. and Xie J. Bifurcation and chaos in a system with impacts. *Phys. D*, 148:183–200, 2001.

-
- [GL91] I. Győri and G. Ladas. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [GM88] L. Glass and M. C. Mackey. *From clocks to chaos*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988. The rhythms of life.
- [GT02] I. Győri and S. I. Trofimchuk. On the existence of rapidly oscillatory solutions in the nicholson blowflies equation. *Nonlinear Anal. Theor.*, 48(7):1033–1042, 2002.
- [Guc83] P. Guckenheimer, J. and Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Hal05] J. Hale. Beginnings of modern FDE. In O. Arino, M.L. Hbid, and E. A. Dads, editors, *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Marrakech, Morocco, 9-21 September 2002*, volume 205 of *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Hat02] L. Hatvani. On the asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations by Lyapunov functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(9):3555–3571, 2002.
- [Het95] G. Hetzer. A parameter-dependent time-periodic functional reaction-diffusion equation from climate modeling: S-shapedness of the principal branch of fixed points of the time-1-map. *Differential and Integral Equations*, 8:1047–1059, 1995.
- [Het96] G. Hetzer. Global existence, uniqueness, and continuous dependence for a reaction-diffusion equation with memory. *Electron. J. Differential Equations*, (05):1–16, 1996.
- [HKW81] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, and Y.-H. Wan. *Theory and applications of Hopf bifurcation*, volume 41 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1981.

-
- [HMP95] Y.S. Huang and J. Mallet-Paret. A homotopy method in locating the floquet exponents for linear periodic differential delay equations. *preprint*, 1995.
- [Hop43] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären eines Differentialsystems. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl.*, 95(1):3–22, 1943.
- [HT83] J. R. Haddock and J. Terjéki. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional-differential equations. *J. Differential Equations*, 48(1):95–122, 1983.
- [HVL93] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [HW84a] P. Holmes and D. Whitley. Bifurcations of one- and two-dimensional maps. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 311(1515):43–102, 1984.
- [HW84b] P. Holmes and D. Whitley. Erratum: „Bifurcations of one- and two-dimensional maps”. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 312(1523):601, 1984.
- [HW85] P. Holmes and R. F. Williams. Knotted periodic orbits in suspensions of Smale’s horseshoe: torus knots and bifurcation sequences. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90(2):115–194, 1985.
- [HW04] J. K. Hale and M. Weebermann. On perturbations of delay-differential equations with periodic orbits. *J. Differential Equations*, 197(2):219–246, 2004.
- [Ins02] T. Insperger. *Stability Analysis of Periodic Delay-Differential Equations Modeling Machine Tool Chatter*. PhD thesis, Technical University of Budapest, 2002.
- [Ioo79] G. Iooss. *Bifurcation of Maps and Applications*, volume 36 of *Mathematics Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [IS02] T. Insperger and G. Stépán. Stability chart for the delayed Mathieu equation. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 458:1989–1998, 2002.

-
- [IS03] T. Insperger and G. Stépán. Stability of the damped Mathieu equation with time delay. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125:166–171, 2003.
- [Kel67] A. Kelley. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. *J. Differential Equations*, 3:546–570, 1967.
- [KM92] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, volume 85 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1992.
- [Kra94] B. Krauskopf. Bifurcation sequences at 1 : 4 resonance: an inventory. *Nonlinearity*, 7(3):1073–1091, 1994.
- [Kri05] T. Krisztin. Invariance and noninvariance of center manifolds of time- t maps with respect to the semiflow. *SIAM J. Math. Anal.*, 36(3):717–739, 2004/05.
- [Kri00] T. Krisztin. Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback. pages No. 15, 12 pp. (electronic), 2000.
- [Kri01a] T. Krisztin. The unstable set of zero and the global attractor for delayed monotone positive feedback. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, Added volume:229–240, 2001. Dynamical systems and differential equations (Kennesaw, GA, 2000).
- [Kri01b] T. Krisztin. Unstable sets of periodic orbits and the global attractor for delayed feedback. In *Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999)*, volume 29 of *Fields Inst. Commun.*, pages 267–296. Amer. Math. So., Providence, RI, 2001.
- [Kua92] Y. Kuang. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, volume 191 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1992.

-
- [Kuz98] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [KW97] W. Krawcewicz and J. Wu. *Theory of degrees with applications to bifurcations and differential equations*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.
- [KW01] T. Krisztin and H.-O. Walther. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor. *J. Dynam. Differential Equations*, 13:1–57, 2001.
- [KWW99] T. Krisztin, H.-O. Walther, and J. Wu. *Shape, Smoothness and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback*, volume 11 of *Fields Institute Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [LB78] F. Lemaire-Body. Bifurcation de Hopf pour les applications dans un cas résonnant. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(9):A727–A730, 1978.
- [LL02] C. R. Laing and A. Longtin. A two-variable delay-differential model of somatic-dendritic interactions in bursting neurons. *Bull. Math. Biol.*, 64(5):829–860, 2002.
- [LL03] C. R. Laing and A. Longtin. Periodic forcing of a model sensory neuron. *Phys. Rev. E*, 67:7, 2003.
- [LTT02] E. Liz, E. Trofimchuk, and S. Trofimchuk. Mackey-Glass type delay differential equations near the boundary of absolute stability. *J. Math. Anal. Appl.*, 275(2):747–760, 2002.
- [LW99] B. Lani-Wayda. Erratic solutions of simple delay equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(3):901–945, 1999.
- [LW05] M.Y. Li and J. Wei. Hopf bifurcation analysis for a delayed Nicholson blowflies equation. *Nonlinear Anal. Theor.*, 60(7):1351–1367, 2005.

-
- [LX] G.W. Luo and J.H. Xie. Dynamical analysis of a two-parameter family for a vibro-impact system in resonance case. *Journal of Sound and Vibration*.
- [LX02] G.W. Luo and J.H. Xie. Hopf bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two resonance cases. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 37:19–34, 2002.
- [Mak94] G. Makay. On the asymptotic stability of the solutions of functional-differential equations with infinite delay. *J. Differential Equations*, 108(1):139–151, 1994.
- [MG77] M.C. Mackey and L. Glass. Oscillation and chaos in physiological control system. *Science*, 197:287–289, 1977.
- [MM76] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, volume 19 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [MPN86] J. Mallet-Paret and R. D. Nussbaum. Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 145:33–128, 1986.
- [MPS03] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Differential systems with feedback: Time discretizations and Lyapunov functions. *J. Dynam. Differential Equations*, 15(2-3):659–698, 2003.
- [Mys49] A. D. Myshkis. General theory of differential equations with delay. *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, 4(5):99–141, 1949. English Translation: AMS (1951), 55, pp. 1-62.
- [Nei59] Ju. I. Neimark. Some cases of the dependence of periodic motions on parameters. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 129:736–739, 1959.
- [Nus75] R. D. Nussbaum. A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations. *J. Functional Analysis*, 19(4):319–338, 1975.
- [Nus76] R. D. Nussbaum. Global bifurcation of periodic solutions of some autonomous functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 55(3):699–725, 1976.

-
- [Nus78] R. D. Nussbaum. A Hopf global bifurcation theorem for retarded functional differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 238:139–164, 1978.
- [PK02] H. Péics and J. Karsai. Positive solutions of neutral delay differential equation. *Novi Sad J. Math.*, 32(2):95–108, 2002.
- [Pli64] V. A. Pliss. A reduction principle in the theory of stability of motion. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 28:1297–1324, 1964.
- [Poi79] H. Poincaré. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*. Gauthier-Villars, Paris, 1879. Thèse.
- [Poi99] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899.
- [Rab71] P. H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Functional Analysis*, 7:487–513, 1971.
- [Rua05] S. Ruan. Delay differential equations in single species dynamics. In O. Arino, M.L. Hbid, and E. A. Dads, editors, *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Marrakech, Morocco, 9-21 September 2002*, volume 205 of *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [SA02] S.H. Saker and S. Agarwal. Oscillation and global attractivity in a periodic Nicholson’s blowflies model. *Math. Comput. Modelling*, 35(7-8):719–731, 2002.
- [SA05] S. H. Saker and S. Agarwal. Oscillation and global attractivity of a periodic survival red blood cells model. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 12(3-4):429–440, 2005.
- [Sac65] R. J. Sacker. A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:717–732, 1965.

-
- [Sak03a] S. H. Saker. Oscillation and global attractivity in a periodic delay hematopoiesis model. *J. Appl. Math. Comput.*, 13(1-2):287–300, 2003.
- [Sak03b] S. H. Saker. Oscillation and global attractivity in hematopoiesis model with periodic coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 142(2-3):477–494, 2003.
- [Sho75] A. Shoshitaishvili. Bifurcations of topological type of a vector field near a singular point. In *Proceedings of Petrovski Seminar*, volume 1, pages 279–309. Moscow State University, 1975.
- [Smi95] H. L. Smith. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*, volume 41 of *Mathematical Surveys and Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [Sté89] G. Stépán. *Retarded Dynamical Systems*. Longman, London, 1989.
- [Van89] A. Vanderbauwhede. Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations. In *Dynamics reported, Vol. 2*, volume 2 of *Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl.*, pages 89–169. Wiley, Chichester, 1989.
- [VL01] S. M. Verduyn Lunel. Spectral theory for delay equations (Bordeaux, IWOTA 2000). *Oper. Theory Adv. Appl.*, 129:465–507, 2001.
- [Wal95] H.-O. Walther. The 2-dimensional attractor of $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, (544), 1995.
- [Wan78] Y.-H. Wan. Bifurcation into invariant tori at points of resonance. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 68(4):343–357, 1978.
- [WCL76] M. Ważewska-Czyżewska and A Lasota. Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells. *Mat. Stos. (3)*, 6:23–40, 1976.
- [Wig90] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.

- [Wri55] E. M. Wright. A non-linear difference-differential equation. *J. Reine Angew. Math.*, 194:66–87, 1955.
- [WS03] H.-O. Walther and A. L. Skubachevskii. On Floquet multipliers for slowly oscillating periodic solutions of nonlinear functional-differential equations. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 64:3–53, 2003.
- [WS05] H.-O. Walther and A. L. Skubachevskii. On Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations. *manuscript*, pages 1–95, 2005.
- [Wu96] J. Wu. *Theory and applications of partial functional-differential equations*, volume 119 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Wu98] J. Wu. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350:4799–4838, 1998.
- [Wu01] J. Wu. *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*, volume 6 of *de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.
- [WXX05] G. Wen, D. Xu, and J.H. Xie. Controlling Hopf bifurcations of discrete-time systems in resonance. *Chaos Solitons Fractals*, 23:1865–1877, 2005.
- [ZG90] B. G. Zhang and K. Gopalsamy. Global attractivity and oscillations in a periodic delay-logistic equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 150(1):274–280, 1990.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Krisztin Tibornak az elmúlt évek alatt nyújtott segítségét, valamint a szegedi Matematikai Doktori Iskola támogatását.