POLYGON
X. kötet 1. szám 2000.

Folytonos függvények periodikus pontjai

RÖST GERGELY

Bernát egy hatalmas hegy tövében áll. Mivel hobbija a túrázás, pontban reggel 8-kor elindul felfelé egy ösvényen. Hosszú és kimerítő gyaloglás után este 6-kor érkezik meg a hegycsúcsra. Gyönyörködik a naplementében, majd tábort ver éjszakára. Reggel pihenten ébred és pontosan 8 órakor elindul lefelé ugyanazon az útvonalon, amelyen jött. A kérdés az, van-e olyan hely ezen az úton, amelyen ugyanannyit mutat az órája, mint előző nap, amikor ott járt (természetesen feltételezzük, hogy az óra pontosan jár)? Ilyen hely létezik, ugyanis képzeljük el, hogy két Bernát van: az egyik a hegy tetejéről, a másik az aljától indul el 8 órakor. Amikor a két Bernát találkozik, óraik nyilván ugyanazt az időt mutatják. A megoldás a folytonos függvények egy egyszerű tulajdonságán alapul, amelyet Bolzano tétele fogalmaz meg (a külföldi irodalomban gyakran Intermediate Value Theorem-ként emlegetik):

Bolzano tétele. Legyen f az $[a,b]$ zárt intervallumon ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) folytonos függvény , és $f(a) < y < f(b)$ vagy $f(a) > y > f(b)$. Ekkor létezik olyan x_0 hely, hogy $a < x_0 < b$ és $f(x_0) = y$.

Habár ez az egyszerű tény már 1817-ben ismert volt (B. Bolzano: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege; Prag, 1817, Ostwald's klassiker No 153), több fontos következményét csak a 20. század második felében ismerték fel. Először tekintsünk néhány egyszerű következményt, amelyekre a későbbiekben többször is szükségünk lesz.

1. Lemma. *Legyen $f: I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol I egy zárt intervallum. Ekkor tetszőleges J zárt intervallumhoz, amelyre $J \subset f(I)$ fennáll, létezik egy olyan K zárt intervallum, hogy $f(K) = J$ teljesül.*

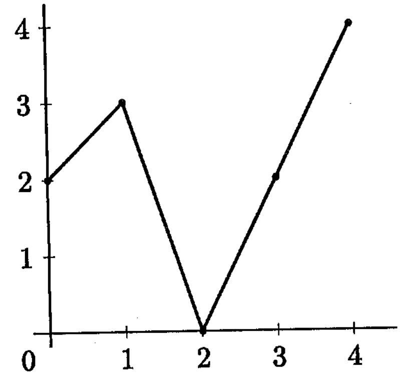
Bizonyítás. Legyen $J = [f(p), f(q)]$, ahol $p, q \in I$. Ha $p < q$, akkor $r \in [p,q]$ legyen a legnagyobb szám, amelyre $f(r) = f(p)$. Legyen s a legkisebb r-nél nagyobb szám, amelyre $f(r) = f(q)$. (Ilyen r és s nyilván létezik.) Ekkor, ha $K = [r, s]$, akkor $f(K) = J$. Hasonlóan $p > q$ esetén.

□

2. Lemma. *Legyen $f: I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol I zárt és $I \subset f(I)$. Ekkor létezik $x_0 \in I$, amelyre $f(x_0) = x_0$.*

Bizonyítás. Mivel $I \subset f(I)$, ezért van olyan $y_1, y_2 \in I$, amelyre $y_1 \leq f(y_1)$ és $y_2 \geq f(y_2)$. Így $0 \leq f(y_1) - y_1$ és $0 \geq f(y_2) - y_2$. Most $g(y) = f(y) - y$-ra alkalmazva Bolzano tételét, adódik, hogy van olyan x_0, amelyre $g(x_0) = 0$, azaz $f(x_0) = x_0$. (Ez az x_0 benne van I-ben, hiszen y_1 és y_2 közé esik.) □

A továbbiakban folytonos függvények iteráltjaival foglalkozunk. Tekintsük például az 1. ábrán látható függvényt.



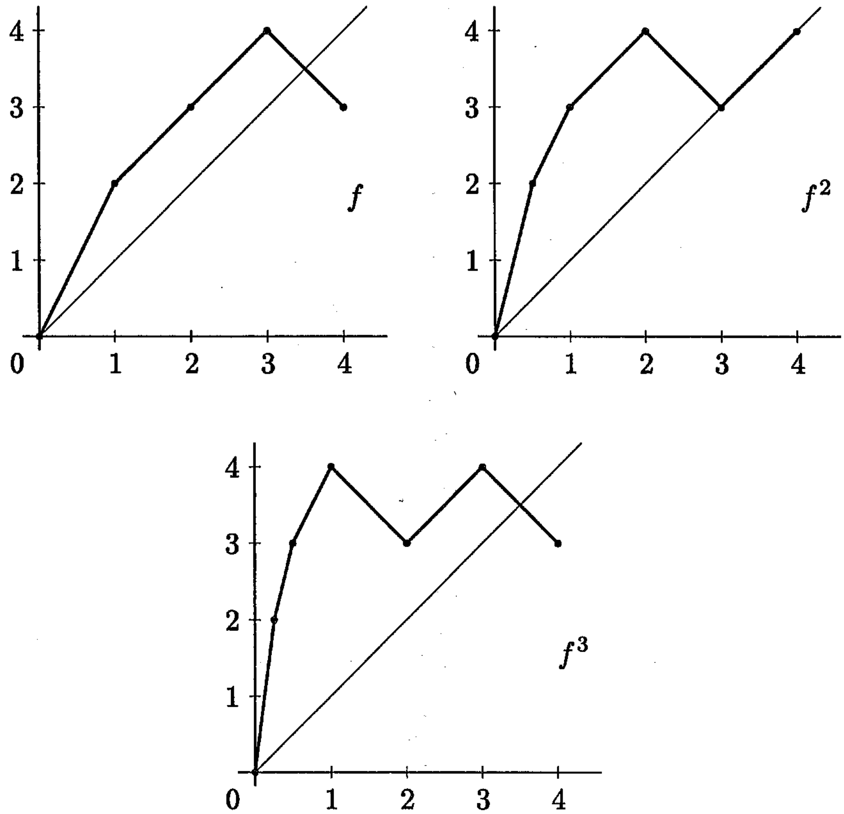
1. ábra

Az iterálás során a 0 pont átmegy a 2-be, a 2 a 0-ba, így egy kettő hosszúságú ciklust kapunk. Ha az 1-ből indulunk ki: $1 \to 3 \to 2 \to 0 \to 2 \to ...$, ez sosem tér vissza az 1-hez. Most nézzük, mi történik a 12/5-del: $12/5 \to 8/5 \to 6/5 \to 12/5$, ez egy három hosszúságú ciklus.

A fixpont fogalmának természetes általánosítása a periodikus pont. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és jelöljük az n-ik iteráltját f^n-nel: $f^1(x) = f(x)$ és $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, ha $n > 1$. Egy x számot k-periodikus pontnak nevezünk, ha $f^k(x) = x$ és $f^i(x) \neq x$, minden $0 < i < k$ esetén. A fixpont nyilván 1-periódusú pontot jelent.

Felmerül a kérdés, hogy ha egy függvénynek van k-periodikus pontja, akkor feltétlenül létezik-e l-periodikus valamely $l \neq k$-ra. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az a szám k-periodikus pontja. Tekintsük a következő sorozatot: a, $f(a)$, $f^2(a)$, ..., $f^k(a) = a$. Tegyük fel például, hogy $f(a) > a$. Létezik egy $b = f^i(a)$ pont, amelyre $f(b) < b$, különben a sorozat mindig növekedne és nem jutnánk vissza a-hoz. Azaz $f(a) - a > 0$, $f(b) - b < 0$, így Bolzano tételét alkalmazva $f(x) - x$-re adódik egy olyan y pont létezése, amelyre $f(y) = y$. Azt nyertük tehát, hogy ha létezik k-periodikus pont, akkor létezik fixpont is.

Most nézzük a 2. ábra függvényét. Ábrázoltuk a második és a harmadik iteráltat is. Látható, hogy a 0 és a 7/2 fixpont, a $[3,4]$ intervallum bármely pontja 2-periodikus pont, (kivéve a 7/2-et, mivel az fixpont), 3-periodikus pont pedig nincs.



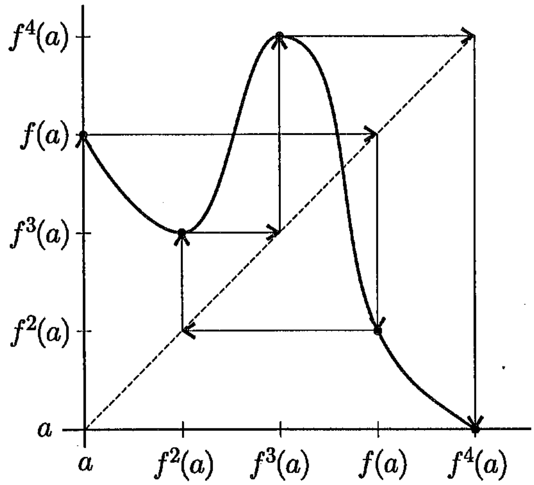
2. ábra

Li és Yorke 1975-ben egy meghökkentő tételt közölt: Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és van 3-periodikus pontja, akkor van k-periodikus pontja is, tetszőleges k esetén. Ők azt hitték, új tételt fedeztek fel, pedig ez csak egy speciális esete Sarkovszkij tételének, amely több mint egy évtizeddel korábban, 1964-ben jelent meg egy ukrán matematikai folyóiratban. Ez a tétel, amely a nyugati irodalomban sokáig ismeretlen volt (csak 1995-ben fordították le angol nyelvre), választ ad arra a kérdésre, hogy milyen k, l esetén következik k-periódusú pont létezéséből l-periódusú pont létezése.

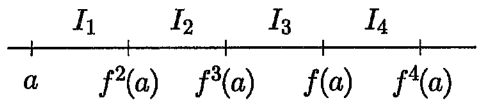
Egy adott függvény periodikus pontjainak vizsgálatához egyszerű és hatékony eszköz egy alkalmas irányított gráf definiálása. Tekintsünk egy folytonos függvényt, amelynek y k-periódusú pontja. Legyen y és iteráltjai közül a a legkisebb. Most a, illetve iteráltjai a számegyenesen $k-1$ zárt intervallumot határoznak meg. Jelöljük ezeket balról jobbra haladva $I_1, I_2, \ldots I_{k-1}$-gyel.

Nézzük például a 3. ábrán látható függvényt (ennek a 5-periódusú pontja).

E függvény 5-periódusú a pontja a 4. ábrán látható intervallumokat adja meg:

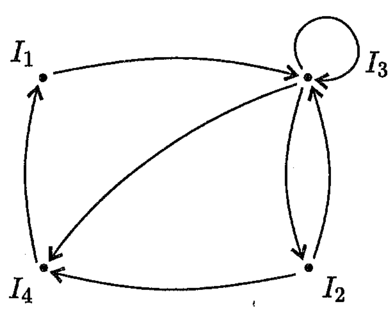


3. ábra



4. ábra

Most tekintsük az $f(I_1)$-et. I_1 végpontjai a és $f^2(a)$, ezeket f $f(a)$-ba és $f^3(a)$-ba viszi. Bolzano tétele szerint $f(I_1)$ tartalmazza az összes pontot $f^3(a)$ és $f(a)$ között, így $I_3 \subset f(I_1)$. Ugyanígy $(I_3 \cup I_4) \subset f(I_2)$, $(I_2 \cup I_3 \cup I_4) \subset f(I_3)$, valamint $I_1 \subset f(I_4)$. Ez alapján már definiálhatunk egy irányított gráfot. Legyenek a gráf csúcsai $I_1, I_2, ..., I_{k-1}$ és vezessen irányított él I_i-ből I_j-be, ha $I_j \subset f(I_i)$. Hasonló módon zárt intervallumok tetszőleges rendszeréhez megadható egy irányított gráf. A 3. ábra példájához az 5. ábrán látható gráf tartozik.



5. ábra

Ezek után kimondhatjuk az alábbi tételt:

1.a) Tétel. *Legyen az f folytonos függvénynek y k-periódusú pontja. Ha egy intervallumokból álló irányított gráfban van ismétlés nélküli kör, azaz adva van nem ismétlődő sorozata az $I^0, I^1, ..., I^l = I^0$ zárt intervallumoknak (a felső index csupán a sorozatban elfoglalt helyet jelzi), amelyekre $f(I^i) \supset I^{i+1}$, akkor van olyan $x \in I^0$ pont, amelyre $f^l(x) = x$ és $f^i(x) \in I^i$ $(i < l)$, teljesül. Az ismétlés nelküli esetünkben azt jelenti, hogy egy csúcs vagy egy él többször is előfordulhat, de maga az l-hosszú kör nem lehet egy rövidebb kör néhányszori megismétlése. Például az 5. ábra gráfján az $I_1I_3I_2I_3I_3I_3I_2I_4I_1$ ismétlés nélküli, de az $I_1I_3I_4I_1I_3I_4I_1I_3I_4$ kör nem az.*

Bizonyítás. Tekintsük a 6. ábrán látható diagramot.

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\ & & \cup \\ & & I^1 \end{array}$$

6. ábra

(A $\rightarrow$ a továbbiakban mindig ráképezést jelent.)

Az 1. Lemma alapján létezik egy J_1 zárt intervallum, amellyel a 6. ábra diagramja kiegészíthető a 7. ábra szerint.

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\ \cup & & \cup \\ J_1 & \xrightarrow{f} & I^1 \end{array}$$

7. ábra

Az 1. Lemma ismételt alkalmazásával ($f^2, f^3, ...$-ra) a 8. ábrán látható diagramot nyerjük:

A 8. ábráról leolvasható, hogy $J_l \subset I^0 = f^l(J_l)$. Most a 2. lemmát alkalmazva f^l-re adódik, hogy van olyan $x \in J_l$ pont, amire $f^l(x) = x$. A diagramból látható, hogy $x \in J_h$, azaz $f^h(x) \in I^h$, tetszőleges h esetén.

1.b) Tétel. *Nevezzünk egy I intervallumot köztesnek, ha y iteráltjai közül pontosan kettőt tartalmaz, amelyek az intervallum végpontjai. Ha az* a) *rész feltételei teljesülnek, továbbá a szóban forgó intervallumok köztesek, akkor az x l-periodikus pontja f-nek.*

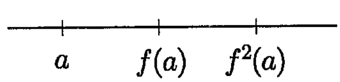
Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy x j-periodikus pont $(j < l)$. Ekkor j nyilván osztója l-nek. Mivel az intervallumok sorozata nem ismétlődő, kell lennie olyan α számnak, amelyre $I^\alpha \neq I^{\alpha+j}$. Kaptuk, hogy $I^\alpha \ni f^\alpha(x) = f^{\alpha+j}(x) \in I^{\alpha+j}$.

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "f"] & f(I^0) & & & & \\
\cup & \cup & & & & \\
J_1 \arrow[r, "f"] & I^1 \arrow[r, "f"] & f(I^1) & & & \\
\cup & & \cup & & & \\
J_2 \arrow[rr, "f^2"] & & I^2 \arrow[r, "f"] & f(I^2) & & \\
\cup & & & \cup & & \\
 & & & I^3 & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
J_{l-1} \arrow[rrrr, "f^{l-1}"] & & & & I^{l-1} \arrow[r, "f"] & f(I^{l-1}) \\
\cup & & & & & \cup \\
J_l \arrow[rrrrr, "f^l"] & & & & & I^l = I^0
\end{tikzcd}$$

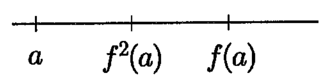
8. ábra

Viszont két különböző köztes intervallum metszete csak végpont lehet, vagyis valamelyik $f^{\beta}(y)$, így $j = k$, azaz x és y ugyanazt a pályát futja be. Legyen x és iteráltjai közül $f^p(x)$ a legkisebb, $f^q(x)$ pedig a második legkisebb ($p, q < j$ feltehető) . Minthogy $f^p(x) \in I^p$, $I^p = [f^p(x), f^q(x)]$, hiszen $f^p(x)$ csak ennek az intervallumnak eleme és I^p köztes intervallum. Mivel $f^p(x) = f^{p+j}(x) \in I^{p+j}$, az adódik, hogy $I^{p+j} = I^p$. Ugyanígy $I^{p+2j} = I^p$, és így tovább. Most tekintsük I^{p+1}-et. Ennek egyik végpontja $f^{p+1}(x)$, a másik végpont ettől balra vagy jobbra esik aszerint, hogy $f^{q+1}(x) < f^{p+1}(x)$ vagy $f^{q+1}(x) > f^{p+1}(x)$ áll fenn (hiszen $f^{p+1}(x) \in I^{p+1}$, és $I^{p+1} \subset f(I^p)$). Mármost $f^{p+sj}(x) = f^p(x)$, $f^{q+sj}(x) = f^q(x)$ és $I^{p+sj} = I^p$, valamint $f^{p+1}(x) = f^{p+1+sj}(x) \in I^{p+1+sj}$ miatt nyerjük, hogy $I^{p+1+sj} = I^{p+1}$. Ugyanez megismételhető I^{p+2}-re, majd I^{p+3}-ra, és így tovább, adódik, hogy minden t-re $I^t = I^{t+j}$, ami ellentmond annak, hogy az intervallumok sorozata nem ismétlődő. Ezzel az 1. Tételt beláttuk. □

Ezek után a 3. ábrán látható f függvény gráfjáról (5. ábra) könnyen leolvashatjuk, hogy a függvénynek bármely k esetén van k periodikus pontja. Könnyen látható Li és Yorke tétele is, ugyanis $k = 3$ esetén az iteráltak kétféle sorrendet határozhatnak meg.



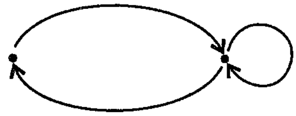
vagy



9. ábra

Mindkét sorrend ugyanazt, a 10. ábrán látható gráfot adja.

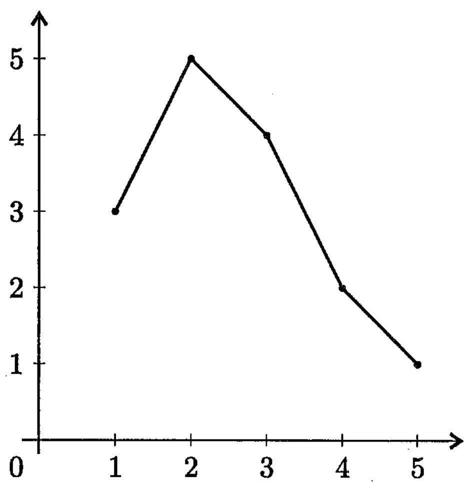
Látszik, hogy tetszőleges hosszúságú ismétlődés nélküli kört találhatunk, azaz az előző tétel értelmében a 3-periodikus pont létezése garantálja a k-periodikus



10. ábra

pont létezését tetszőleges k esetén. A $k = 5$ választással az összes lehetséges sorrendet végignézve 12 különböző gráf adódik, amelyek vizsgálatából kiderül, hogy 5-periodikus pont létezéséből következik k-periodikus pont létezése tetszőleges $k \neq 3$ esetén. Azt, hogy 3-periodikus pont nem mindig létezik, ez az egyszerű példa is mutatja:

Legyen $F : [1,5] \to [1,5], F(1) = 3, F(2) = 5, F(3) = 4, F(4) = 2, F(5) = 1$ és minden $[n, n+1]$ intervallumon ($n = 1,2,3,4$) legyen F lineáris (11.ábra).



11. ábra

Látható, hogy F-nek egyetlen fixpontja van, $x = 10/3$. Másrészt az $1, 2, 3, 4, 5$ mind 5-periódikus pont.

$F^3([1,2]) = F^2([3,5]) = F([1,4]) = [2,5]$
$F^3([2,3]) = F^2([4,5]) = F([1,2]) = [3,5]$
$F^3([4,5]) = F^2([1,2]) = F([3,5]) = [1,4]$

Ezért $F^3(x) = x$-nek csak a $[3,4]$-ben lehet megoldása. Tegyük fel, hogy $F^3(p) = p$. Ekkor $p \in [3,4]$, így $F(p) \in [2,4]$. Ha $F(p) \in [2,3]$ lenne, akkor $F^3(p) \in [1,2]$ következne, ez nem lehet. Tehát $F(p) \in [3,4]$, $F^2(p) \in [2,4]$. Ha $F^2(p) \in [2,3]$ lenne, akkor $F^3(p) \in [4,5]$ állna fenn, ez sem lehet. Maradt az az eset, hogy $F^2(p) \in [3,4]$. Azt kaptuk, hogy $p, F(p), F^2(p)$ egyaránt$[3,4]$-be esik. Viszont ezen az intervallumon $F(x) = 10 - 2x$, amiből

$p = F^3(p) = F^2(10 - 2p) = F(4p - 10) = 30 - 8p$

$p = 10/3$ adódik, ez viszont fixpont is, tehát F-nek valóban nem létezik 3-periódikus pontja.

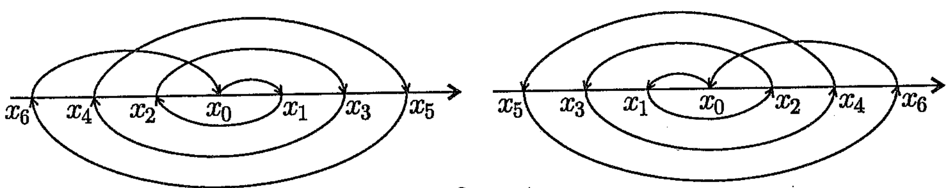
Sarkovszkij tétele előtt még egy fontos állítást kell igazolnunk, amelyhez az n-periodikus pálya fogalmára is szükségünk lesz. Legyen x_0 f-nek n-periodikus pontja. Ekkor az $\{f^k(x_0) : k = 0, 1...n-1\}$ halmazt n-periodikus pályának nevezzük.

2. Tétel. *Legyen $f : I \to I$ folytonos függvény, amelynek létezik $(2n+1)$-periodikus pályája ($\{x_k = f^k(x_0), k = 0, 1, ..., 2n\}$), de nem létezik $(2m+1)$-periodikus, ha $1 \leq m < n$. Feltehető , hogy x_0 az x_i-k közül a középső. Ekkor vagy*

1) $x_{2n} < x_{2n-2} < ... < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < ... < x_{2n-3} < x_{2n-1}$,

vagy pedig

2) $x_{2n-1} < x_{2n-3} < ... < x_1 < x_0 < x_2 < x_4 < ... < x_{2n-2} < x_{2n}$ *teljesül.*



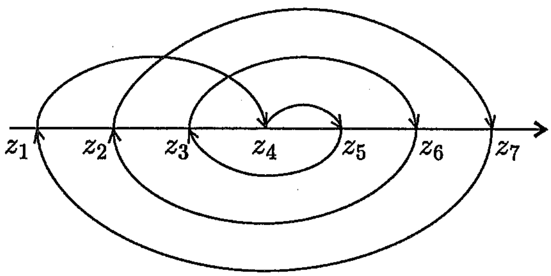
x=3 eset

12. ábra

Bizonyítás. Feltehető, hogy $n > 1$ ($n = 1$-re triviális az állítás). Jelöljük át az $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\}$ halmaz elemeit z_α-kra, hogy $z_1 < z_2 < ... < z_{2n+1}$ álljon fenn. Legyen $S_{k,l} = \{z_\alpha, k \leq \alpha \leq l\}$. Legyen továbbá $\min\{f(z) : z \in S_{k,l}\} =: z_i$, $\max\{f(z) : z \in S_{k,l}\} =: z_j$, és f^* a következő függvény: $f^*(S_{k,l}) = S_{i,j}$. Használjuk az $S_{k,l} \to S_{p,q}$ jelölést, ha $f^*(S_{k,l}) \supset S_{p,q}$ (hasonlóan, mint az irányított gráfunkban). Mivel $f(z_1) > z_1$ és $f(z_{2n+1}) < z_{2n+1}$, létezik egy legnagyobb m, amelyre $f(z_m) > z_m$. Nyilván $m \leq 2n$. Most legyen $S_1 := \{z_m, z_{m+1}\}$, $S_2 := f^*(S_1)$, $S_3 := f^*(S_2), ..., S_{i+1} := f^*(S_i)$, egészen S_{t-1}-ig, t-t később fogjuk maghatározni egy teljesen más definíció alapján. Mivel x_0 nem 2-periodikus pont, $S_1 \neq S_2, S_1 \subset S_2$ fennáll. Az S_i-k definíciója miatt teljesül $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset ... \subset S_i \subset S_{i+1}, i = 1, 2, ...t-1$, hiszen $i \geq 2$ esetén S_i bal- és jobbvégpontja is f melletti képe valamelyik S_{i-1}-beli z_α-nak. Ezenkívül $S_{i+1} \subset S_i$ csak úgy lehet, ha $S_i = \{z_1, ..., z_{2n+1}\}$, különben x_0 nem tudná befutni a teljes pályáját. Ebből látszik, hogy amíg el nem érjük az egész pályát, halmazaink mindig bővülnek legalább egy ponttal. Világos, hogy az $S_{1,m} = \{z_1, ...z_m\}$ és az $S_{m+1,2n+1} = \{z_{m+1}, ..., z_{2n+1}\}$ halmazokban különböző számú pont van, így van olyan $l \neq m$, hogy $f(z_l)$ és $f(z_{l+1})$ különböző oldalára esik $\{z_m, z_{m+1}\}$-nek, azaz $\{z_l, z_{l+1}\} \to \{z_m, z_{m+1}\}$. Legyen $S_t := \{z_l, z_{l+1}\}$, ahol t a legkisebb szám, amelyre $S_{t-1} \to \{z_l, z_{l+1}\} =: S_t$. Ilyen t van, mivel S_i szigorúan bővülő halmazok sorozata, amíg el nem éri az egész pályát, és $S_{1,2n+1} \to \{z_l, z_{l+1}\}$, hiszen $\{z_l, z_{l+1}\} \subset f^*(S_{1,2n+1}) = S_{1,2n+1}$.

Példaként nézzük meg, mit jelent mindez a 12. ábra első esetében (13. ábra).

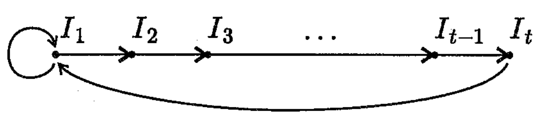
$S_1 = \{z_m, z_{m+1}\} = \{z_4, z_5\}$
$S_2 = \{z_3, z_4, z_5\}$
$S_3 = \{z_3, z_4, z_5, z_6\}$
$S_4 = \{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$
$S_5 = \{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$
$S_t = \{z_l, z_{l+1}\} = \{z_1, z_2\} = S_6$
$S_{1,m} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$
$S_{m+1,2n+1} = \{z_5, z_6, z_7\}$



13. ábra

Legyen I_i a legszűkebb zárt intervallum, amely tartalmazza S_i-t. Ekkor $I_1 \subset I_2 \subset ...I_{t-1} \not\supset I_t$, $I_1 \to I_2 \to ... \to I_t \to I_1$. Korábbi megfontolásaink alapján tudjuk, S_{t-1} legalább t pontot tartalmaz, valamint t minimalitása miatt $S_t \not\subset S_{t-1}$, ami azt jelenti, hogy S_{t-1} nem az egész pálya, vagyis $t \leq 2n$.

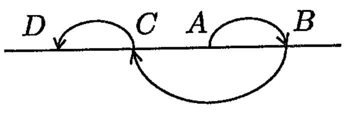
Tegyük fel, hogy $t < 2n$. Ekkor a 14. ábrán látható gráf rajzolható fel.



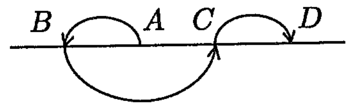
14. ábra

Gráfunkban van $2n-1$ hosszú kör (a hurokélen $2n-t-1$-szer megyünk végig), így az 1. Tétel értelmében van olyan a pont, amelyre $f^{2n-1}(a) = a$. Ezáltal a periódusa csak páratlan lehet, viszont feltettük, hogy nincs $2n+1$-nél rövidebb periódus, azaz a csak fixpont lehet. Az 1. Tétel szerint ekkor $a = f(a) = f^{2n-2}(a) \in I_1 \cap I_t$ (I_t sorrendben a $2n-2$-ik intervallum) , az intervallumok konstrukciója alapján I_1-nek és I_t-nek a metszete üres vagy határpont , az pedig nem fixpont. Ez ellentmondás, ami azt mutatja, hogy $t < 2n$ nem állhat fenn.

Azaz $t = 2n$, tehát $S_{i+1} \backslash S_i$ egyetlen pontból áll $i = 1, 2, ...2n-2$ esetén. A 2. Tétel bizonyításához most már elég azt belátni, hogy f S_i egy végpontját, mondjuk A-t a másik, B végpontba viszi, valamint az A pont a B és $f(B)$ közé



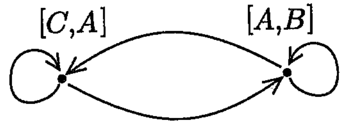
vagy



15. ábra

esik ($i = 1, 2, ..., 2n-2$). Ez $i = 1$ esetén teljesül, ha i lenne a legkisebb index, amelyre nem teljesül (15. ábra).

Ekkor a 16. ábrán látható gráf rajzolható le.



16. ábra

Ebből az 1. Tétel értelmében 3-periodikus pont létezése következik, ami ellentmond feltevésünknek. Ezzel a 2. Tételt igazoltuk. □

Tekintsük a természetes számok alábbi rendezését:

$3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec \ldots \prec 2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^3\cdot 7 \prec \ldots$
$\prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$

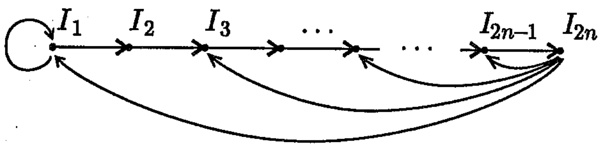
Azaz a páratlan számok nagyság szerint, majd a páratlan számok 2-szeresei, 2^2-szeresei, 2^3-szorosai, stb., végül a 2-hatványok csökkenő sorrendben. Az $1 = 2^0$ zárja a sort. Világos, hogy egyetlen számot sem hagytunk ki, és bármely két szám sorrendje egyértelmű.

Sarkovszkij tétele. *Legyen $f\colon I \to I$ folytonos függvény, amelynek van l-periodikus pontja. Ha $l \prec m$, akkor van m-periodikus pontja is.*

Bizonyítás.

1. eset. Ha van 2^m periodikus pont, akkor van 2^l- periodikus is, amennyiben $l < m$. Elegendő belátni, hogy 2^m-ből következik 2^{m-1}. Ha $m = 1$, azaz van 2- periodikus pont, akkor van fixpont is, ezt már láttuk. A továbbiakban teljes indukciót használunk. Tegyük fel, hogy $1, 2, \ldots, m$-re teljesül az állítás. Most nézzük $m+1$-re. Legyen $g = f^2$. Ha f-nek van 2^{m+1}-periódusú pontja, akkor g-nek van 2^m-periódusú. Indukciós feltevésünk szerint ekkor van 2^{m-1}-periódusú pontja is, azaz létezik olyan x_0 pont az I intervallumban, amelyre: $g^{2^{m-1}}(x_0) = x_0$ és $g^t(x_0) \neq x_o$, ha $t = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1$, azaz $f^{2^m}(x_0) = x_0$ és $f^{2t}(x_0) \neq x_0$, ha $t = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1$. Ha x_0 nem 2^m-periodikus pontja f-nek, akkor periódusa csak páros lehet (fixpont nem lehet), mondjuk $2q$. Ekkor $2q \leq 2^m - 1$, azaz $q \leq 2^{m-1} - 1$, ez viszont $x_0 = f^{2q}(x_0) = g^q(x_0)$ miatt ellentmondásra vezet. Tehát x_0 2^m-periodikus pontja f-nek, azaz az indukciós lépés megtörtént.

2. eset. Ha van $2n+1$-periódusú pont, akkor van k-periódusú is, ha $k > 2n+1$. Feltehető, hogy $2n+1$ a legrövidebb páratlan hosszú periódus (1-et leszámítva). A 2. Tétel alapján, az $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_2, x_0], \ldots, I_{2n-1} = [x_{2n-3}, x_{2n-1}]$, $I_{2n} = [x_{2n}, x_{2n-1}]$ jelöléseket használva (a másik esetnél hasonlóan) a 17. ábrán látható gráfot nyerjük.



17. ábra

Látszik, hogy ha $k > 2n+1$, akkor található k-hosszú ismétlődés nélküli kör a gráfban, így az 1.Tétel maga után vonja az állítást.

3. eset. $2n+1$-periódusú pont létezéséből következik $2k$-periódusú pont létezése, ahol k tetszőleges pozitív egész. A 2. eset miatt elég $2k \leq 2n$-et tekinteni. A 17. ábra gráfjában az $I_{2(n-2)+1} I_{2(n-2)+2} \ldots I_{2n} I_{2(n-2)+1}$ egy $2k$ hosszú kör, így az 1.Tétel értelmében van $2k$-periódusú pont.

4. eset. Legyen $m \prec n$, ahol $m = 2^k p$, $n = 2^t q$, mikoris p, q páratlanok, $p > 1$, $k \geq 1$. Ekkor m-periódusú pont léte maga után vonja n-periódusú pont létét. Feltehető, hogy $l \prec m$ esetén f-nek nincs l-periodikus pontja. A rendezés alapján két lehetőség van:

a) $t = k$, $p < q$

b) $t > k$

Legyen $g = f^{2^k}$. Ekkor f m-periódusa g p-periódusát jelenti. A 2. eset alapján ez annyit tesz, hogy g-nek van q-periodikus pontja az a) feltétel mellett, mondjuk z. Erre a z-re $f^{2^k q}(z) = z$, valamint $f^{2^k s}(z) \neq z$ teljesül $s < q$ esetén. Megmutatjuk, hogy z az f-re nézve $2^k q$-periodikus. Ha ugyanis a periódusa $r < 2^k q$ lenne, akkor r, $2^k q$-nak osztója lévén $2^v w$ alakú, ahol $v \leq k$ és $w | q$. Viszont $v < k$ esetén $r \prec m$, $k = v$ esetén pedig $f^{2^k w}(z) = z$, $w < q$ teljesülne, és ezek egyike sem lehet, tehát z valóban $2^k q$-periodikus.

Ha a b) feltétel áll fenn, a 3. eset szerint g p-periódusából $2^{t-k}q$-periódusú z pont létezése következik. Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy ez f-nek $2^t q$-periodikus pontja. Ha ugyanis a periódusa $r = 2^v w < 2^t q$ lenne, akkor $v < k$ nem lehet, mivel ekkor $r \prec m$, $k \leq v$ pedig azért nem, mert z az f^{2^k}-nak $2^{t-k}q$-periodikus pontja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

□

Sarkovszkij tételét az teszi igazán izgalmassá, hogy egy majdhogynem triviális állításból (Bolzano tétele) mennyire mélyreható következtetéseket tudunk levonni, milyen meglepő és érdekes eredményekhez juthatunk.

Irodalom

[1] Xun-Cheng Huang, *From intermediate value theorem to chaos,* Mathematics Magazine **65**(1992), 81—103.
[2] Krisztin T., *Káosz,* Polygon, II/2, 1992. december, 11—35.
[3] T. Li — J. A. Yorke, *Period three implies chaos,* Amer. Math. Monthly **82**(1997), 846—847.
[4] M. Misiurewicz, *Remarks on Sharkovsky's theorem,* Amer. Math. Mothly **104**(1997), 846—846.
[5] A. N. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continous map of a line into itself,* Ukranian Math. J., **16**(1964), 61—71.
[6] P. D. Straffin, *Periodic points of continous functions,* Mathematics Magazine, **51**(1978), 99—105.
[7] Szépfalussy P. — Tél T. (szerk.), *A káosz. Véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982.

Röst Gergely, SZTE, IV. évf. matematikus hallgató