Kombinatorikai alapok

n objektum egy **permutáció**ján egy sorbarendezésüket értjük. Ha az objektumok mind különbözőek, akkor ismétlés nélküli, különben ismétléses permutációról van szó.

Ha egy n elemű halmazból sorban egymás után kiválasztunk k darabot, akkor az n elem k-adosztályú **variáció**ját kapjuk. Ha visszatevés nélkül választjuk őket, akkor a variáció ismétlés nélküli, ha a kiválasztás visszatevéses, akkor a variáció ismétléses.

Ha egy n elemű halmazból kiválasztunk egy k elemű részhalmazt (tehát a sorrend nem számít), akkor az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli **kombináció**ját kapjuk. Ha k nem feltétlenül különböző elemet választunk ki, akkor ismétléses kombinációt kapunk.

A permutációk, variációk, kombinációk számát a következő táblázat tartalmazza (az ismétlés nélküli esetekben feltesszük, hogy $k \leq n$).

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	$\dfrac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
variáció	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
kombináció	$\dbinom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\dbinom{n+k-1}{k}$

1. Tétel (Stirling-formula)**.** $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, *azaz* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$

Az $\dbinom{n}{k}$ $0 \leq k \leq n$ számokat *binomiális együtthatók*nak nevezzük.

2. Állítás. *Ha* $0 < k < n$, *akkor* $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$

Az előző állítást és az egyszerű $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ tényt felhasználva fel tudjuk írni a binomiális együtthatókat a következő, *Pascal háromszög*nek nevezett elrendezésben, amelyben teljesül, hogy minden 1-nél nagyobb együttható a felette lévő két másik összege:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
0. & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1. & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2. & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3. & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4. & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5. & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6. & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A következő fontos tétel megmagyarázza a binomiális együttható elnevezést.

3. Tétel (binomiális tétel)**.** $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$