Valószínűségszámítás feladatok

Nagy-György Judit

2006. április 3.

1. Kombinatorikai alapok

1. Hányféleképpen állhatnak sorba egy 10 fős csoport tagjai? És körbe?
2. Hányféleképpen állhat sorba 10 nő és 16 férfi, ha a nők elöl állnak?
3. Hányféleképpen állhat sorba 10 ember úgy, hogy a két legmagasabb egymás mellé kerüljön?
4. Hányféle sorrendbe írhatók a PARALELOGRAMMA szó betűi?
5. Egy pénzérmét 10-szer feldobunk. Hányféle olyan sorrend van, amelyben 6 fej és 4 írás fordul elő?
6. Szilveszter éjfélkor egy héttagú baráti társaságban mindenki mindenkivel koccint. Hány koccintás ez összesen?
7. Ötöslottón hány különböző szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen ötös találat?
8. Hányféleképpen lehet hármas találatunk a lottón?
9. A kisfiunkat elvisszük fagyizni. Hányféleképpen kérhet 3 gombóc fagyit egy kehelybe, ha 12-féle fagyi közül választhat? És tölcsérbe?
10. Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget, és egy rekeszbe *a*) legfeljebb egy levelet teszünk, *b*) több levelet is tehetünk?
11. A feladat ugyanaz, mint az előző, csak megkülönböztetjük a leveleket.
12. Vívóedzésen 15 vívóból 6 pár vív egyidejűleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?
13. Kilenc ember csónakázni készül. Van egy négy-, egy három- és egy kétüléses csónak. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat?

2. Eseményalgebra, valószínűség

1. Milyen kapcsolatban vannak A és B események, ha

   a) $A \cap B = A$,

   b) $A \cup B = A$,

   c) $A \cup B = A \cap B$,

   d) $A \cup (\overline{A} \cap B) = B$?

2. Bizonyítsuk be, hogy

   a) $((A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = \Omega$,

   b) $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup D) = A \cap B \cap C \cap D$,

   c) $((A \cap B) \cup C) - ((A \cap C) \cup B) = C - (A \cup B)$,

   d) $(A \cup B \cup C \cup D) \setminus (A \cup B \cup C) = D \setminus (A \cup B \cup C)$

   e) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$!

3. Állapítsuk meg, milyen esetben állhatnak fenn a következő egyenlőségek!

   a) $A \cup B = \overline{A}$

   b) $A \cap B = \overline{A}$

4. Tíz pénzérmét kell megvizsgálnunk, hogy szabályosak-e vagy ferdék. Legyen A_i az az esemény, hogy a i-edik pénzérme szabályos ($i = 1, \ldots, 10$). Mit jelentenek az alábbi események?

   a) $A_1 \cup \ldots \cup A_{10}$

   b) $A_1 \cap \ldots \cap A_{10}$

   c) $\overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_{10}}$

   d) $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}$

   e) $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_{10}}$

   f) $\overline{A_1 \cap \ldots \cap A_{10}}$

   g) $A_1 \cup \overline{A_2} \cup A_3$

   h) $A_8 \cup \overline{A_9} \cap A_{10}$

   i) $A_1 \cup (A_9 \cap A_{10})$

   j) $A_1 \cap (\overline{A_9 \cap A_{10}})$

5. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Szóban megfogalmazva mit jelent C_k esemény bekövetkezése ($k = 1, \ldots, n$), ha

   a) $C_k = \bigcup_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$,

   b) $C_k = \bigcap_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (\overline{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}})$?

6. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j-vel azt az eseményt, hogy a j-edik dobás 6-os. Fejezzük ki a B_j-kkel a következő eseményeket:

   a) az ötödik dobáskor kapunk először 6-ost;

b) legalább egyszer 6-ost dobunk;

c) pontosan négyszer dobunk 6-ost;

d) az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os!

7. Két dobókockával dobunk. Milyen kapcsolatban vannak A és B események? Adjuk meg $A \cap B$-t!

   a) A: páratlan az összeg, B: dupla 6-ost dobunk

   b) A: páros az összeg, B: dupla 6-ost dobunk

   c) A: páratlan az összeg, B: legalább egy hatost dobunk

8. Egy osztály létszáma 40 fő. Matematikábó az év végi átlaguk 3,7. Vizsgáljuk meg az alábbi események kapcsolatát!

   A: van ötös az osztályban

   B: pontosan öt tanuló bukott meg

9. Igazoljuk, hogy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

10. Igazoljuk, hogy $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

11. Próbagyártás után kiderül, hogy annak a valószínűsége, hogy a vizsgált gyártmány anyaghibás, $0,15$, annak pedig, hogy mérethibás, $0,3$. A két esemény egyszerre $0,08$ valószínűséggel következik be. Mennyi a valószínűsége, hogy egy termék hibátlan?

12. A és B tetszőleges események, $\mathrm{P}(A) = 0,3$ és $\mathrm{P}(B) = 0,8$. Mekkora lehet $\mathrm{P}(A \cup B)$ és $\mathrm{P}(A \cap B)$?

13. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathrm{P}(A) \geq 0,8$ és $\mathrm{P}(B) \geq 0,8$, akkor $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0,6$!

14. Biz. be, hogy tetszőleges A, B eseményekre fennáll:

    a) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$,

    b) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$,

    c) $\mathrm{P}((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A \cap B)$,

    d) $\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \leq 1/4$!

15. Vezessük le három eseményre a Poincaré-formulát! ($\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = ?$)

16. Egy társaság tagjait nyelvtudásuk szerint csoportosítjuk. Legyen A az az esemény, hogy egy véletlenül kiválasztott személy tud angolul, B az, hogy oroszul tud és C, hogy franciául. A következőket tudjuk:
    $\mathrm{P}(A) = 0,35$; $\mathrm{P}(B) = 0,4$; $\mathrm{P}(C) = 0,3$;

$P(A \cap B) = 0,15$; $P(A \cap B) = 0,2$; $P(B \cap C) = 0,2; P(A \cap B \cap C) = 0,1$. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személy legalább az egyik nyelven tud a három közül?

17. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges A, B, C események esetén

    $a)$ $P(A \triangle C) \leq P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$ (teljesül a háromszög-egyenlőtlenség)!

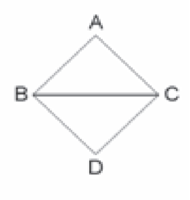
    $b)$ Ha $P(B \triangle C) = 0$, akkor $P(B) = P(C)$!

    $c)$ $|P(A \cap B) - P(A \cap C)| \leq P(B \triangle C)$

    ($A \triangle C$ az A és B esemény szimmetrikus különbségét jelenti.)

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események esetén teljesül a $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq P(A_1) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$ egyenlőtlenség!

19. Egy országban az A, B, C és D városok között úthálózat van kiépítve az ábra szerint. Minden egyes útszakaszon egy adott téli napon p valószínűséggel hóakadály van, a többi útszakasz állapotától függetlenül (ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy két adott úton egyszerre hóakadály van, p^2). Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon el lehet jutni A-ból D-be?



3. Klasszikus valószínűségi mező (kombinatorikus kiszámítási mód)

1. Egy kocka csúcsai közül hármat kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csúcsok között nincsenek élszomszédosak?

2. Ha a SZEGED szó betűit összekeverjük, és véletlenszerűen sorbarakjuk, mennyi a valószínűsége, hogy megint a SZEGED szót kapjuk?

3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találomra választott 6-jegyű telefonszám jegyei mind különböznek?

4. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 ferér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

5. Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ számoknak tekintsük egy véletlen permutációját (minden permutáció egyformán valószínű)! Mennyi a valószínűsége, hogy

   a) az 1 és 2 számok egymás mellé kerülnek?

   b) az 1, 2 és 3 számok egymás mellé kerülnek?

   c) az első k szám közötti legkisebb szám éppen i-vel egyenlő ($k \leq n$, $i \leq n - k + 1$)?

6. Két testvér ugyanabba a 27-es létszámú osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be.

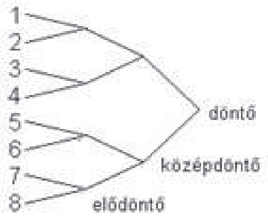
   a) Mi a valószínűsége, hogy a két testvér között pontosan 10-en állnak?

   b) Hogy változik az eredmény, ha körbe állnak?

7. Kettétörünk n darab pálcát. A darabokat véletlenszerűen párba rendezzük. Mennyi a valószínűsége, hogy az összetartozó darabok alkotják a párokat?

8. Létezik a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy a fűszálak vége mindkét oldalon kiáll. Egy másik lány mindkét oldalon véletlenszerűen páronként összecsomózza őket. Ha a fűszálakból zárt lánc keletkezik, akkor a babona szerint a lány a következő évben férjhez megy. Mi a valószínűsége, hogy zárt lánc keletkezik? Általánosítsuk a feladatot $2n$-re!

9. Egy teniszversenyen 8 versenyző indul. A versenyzők egy kalapból húznak egy rajtszámot és az ábra szerint játszanak (a következő fordulóba mindig a győztesek jutnak tovább). Mennyi a valószínűsége, hogy a két legjobb versenyző csak a döntőben (utolsó fordulóban) találkozik? (A legjobb mindenkit legyőz, a második legjobb pedig a legjobb játékoson kívül mindenkit.)



10. Az $1, \ldots, 10$ számok közül kiválasztunk véletlenszerűen 6 különbözőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok közül a második legkisebb a 3?

11. Toscana hercege szerette a szerencsejátékot. Észrevette, hogy ha két kockával dobott, akkor a 9 gyakrabban jött ki, mint a 10, ezért írt Galileinek, hogy fejtse meg a rejtélyt. Mit válaszolhatott Galilei?

12. Chevaler de Méré lovag a következő kérdéseket tette fel Pascalnak:

    a) Egy szabályos kockával négyszer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egy hatost?

    b) Két kockával 24-szer dobva mekkora valószínűséggel kapunk legalább egyszer dupla hatost?

    A lovag megoldása szerint mindkét esetben $1/2$ a kérdéses valószínűség. Egyetértünk-e vele?

13. Egy kocka minden egyes lapját három szín valamelyikére festjük. Bármely szín választása bámely lap esetén egyformán valószínű. Mi a valószínűsége, hogy lesznek azonos színű szemközti lapok?

14. A fiúk és a lányok születési valószínűségeit $1/2$-nek tekintve mennyi a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban három fiú és három lány van?

15. 100 alma közül 10 férges; kiveszünk közülük válogatás nélkül 5-öt. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz köztük férges?

16. 10 pár cipőből kiválasztunk véletlenszerűen 4 cipőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább egy pár?

17. N golyót elhelyezünk n urnába tetszőlegesen. Mennyi a valószínűsége, hogy egy kijelölt urnába pontosan k golyó kerül?

18. Egy $2n$ fiúból és $2n$ lányból álló társaság elhatározza, hogy moziba megy. Két filmet vetítenek, mindenki eldönti, hogy melyiket nézi meg (véletlenszerűen, azonos valószínűséggel). Mennyi a valószínűsége, hogy egy filmet ugyanannyi fiú néz meg, mint amennyi lány?

19. Egy urnában 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyó van. Ezek közül 6-ot véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy van köztük mindhárom színűből?

20. Egy urnában ugyanannyi piros golyó van, mint fehér. Ha visszatevés nélkül húzunk kettőt, akkor annak valószínűsége, hogy mindkettő piros, $8/33$. Hány golyó van az urnában?

21. Egy dobozban 11 golyó van megszámozva 1-től 11-ig. Visszatevés nélkül kihúzunk hatot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páratlan?

22.* A Monte-Belloi kaszinóba belépőknek először egy játékban kell kipróbálniuk szerencséjüket: egy dobozban 2 nyerő és 3 vesztő golyó van, ebből lehet visszatevés nélkül húzni. Nyerő húzásra a kaszinó 10 pénzt fizet, vesztő esetén a játékos fizet ennyit. A játékosnak joga van minden húzás előtt abbahagyni a játékot. Kinek kedvez a játék? Hogy érdemes játszani?

23. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között a) legalább 2 selejtes b) pontosan 4 selejtes lesz?

24. Egy parkolóban 8 hely van. Odaérkezve egy autó véletlenszerűen beáll az üres helyek valamelyikére. 4 autó áll már bent, amikor egy busz érkezik. Akkor tud beállni, ha van 4 egymás melletti szabad hely. Mennyi a valószínűsége, hogy ezt meg tudja tenni?

25. Egy kalapban 3 lap van, egyikre 1, másikra 2, harmadikra 3 van írva. Négyszer húzunk visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páros?

26. A bűvös hatos játék a következő: két szabályos dobókockával dobva akkor nyerünk, ha van hatos a dobott számok között vagy ha a dobott számok összege 6. Mennyi a nyerés valószínűsége?

27. Egy kockával kétszer dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?

28. Egy kockával hatszor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy van olyan szám, amit legalább kétszer dobtunk?

29. Egy kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő $1, 2, 3, 4, 5, 6$ nem fordul elő az eredményben?

30. Négyszer dobunk egy szabályos kockával. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább két egymás utáni hatos?

31. Kockával n-szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy nem dobjuk kétszer egymás után ugyanazt a számot?

32. Egy szabályos kockát ismételten feldobva mennyi a valószínűsége, hogy

    a) előbb kapunk egyest, mint hatost?

    b) a dobott számok összege legalább 10?

33. Két pók egy $6N \times 6N \times 6N$ méretű rácskocka két átellenes pontjáról egyszerre indulva minden másodpercben átlépnek egy szomszédos rácspontra, mégpedig úgy, hogy mindhárom lehetséges irányban csak előrefelé léphetnek (az átellenes csúcs felé), azonos valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pók találkozik?

34. Egy pók sétál egy rácson a következő módon: mindig északi, keleti vagy nyugati irányba mászik egységnyit, minden egységnyi út megtétele után azonos valószínűséggel választ a három irány közül. Ha n egységnyit mászkált, mennyi a valószínűsége, hogy sosem lépett olyan pontra, ahol korábban már járt?

35. Mennyi a valószínűsége, hogy a bridzskártyát szétosztva

    a) legfeljebb egy játékos kezében legyen 2 ász?

    b) a négy ász közül mind a négy játékosnak egyet-egyet osztanak?

36. András és Béla kártyázik, 12-12 lap van a kezükben, a 32 lapos csomag többi lapja az asztalon hever, kettő kinyitva. Mire érdemesebb Aladárnak fogadni: hogy egy, vagy hogy kettő, általa nem látott lap Bélánál van?

37. Egy 52 lapos francia kártyából Aladár addig húz, míg ki nem húzza az első fekete ászt. Ezután Balázs húz addig, míg ki nem húzza a másodikat. Az nyer, akinél több lap van. Kinek kedvez a játék?

38. Mennyi annak a valószínűsége, hogy *a*) 12 ember, *b*) k ember ($k < 12$) születésnapja különböző hónapban van (a hónapok valószínűségét azonosnak véve)?

39. Legalább hány ember esetén nagyobb $1/2$-nél annak a valószínűsége, hogy legalább 2-nek azonos hónapra essék a születésnapja (minden hónapot azonos valószínűséggel véve)?

40. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 2 ember születésnapja azonos napra esik? (Februárt 28 nappal vegyük számításba, a születésnapok $1/365$ valószínűséggel esnek az egyes napokra.)

41. Mennyi a valószínűsége, hogy a legkisebb kihúzott lottószám a 14?

42. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötöslottón legalább egy olyan számot is kihúznak, ami a múlt heti nyertes számok közt is szerepelt?

43. Mi a valószínűsége, hogy *a*) ötösünk, *b*) legalább 2-esünk lesz a lottón egy szelvénnyel?

44. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt lottószámot növekvő sorrendben húzzák ki?

45.* Mennyi a valószínűsége, hogy a lottón kihúzott számok között nincsenek szomszédosak?

46.* Mennyi a valószínűsége, hogy megtörténik, ami az 1969. február 28-ai lottóhúzáson történt, vagyis hogy nagyság szerint rendezve a kihúzott számokat az első kettő összege megegyezik a harmadikkal?

47.* Bizonyítsuk be valószínűségszámítási meggondolással a következő azonosságot:

$$\frac{\binom{N}{l}\binom{M}{k}}{\binom{N+m}{l+k}} = \sum_{\substack{m+n=p \\ k\leq m\leq M,\ l\leq n\leq N}} \frac{\binom{N}{n}\binom{M}{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k}}{\binom{N+m}{p}\binom{p}{l+k}},$$

ahol M, N, k, l, p adott természetes számok, $k \leq M$, $l \leq N$ és $k+l \leq p \leq M+N$.

48. Az $(1+x)^6$ polinomot kifejtve együtthatói közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy összegük kisebb, mint 25?

49. Véletlenszerűen sorbarakunk 3 piros, 4 zöld és 5 fehér golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két zöld golyó?

50. Öt levelet megírunk öt ismerősünknek, majd a borítékok megcímzése után – szórakozottságból – össze-vissza tesszük bele őket. Mi a valószínűsége, hogy *a*) legalább 3, *b*) leglább 2 ismerősünk a neki szólót kapja meg?

51. Egy 9 tagú társaság felszáll egy három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság tagjai nem figyelik egymást, csak azt, hogy feljussanak valamelyik kocsira.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik kocsiba senki nem száll fel a társaságból?

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik kocsiba legfeljebb egy ember száll fel a társaságból?

52. Két szabályos kockát r-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) párok közül nem fordul elő mindegyik?

53. n hallgató leteszi az indexét lefordítva az asztalra. Azután találomra felvesz mindenki egyet, és elviszi. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját indexével távozik?

54. n házaspár bálba megy. A ceremóniamester véletlenszerűen párba rendezi őket.

    a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyik férj sem táncol a saját feleségével?

    b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k férj táncol a feleségével?

55. n, sorban elhelyezett dobozba találomra N golyót helyezünk el úgy, hogy a golyóknak mind az n^N lehetséges elhelyezését egyenlően valószínűnek tételezzük fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

    a) az első k doboz egyike sem üres?

    b)* pontosan k doboz marad üresen?

56. Írjuk fel annak a valószínűségét, hogy az 52 lapos francia kártyát 4 játékos között szétosztva egy adott játékos

    a) kezéből egyik szín sem hiányzik!

    b) kezében legfeljebb három szín van!

57. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább n-szer kell feldobni a dobókockát ahhoz, hogy mind a 6 szám előforduljon?

58. A szabályos kockát addig dobjuk, amíg mind a hat szám elő nem fordul. Jelöljük p_n-nel annak a valószínűségét, hogy ez az n-edik dobásnál következik be. Határozzuk meg p_n-t!

59. A *craps* játék a következő: két játékos játszik. Feldobnak két kockát, ha az összeg 7 vagy 11, akkor az Első nyer, ha pedig 2, 3 vagy 12, akkor a Második. Más összeg esetén újra dobnak addig, míg valaki nem nyer. Kinek kedvez a játék?

60. Aladár és Béla felváltva dob egy szabályos dobókockával és az nyer, aki először dob hatost. Kinek kedvez a játék?

61. Két játékos felváltva dobál egy érmét. Az nyer, aki először dob írás után fejet. Kinek kedvez a játék?

62. Anna és Balázs dob egy szabályos érmével felváltva addig, míg az utolsó 3 dobás f, f, f vagy f, i, f nem lesz. Első esetben Anna nyer, a másodikban Balázs. Kinek kedvez a játék?

63. Egy részeg tengerész a kocsma és a tenger között dülöngél (a tengertől t, a kocsmától k lépésre), $1/2-1/2$ valószínűséggel lép jobbra vagy balra. Ha a tengerhez ér, beleesik, ha a kocsmához, akkor bemegy oda. Mennyi a valószínűsége, hogy eléri a kocsmát mielőtt a tengerbe zuhanna?

4. Geometriai valószínűségi mező

1. Egy R sugarú körre véletlenszerűen rádobunk egy r sugarú körlapot ($r < R$). Feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy a rádobott körlap középpontja az R sugarú körlap valamely tartományába esik, arányos e tartomány területével (egyenlentes eloszlást követ). Mennyi a valószínűsége, hogy az R sugarú kör teljes egészében tartalmazza az r sugarú kört?

2. Egy még létező, vásártereken játszott régi angol játék a pennygurítás: adott egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetháló és egy 1 egység átmérőjű penny. A cél az, hogy az elgurított penny ne essen vonalra. Hogyan számítjuk ki a nyerési esélyeket?

3. Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas (egyenletes eloszlást feltételezünk). A házon két 2 m $\times$ 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál el a labda?

4. Egy r sugarú körben adott iránnyal párhuzamos húrt veszünk fel. Mi a valószínűsége annak, hogy a húr hossza kisebb, mint r, ha a húrt úgy választjuk, hogy

   a) meghúzzuk az adott irányra merőleges átmérőt, és ezen veszünk fel (egyenletes eloszlás szerint) véletlenszerűen egy pontot a húr felezőpontjaként

   b) a kör kerületén vesszük fel (egyenletes eloszlás szerint) véletlenszerűen a húr egyik végpontját?

   Miért különbözik a két válasz? (Ez a *Bertrand-paradoxon*)

5. Egy r sugarú kör kerületén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy másik pontot (egyenletes eloszlás szerint). Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint $r\sqrt{2}$?

6. A $(0,1)$ intervallumot egy (egyenletes eloszlás szerint) találomra választott pont segítségével két részre osztjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező szakaszok közül a kisebbik nagyobb, mint 1/3?

7. Választunk a $(0,1)$ intervallumon találomra egy pontot (egyenletes eloszlás szerint). Jelöljük e pontnak a 0-tól való távolságát ξ-vel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a ξ, $1-\xi$ és az $1/2$ hosszúságú szakaszokból háromszöget lehet alkotni?

8. A $(0,1)$ intervallumon találomra választunk két számot (egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint). Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott három szakaszból

   a) háromszög szerkeszthető?

b)* hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

9.* A $(0, 1)$ intervallumra egymástól függetlenül 3 pontot dobunk egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy ezeknek a 0-tól vett távolságaival mint szakaszokkal háromszöget lehet alkotni?

10. A $(0, 1)$ intervallumon találomra választunk két számot (egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint). Mennyi a valószínűsége, hogy különbségük *a*) 1/4 és 1/2 közé esik, *b*) kisebb lesz, mint a kisebbik szám?

11. A $(0, 1)$ intervallumot felosztjuk két (egyenletes eloszlás szerint) véletlenül rádobott pont segítségével három részre. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom szakasz hossza

    a) kisebb, mint 1/2,

    b) nagyobb, mint 1/4?

12. A $(0, 1)$ intervallumon két pontot választunk véletlenszerűen egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont közelebb van egymáshoz, mint bármelyik közülük a végpontokhoz?

13. Választunk egy számot 0 és 2 között, és egy másikat 1 és 2 között egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy összegük kisebb, mint 2?

14. A gázvezetékek meghibásodása bárhol bekövetkezhet és a hiba egy szakaszba való esésének valószínűsége a szakasz hosszával arányos. Egy 50 méter hosszú gázvezetékből két helyen szivárog a gáz. A két hiba egymástól függetlenül keletkezett. Ha a hibák közelebb vannak egymáshoz 2 méternél, akkor az aszfaltot csak egy helyen kell bontani. Mi a valószínűsége annak, hogy nem szükséges két bontás?

15. András és Betti megbeszélik, hogy munka után talákoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 4 óra és fél 6 között.

    a) Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 10 percnél többet várnia a másikra?

    b) Ha András fél órát hajlandó várni, Betti, aki türelmetlenebb, csak negyed órát, mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

16. Egy szegedi áruházhoz két áruszállító érkezik egyenletes eloszlás szerinti véletlen időpontokban: a Sopronból érkező 8 és 10 óra között, a Debrecenből érkező pedig 9 és 10 óra között. Mennyi a valószínűsége, hogy a debreceni teherautó érkezik meg előbb?

17. Anna munkaideje 3/4 5 és 5 között véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget. Béla fél 5 és negyed 6 között szokott odaérni, hogy hazavigye, szintén véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy Béla hamarabb odaér, mint hogy Anna végez? Mennyi a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell 10 percnél tovább várakoznia?

18.* Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és válasszuk ki ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további 2 pontot a kör kerületén véletlenszerűen (egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint). Hat. meg annak a valószínűségét, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedje a kör középpontját!

19.* Válasszuk a ξ és η pontokat egymástól függetlenül a $(-N, N)$-ben egyenletes eloszlás szerint. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet: $x^2 + \xi x + \eta = 0$. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!

20.* (*Buffon-féle tűprobléma*) Vízszintes táblára d távolságú párhuzamos egyeneseket rajzoljunk. Egy l ($< d$) hosszúságú tűt dobálunk a táblára megpörgetve azt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

5. Függetlenség, feltételes valószínűség

1. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B!

2. Feldobunk egy kockát. A következő események közül melyek függetlenek? A: párosat, B: páratlant, C: prímszámot, D: legalább 2-t dobtunk.

3. Igazoljuk, hogy ha A és B események függetlenek egymástól, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is!

4. Ha A független B-től és B független C-től, következik-e, hogy A független C-től?

5. Ha A, B és C páronként függetlenek, következik-e, hogy teljesen függetlenek?

6. A és B eseményekre teljesül, hogy kizárják egymást és egyúttal függetlenek is. Mit tudunk mondani a valószínűségükről?

7. Ha A és B kizárják egymást, és $P(B) > 0$, akkor mit mondhatunk $P(A|B)$-ről?

8. Legyen $\mathrm{P}(A|B) = 0,7$, $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = 0,3$ és $\mathrm{P}(B|A) = 0,6$. Határozzuk meg $\mathrm{P}(A)$ értékét!

9. Legyen $\mathrm{P}(B) > 0$. Mi a feltétele, hogy $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$ fennáljon?

10. 4 golyót helyezünk el egy kalapban: 1 fehéret, 1 kéket és 2 pirosat. A kalapot megrázzuk, majd valaki kihúz belőle két golyót. Megnézi őket, és fennhangon kijelenti, hogy legalább az egyik piros. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik kihúzott golyó is piros?

11. Tegyük fel, hogy $1/2 - 1/2$ valószínűséggel születik fiú illetve lány.

    a) Egy családban az első gyerek fiú, és éppen a második gyereket várják. Mennyi a valószínűsége, hogy lány lesz?

    b) Vendégségbe megyünk egy kétgyerekes családhoz. Egy fiú otthon van, a másik gyerek edzésen. Mennyi a valószínűsége, hogy ő lány?

12. Ezen a héten az 1, 3, 5, 7, 11 számokat játszottam a lottón. A villamoson hallottam, hogy a legnagyobb és legkisebb kihúzott szám különbsége 10. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyesem van?

13. Egy dobozban 3 golyó van. Visszatevéssel húzunk egyet-egyet háromszor. Mindhárom esetben feketét húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom golyó fekete?

14. n dobozba elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezkedés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége, hogy K golyó esik bele? $(K \geq 1)$

15. Két érmét feldobva feltéve, hogy dobtunk legalább egy fejet mennyi a valószínűsége, hogy írást is dobtunk?

16. Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyiken 6-os van?

17. Van 4 számkártyánk, amelyekre a 0, 1, 3, 5 számok vannak írva. Összekeverjük őket, majd kihúzunk közülük kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szám szorzata páros lesz, feltéve, hogy az összegük páros?

18. Egy 5 piros és 5 fehér golyót tartalmazó urnából egymás után (visszatevés nélkül) kihúzunk 3 golyót. Feltéve, hogy az első 2 húzás eredménye ugyanaz, mennyi a valószínűsége, hogy a 3. húzás piros?

19. A barátunk 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor 5 kocsma bármelyikében egyenlő valószínűséggel. Négyben már megnéztük, de nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

20. Egy urnában 3 golyó van, egy piros, egy fehér és egy fekete. Ötször húzunk egyegy golyót visszatevéssel. Feltéve, hogy feketét is és fehéret is legalább kétszer húztunk, mennyi a valószínűsége, hogy nem húztunk pirosat?

21. Egy villamos 10 percenként jár. Feltéve, hogy az előző már legalább 3 perce elment, mennyi a valószínűsége, hogy a következő 5 percen belül jönni fog?

22. Anna 4 és 5 között végez munkahelyén, Béla 4 és fél 5 között, mindketten véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint. Megbeszélik, hogy Béla hazaviszi Annát. Béla ma előbb végez. Mennyi a valószínűsége, hogy legkésőbb negyed 5-kor el tudnak indulni?

23.* Egy kockával addig dobunk, amíg először nem kapunk 6-ost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kellett dobni?

24. Van két erszény, egyikben r_1, másikban r_2 darab egyforintos. Mindkettőbe teszünk még $t - t$ darab ötforintost. Melyik esetben nagyobb az ötforintos húzásának valószínűsége:

   a) először találomra választok egy erszényt, majd abból húzok, vagy

   b) először összeöntöm az erszények tartalmát, majd ezután húzok egy érmét?

25. Három személy közül egyet szeretnénk igazságosan kisorsolni, ezért három gyufaszál közül kettőnek letörtük a fejét. Egyik személy kezébe veszi a gyufaszálakat ép végükkel kifelé, majd a másik kettő húz egyet-egyet. Aki az épet húzza, az nyer, ha nem húzza senki, akkor az nyer, akinek a kezében voltak a szálak. Igazságos-e a játék (azaz számít-e kinek a kezében van a gyufa és ki húz először)?

26. Van N urnánk, a k-adikban k piros és N fehér golyó van ($k = 1, 2, \ldots$). Mennyi a valószínűsége, hogy a találomra választott urnából kihúzott mindkét golyó piros, ha a húzásokat a) visszatevéssel b) visszatevés nélkül végezzük?

27. Két játékos, A és B azt játszák, hogy A dob egy kockával, azután két érmét annyiszor dob fel, ahányat a kockával dobott. Ha legalább egyszer két fejet dobott e dobások során, akkor B fizet A-nak 1 forintot, ellenkező esetben A B-nek. Melyiküknek előnyös a játék (kinek nagyobb a nyerési esélye)?

28. Egy dobozban N golyó van. Egyet húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az fehér?

29. Írjuk fel annak a valószínűségét, hogy egy családban van legalább egy lány, ha p_n annak a valószínűsége, hogy a családban n gyerek van ($n = 0, 1, \ldots$)! A fiúk és a lányok születési valószínűségét $1/2$-nek tételezzük fel.

30. Aladár minden reggel az otthonához közeli két csemege egyikében veszi meg a péksüteményeket. Mindkét csemege egyenletes eloszlás szerinti véletlen időpontban, egymástól függetlenül nyit ki hétköznap $7^{\underline{00}}$ és $7^{\underline{10}}$ között, hétvégén pedig $7^{\underline{05}}$ és $7^{\underline{10}}$ között. Mennyi a valószínűsége, hogy egy tetszőleges napon $7^{\underline{07}}$ perckor meg tudja venni a sütiket?

31. Egy kávézóban a felszolgáló megfigyelése szerint a kolumbiai kávét választók 50%-a ad borravalót, a bécsi kávékeveréket választók 20%-a, míg a guatemalai kávét választók 30%-a. Mennyi a valószínűsége, hogy egy borravalót adó vendég kolumbiai kávét ivott, ha az eladott kávék 20%-a kolumbiai, 70%-a bécsi és a maradék guatemalai?

32. Egy üzemben 3 gép van, az első adja a termelés 40%-át, a másik kettő 30-30%-át. Az első és a második gép 0,05 valószínűséggel termel selejtet a harmadik 0,1 valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy

   a) az üzem termékei közül egyet kiválasztva az selejtes lesz?

   b) ha találunk egy selejtes terméket, azt az első gép gyártotta?

33. Egy városban ugyanannyi férfi van, mint nő. Minden 100 férfi közül 5 és minden 1000 nő közül 25 színvak.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az utcán először szembejövő ember színvak?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy színvakokról vezetett nyilvántartásban egy találomra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?

34. Egy vizsgán minden vizsgakérdéshez három lehetséges válasz van megadva, egy helyes közülük. A vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ, ha nem tudja, $1/3$ valószínűséggel jelöli meg a három válasz valamelyikét. Az egyik választ megnézve látjuk, hogy helyes. Mennyi a valószínűsége, hogy valóban tudta is a választ?

35. A $0, 1, \ldots, N$ számokkal megjelölt urnák közül a k-adikban k piros és $N - k$ fehér golyó van ($k = 0, 1, \ldots, N$). Találomra választunk egy urnát, és onnan visszatevéssel húzunk. Jelölje A_n azt az eseményt, hogy az n-edik húzásra piros golyót húzunk. $\mathrm{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) =$? Ha mindkét húzás piros, mi a valószínűsége, hogy a negyedik urnából húztunk?

36. Sportolóknál azt vizsgálják, használnak-e doppingszert. Az erre haszlált teszt 99%-ban vezet pozitív eredményre, ha valaki használja a szert. Tudjuk, hogy a sportolók 1%-a használjam a szert és azt is tudjuk, hogy 1%-ban akkor is pozitív lesz a teszt, ha nem doppingol a sportoló. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg doppingol a sportoló, ha pozitív lett a tesztje?

37. Amennyiben barátnőnk közvetlenül a randevúnk előtt megy fodrászhoz, akkor 90%, hogy elkésik a randevúról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy elkésik a randevúról, mint az, hogy randevú előtt fodrásznál volt. Ha elkésik, mennyi a valószínűsége, hogy fodrásznál volt?

38. Egy kalapban 5 fehér, 5 piros és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk találomra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér és a harmadik ismét piros lesz?

39. Van három testvér. A legnagyobb szeret rosszalkodni, ezért ha egyedül hagyják, $0,7$ valószínűséggel rossz fár tesz a tűzre. A középső ha látja, hogy bátyja rosszalkodik, $0,5$ valószínűséggel csatlakozik hozzá. A legkisebb szereti utánozni testvéreit, tehát ha mindketten rosszalkodnak, $0,8$ valószínűséggel utánozza őket. Egy délután magukban játszanak az udvaron. Mennyi a valószínűsége, hogy mindháman rosszalkodni fognak, amikor szüleik kimennek utánuk?

6. Valószínűségi változók

1. András és Balázs egy-egy dobókockával dob. Aki kisebbet dob, kifizeti a dobott számok összegének ötszörösét a másiknak, döntetlen esetén senki sem fizet. Legyen ξ András nyereménye. Milyen értékeket vehet fel ξ? Hogyan fejezhetjük ki ξ-vel Balázs nyereményét?

2. Anna és Bea egy két méter hosszú cérna két végét húzzák. A cérna egyszer csak elszakad. Legyen ξ a cérna Annánál maradt részének hossza. Milyen értékeket vehet fel ξ? Fejezzük ki ξ segítségével a Beánál maradt rész hosszát!

3. Milyen valószínűségi változó lehet független önmagától?

4. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

   a) $F(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x$

   b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$

   c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \dfrac{[x]}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

   d) $F(x) = e^{-e^{-x}}$

5. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségi eloszlást?

   a) $p^k(1-p)^2, \quad \text{ahol } 0 < p < 1,\ k = 1, 2, \dots$

   b) $\dfrac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$

   c) $p^3, \quad 3p^2(1-p), \quad 3p(1-p)^2, \quad (1-p)^3, \quad \text{ahol } 0 < p < 1,\ k = 1, 2, \dots$

   d) $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{ahol} \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,\ k = 1, 2, \dots$

6. Egy 22 fős osztályban 8-an nem készültek. A tanár 4 főt feleltet. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását!

7. Írjuk fel az 1. feladatban szereplő eloszlásokat!

8. Valamikor egy takarékpénztárnál 25 és 50 ezer forintos nyereménybetétkönyveket lehetett vásárolni, amelyekre öröklakásokat sorsoltak ki, mégpedig az egyenlő befektetés, egyenlő várható nyereség elve alapján. Ha valakinek volt 50 ezer forintja, mit volt érdemesebb vásárolni: egy 50 ezres vagy két 25 ezres betétkönyvet?

9.* 10 ember utazik egy vonaton, egymástól függetlenül szállnak be összesen 4 vagonba. Mi a legvalószínűbb elhelyezkedése a 4 vagonban a 10 utasnak? Várhatóan hány utas kerül egy vagonba?

10.* Szabályos dobókockával addig dobunk, míg a dobott számok S összege át nem lépi a 100-at. Mi S legvalószínűbb értéke?

11.* Egy dobozban 101 golyó van, amelyből pontosan 3 piros. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk. Hányadik helyen a legvalószínűbb a második piros húzása?

12.* Hogyan lehet cinkelt érmével igazságosan „sorsot húzni"?

13. Adjuk meg a lottótalálatok számának eloszlását, eloszlásfüggvényét és várható értékét!

14. Mi az 1. feladatban szereplő valószínűségi változók várható értéke és szórása?

15. Dobjunk fel 16 szabályos érmét. A dobott fejek számából vonjunk le 8-at, a különbséget osszuk el 4-gyel. A bank akkor nyer, ha az eredmény 0, 1 vagy -1, egyébként a játékos. Kinek kedvez a játék? Mi a játékos nyereményének eloszlása és várható értéke?

16. Két szabályos érme egyik oldalára 0, a másikra 1 van írva. Feldobjuk az érméket. Határozzuk meg a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

17. Két dobókockával dobunk. Legyen ξ a dobott számok különbsége (a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbet). Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét!

18. Két kockával dobva mennyi a dobott számok a) maximumának, b) minimumának, c) összegének eloszlása, várható értéke és szórása? Rajzoljuk fel az eloszlásfüggvényeket!

19. k kockával dobva mi a legvalószínűbb összeg? Mennyi a dobott számok összegének várható értéke és szórása?

20. Egy kalapba n darab különböző számot $(k_1, \ldots, k_n)$ dobunk be, majd kihúzunk kettőt. Mennyi a húzott számok minimumának és összegének várható értéke és szórása?

21. Egy sorsjátékon 1 darab 50000 forintos, 10 darab 5000 forintos és 50 darab 1000 forintos nyeremény van. 10000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi lenne a sorsjegy igazságos ára?

22.* Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?

23.* Három személy feldob egy-egy dobókockát, aki a legnagyobbat dobja, az nyer. Ha mind azonos, megismétlik, ha ketten dobják a legnagyobbat, csak ők dobnak addig, míg egyikük nagyobbat nem dob (ő nyer). Igazságos-e a sorsolás? Egy másik javaslat szerint ha az első dobás nem hoz eredményt, akkor megismétlik a dobást. Ez igazságos? Melyik változat tart várhatóan hosszabb ideig?

24.* A *pétervári játék* s következő: egy játékos részvételi díjat fizet a banknak, majd az első fejig dobál egy szabályos érmével. Ha a k-adik dobásra jön ki az első fej, akkor a játékos 2^k forintot kap a banktól. Mennyi az igazságos részvételi díj?

25.* Egy n tagú társaságban mindenki megajándékozza egy társát úgy, hogy nevüket cédulára írják, kalapba teszik és húznak visszatevés nélkül. Ha valaki a saját nevét húzza, az egész sorsolást megismétlik.

a) Várhatóan hányan húzzák a saját nevüket elsőre?

b) Várhatóan hányszor kell megismételni a sorsolást?

26. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & \text{ha } 2 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki, milyen x értéken adódik $\xi \geq x$ valószínűségére $1/2$!

27. Sűrűségfüggvények-e a következő függvények?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } 1 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$

28. Írjuk fel a 2. feladatban szereplő eloszlások sűrűségfüggvényét és várható értékét!

29. Létezik-e az $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & \text{ha } 1 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak szórása?

30. Válasszunk egy egységnégyzetben véletlenszerűen egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Jelölje ξ a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

31. Egy szabályos háromszögből választunk egy pontot az egyenletességi hipotézis szerint. Legyen ξ a kiválasztott pont és a hozzá legközelebb eső oldal távolsága. Adjuk meg ξ sűrűségfüggvényét!

32. Egy $\sqrt{2}$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög belsejében választunk egy pontot az egyenletességi hipotézis szerint. Legyen ξ a választott pont és az átfogó távolsága. Adjuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. Nevezetes eloszlások

1. Vezessük le és számoljuk ki a $p = 0,2$ paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó szórását!

2. Egy kockával n-szer dobunk. Adjuk meg a dobott hatosok számának eloszlását, várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 2, de legfeljebb 4 hatost dobtunk?

3. Két kockával n-szer dobunk. Adjuk meg a dobott hatosok számának eloszlását, várható értékét és szórását!

4. Egy adott üzemben gyártott harisnyák között minden ezredik hibás. A harisnyákat kétszázasával csomagolják dobozokba. 1000 doboz közül átlag hány olyan lesz, amely csak hibátlan harisnyákat tartalmaz?

5. Egy kockát 10-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két-két 1-es, kettes, hármas, egy négyes és három 6-os lesz a dobott számok között?

6. András és Béla a következő játékot játsza: feldobnak 3 érmét és azt figyelik, hogy 3 fej vagy 3 írás van-e. Ha ez először páros sokadik dobásra következik be, András nyer, ha páratlanadikra, Béla. Véget ér-e a játék? Kinek kedvez? Várhatóan hányadik dobásra következik be a figyelt esemény? Nem mond ez ellent az előző kérdésre adott válasznak? Magyarázzuk meg!

7. Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat, de most visszatevéssel. Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!

8. Az 52 lapos bridzskártyát négy játékos között egyenlően osztják szét. Mennyi az első játékoshoz kerülő ászok számának várható értéke? Mennyi a valószínűsége, hogy emberünköz legalább 2 ász kerül?

9. Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között?

10. Ha az A esemény valószínűsége k/n, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az A esemény n kísérlet közül pontosan k-ban következik be?

11. Egy tesztben 300 kérdést tesznek fel, amelyekre három-három lehetséges válasz van, ezek közül egy jó. A helyes válaszok hány százalékát kell ismernie egy pályázónak, hogy annak valószínűsége, hogy a teszten 50%-os eredményt ér el, legalább 0,9 legyen?

12. Egy villamoson $p = 0,04$ valószínűséggel jelennek meg ellenőrök, és a bliccelőket 3000 forintra megbírságolják. Mennyi a valószínűsége, hogy a bírság fedezi egy bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha a jegy ára 150 forint?

13. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5-ször kell dobni, hogy az első 6-os kijöjjön? Melyik az a k szám, amelyre teljesül, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább k dobás kellett az első 6-osig éppen 0,5?

14. Egy kockával az első hatosig dobunk. Nyereményünk a dobások számának ötszöröse. Adjuk meg a nyeremény eloszlását, várható értékét és szórását!

15. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 3 darab 6-ost nem dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább ötször kellett dobni? Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

16. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó van. Ebből egy játékos addig húzhat, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor a másik játékos annyi pénzt fizet neki, amennyi golyót kihúzott, majd ő húz zöldig. Ekkor az első játékos fizet a másodiknak annyit, amennyi golyót húzott. Igazságos-e ez a játék?

17. Egy izzó a minden egyes bekapcsoláskor $0,005$ valószínűséggel kiég. Legyen az X véletlen változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Számoljuk ki a várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége, hogy a várható értékénél tovább tudjuk használni?

18. Egy dobozban 4 db fekete és 6 db fehér golyó van, találomra választuk egy golyót amíg fehéret nem húzunk. A kihúzott golyót azonnal visszatesszük. Határozzuk meg a kihúzott golyók számának eloszlását, várható értékét és szórását!

19. Egy dobozban 5 piros és 8 fehér folyó van. Kihúzunk a dobozból 7 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy páros számú piros lesz a kihúzottak között? Várhatóan hány pirosat húzunk?

20. Mi lesz két független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása?

21. Igazoljuk, hogy ha ξ_1 hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi_2 = n - \xi_1$ is az!

22. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméterű Poisson-eloszlást követ. 10 almát leszedünk. Mi a bennük lévő férgek számának várható értéke? Mennyi a valószínűsége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?

23. Nagy számú lövést adtunk le egy kör alakú célpontra 1 percen keresztül. A nagy távolság miatt azonban az egyes találatok valószínűsége kicsiny, vagyis Poisson eloszlást követ. Átlagosan 15 találatot értünk el percenként. Mennyi a valószínűsége , hogy 15-nél több találatuk lesz a következő egy percben, amikor újrakezdjük?

24. Egy évben bekövetkező repülőgép-szerencsétlenségek száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülő sem zuhan le, 0,1. Mire tippel, várhatóan hány repülő fog lezuhanni a következő évben?

25. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy $0,0002$ valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár. Mennyi a valószínűsége, hogy 15000 házból kevesebb, mint 4-ben fog előfordulni tűzkár? (Közelítsünk Poisson-eloszlással)

26. A pénztárcámban lévő különböző címletű bankjegyek száma egymástól független, Poisson-eloszlású véletlen változó. A 200-as, 500-as és 1000-es bankjegyek számának várható értéke fajtánként 2, a 2000-es és 5000-es címleteké 1, a 10000-eké 0,5. Határozzuk meg a pénztárcámban lévő pénzösszeg várható értékét és szórását!

27. Legyen ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel. Határozzuk meg $\eta = 2\xi+1$ eloszlását, várható értékét és szórását!

28. Egy üzletbe naponta érkező vásárlók száma független Poisson eloszlású véletlen változók λ paraméterrel. Írjuk fel a két nap alatt érkező vásárlók számának az eloszlását, várható értékét és szórását!

29. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. 300 méternyi szövetet 3 méteres darabokra vágnak: várhatóan hány hibátlan lesz köztük?

30. Egy forgalmas postahivatalban egy év alatt 1017 címzetlen levelet adtak fel. Várhatóan hány olyan napja lesz az évnek, amikor 2-nél több címzetlen levelet adtak fel?

31. Egy egyetemi oktató 300 oldalas jegyzetet írt, amelyben oldalanként átlagosan 2 nyomdahiba van. Minden lektor 0,75 valószínűséggel vesz észre egy-egy hibát. A lektor által észrevett hibákat az oktató kijavítja, majd továbbküldi egy másik lektornak. Legalább hány lektorra van szükség, hogy legalább 0,5 valószínűséggel hibátlan legyen a jegyzet?

32. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 3, szórása 2. Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt! Mennyi a valószínűsége, hogy a változó értéke nagyobb, mint 5?

33. A $[0,1]$ intervallumon egymástól függetlenül két számot választunk találomra (egyenletes eloszlás szerint). Írjuk fel két szám összegének eloszlásfüggvényét! Írjuk fel az összeg várható értékét és szórását! Mennyi a 2 szám szorzatának várható értéke?

34. Egy ξ véletlen változó, mely egy A esemény bekövetkezésének időpontját jelenti, egyenletes eloszlású a $(0,b)$ intervallumon, ahol $b>1$, de pontos értéke ismeretlen. Ismeretes, azonban annak valószínűsége, hogy az A esemény a $(0,1)$ intervallumon belül bekövetkezik, mégpedig $P(0<\xi\leq 1)=3/4$. Írjuk fel az ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét! Számoljuk ki a várható értékét és szórását!

35. Egy egység hosszúságú pálca kettétörik, a töréspont egyenletes eloszlást követ. Határozzuk meg a rövidebb darab hosszának várható értékét!

36. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül két pontot választunk találomra (egyenletes eloszlás szerint). Írjuk fel két pont távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az távolság legalább $3/4$! Írjuk fel távolság várható értékét és szórását!

37. Anna és Balázs általában délután 4 és fél 5 között találkoznak. Érkezésük egymástól független, véletlenszerű és egyenles eloszlást követ. Adjuk meg az előbb érkező várakozási idejének eloszláfüggvényét és várható értékét!

38. András, Béla és Csaba reggel $7^{\underline{30}}$ és $8^{\underline{00}}$ között egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint érkeznek iskolába. A kapuban megvárják egymást és együtt mennek be a terembe. Adjuk meg a terembe érkezésük időpontjának eloszlásfüggvényét és várható értékét!

39. ξ valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Milyen eloszlású $\eta=1-\xi$?

40. Az x tengely $(0,1)$ intervallumán választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Adjuk meg a kiválasztott és a $(0,1)$ pont távolságának eloszlásfüggvényét és várható értékét!

41. A $(-3/4,1/4)$ intervallumból találomra kiválasztunk egy ξ pontot. Határozzuk meg $|\xi|$ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

42. A $[0,1]$ intervallumon választunk egy ξ számot egyenletes eloszlás szerint. Írjuk fel ξ^2 eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

43. Válasszunk egy 2 sugarú körben véletlenszerűen egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Jelölje ξ a pontnak a kör középpontjától vett távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

44. Legyen ξ egyenletes eloszlású az $[a, b]$ $(0 < a < b)$ intervallumon. Adjuk meg $\eta = 1/\xi$ eloszlásfüggvényét!

45. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon. Adjuk meg

    a) $|\xi| + 2$ *b*) ξ^2 *c*) ξ^3

    eloszlásfüggvényét!

46. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 4\pi)$ intervallumon. Adjuk meg $\eta = \sin \xi$ eloszlásfüggvényét!

47. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? És egy fél éve működő? Mekkora életkort ér nem ér meg a villanykörték 10%-a?

48. Egy műszer élettartama exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy legalább 2 évig működik: 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 évig lesz működőképes?

49. Legyen ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adjuk meg $\eta = 2\xi + 3$ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

50. Adjuk meg két független exponenciális eloszlású (egyik λ_1, másik λ_2 paraméterű) valószínűségi változó összegének eloszlását, várható értékét és szórását!

51. Egy telefonfülkénél ketten vannak előttünk, egy férfi és egy nő. Tudjuk, hogy a beszélgetési idő exponenciális eloszlású, a férfiaknál 3 perc, a nőknél 10 perc várható értékkel. Adjuk meg a várakozási idő eloszlását (sűrűségfüggvényét)!

8. Normális eloszlás, Moivre-Laplace tétel, centrális határeloszlás-tétel

1. Egy mérés hibája normális eloszlású, várható értéke 2, szórása 4. Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba -2 és 2 közé esik? Adjuk meg azt az x értéket, amelyre igaz, hogy 1/2 valószínűséggel legalább x a hiba!

2. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$. A skót bakák mekkora hányada fér bele egy 84-es zubbonyba?

3. Majmok ébredését figyelték meg. Azt tapasztaltuk, hogy 10%-uk $4^{\underline{30}}$ előtt mászott le a fáról, 20%-uk $9^{\underline{15}}$ után. Feltételezve, hogy az ébredési idejük normális eloszlást követ, mennyi a valószínűsége, hogy reggel 7-ig felkel a kedvenc majmunk?

4. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ: a macskák 10%-a könnyebb, mint $1,5$ kg és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb házimacskák aránya?

5. A programozó hallgatók valószínűségszámítás gyakorlaton szerzett pontszáma közelítőleg normális eloszlású. 8%-uk szerzett kevesebb, mint 50 pontot és 12%-uk szerzett több, mint 86 pontot. Mekkora hányaduk szerzett 51 és 61, illetve 62 és 73 közötti pontszámot?

6. A 200 gramm névleges tömegű Tibi csokoládé tényleges tömege 200 gramm várható értékű, normális eloszlású v.v.: a csokoládék 80%-ának a tömege 195 és 205 gramm közé esik. Mekkora hányaduk könnyebb, mint 190 gramm?

7. Szegednél a Tisza vízszintjének ingadozása normális eloszlást követ. Ha a 402 m-es vízszintnek a várható értéktől való eltérése a szórásnégyzet háromszorosa, és ennél alacsonyabb vízszint az esetek 67%-ában mérhető, mekkora μ és σ?

8. Egy üzemben egy folyékony termék töltését két automata végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség átlagosan 2 dl és normális eloszlású mindkét gép esetében. A betöltött mennyiség szórása az első gépnél $0,14$ dl, a másodiknál pedig $0,08$ dl. Az üvegek 60%-át az első gép tölti, a többit a második. Mi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kivéve a napi készletből, abban a betöltött folyadék mennyisége a várható értéktől $0,1$ dl-nél kevesebbel tér el?

9. Legyen ξ egy N(0,1) eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $\eta = |\xi|$, illetve $\zeta = 1/\xi$ eloszlásfüggvényét!

10. Egy szabályos dobókockát 600-szor feldobunk: írjuk fel annak a pontos valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma 100 és 105 közé esik, és közelítsük ezt a valószínűséget a de Moivre-Laplace tétel segítségével! Adjuk meg azt az x

értéket, amelyre igaz, hogy 1/4 valószínűséggel legalább x lesz a dobott 6-osok száma!

11. Százszor feldobunk egy ferde forintos érmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az írást eredményező dobások száma 40 és 60 közé esik, ha az írás valószínűsége 1/3?

12. Péter és Pál egy szabályos pénzérmét dobálnak. Ha fej, akkor Péter nyer Páltól 1 Ft-ot, ha írás, Pál nyer Pétertől ugyanennyit. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 1000 játék lejátszása után Pál nyereménye legalább 32 Ft!

13. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találatok valószínűsége minden lövésnél $0,4$. Adjon meg olyan felső korlátot, amelyet a találatok száma 90% eséllyel nem halad meg!

14. Egy pakli magyar kártyát jól összekeverünk, majd kihúzunk egy kártyát. Ezt 150-szer megismételjk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott királyok száma 35 és 62 közé esik?

15. Ketten játszanak egy játékot. András 37/72 valószínűséggel, Béla 35/72 valószínűséggel nyer meg egy játékot. A játék 200 játszmából áll, minden játszmánál 10 dollár a tét, vagyis ha András nyer, Béla ad neki 10 dollárt és fordítva. Mennyi a valószínűsége, hogy András nyereménye 50 és 100 dollár között lesz?

16. 1000 esetből kb. 300-szor fordul elő, hogy egy doboz málna nettó súlya több, mint 35 dkg. Becsüljük meg normális eloszlás táblázat segítségével, hogy hány szem málna van egy dobozban, ha az egyes málnaszemek súlya 2 g körül ingadozik, $0,25$ g szórással!

17. Egy útvonalon két légitársaság indít járatokat. Feltehető, hogy az utasok teljesen véletlenszerűen és azonos valószínűséggel döntenek egyik vagy másik légitársaság mellett. Az adott viszonylatban 200-an akarnak utazni. Hány férőhelyes gépekre van szüksége a légitársaságoknak, ha azt akarják, hogy legfeljebb 1% legyen annak a valószínűsége, hogy egy utast amiatt kelljen elutasítaniuk, mert már nincs szabad hely a gépen?

18. Budapesten a dohányzók arányát akarjuk megtudni. Legalább hány lakost kell megkérdeznünk, ha azt akarjuk, hogy a dohányosoknak a kapott válaszok alapján számolt aránya (tehát a relatív gyakoriság) a dohányosok tényleges arányától legalább 99% valószínűséggel legfeljebb 1%-kal térjen el?

19. Egy kísérlet lehetséges kimenetelei a 0, 2, 4, és 8 számok, rendre 0,125, 0,5, 0,25, és 0,125 valószínűséggel. Mi annak a valószínűsége, hogy a kísérletet 1000-szer elvégezve a kimenetelek (számtani) átlaga 2,98 és 3,04 közé esik?

20. $X_1, \dots, X_{1000}$ független, külön-külön $[0,1]$-en egyenletes eloszlású véletlen változók. A normális eloszlás táblázata segítségével határozzuk meg közelítőleg a $P(\sum_{i=1}^{1000} X_i^2 \geq 350)$ valószínűséget!

21. Egy adott repülőgép esetén a két meghibásodás között eltelt időtartam exponenciális eloszlást követ, 30 nap várható értékkel. A repülőt 100 meghibásodás után kivonják a forgalomból. Mennyi a valószínűsége, hogy 3600 napnál tovább üzemelhet?

22. Véletlenországban egy bank pénztáránál az egyik napon előreláthatóan 60 ügyfél vesz ki pénzt. A pénztárnál az átlagos kifizetés ügyfelenként 50 tallér, 20 tallér szórással. Mennyi pénzt tartson a kasszájában a pénztáros, ha $0,95$ valószínűséggel, minden fennakadás nélkül tudja teljesíteni a kifizetéseket?

9. Statisztikai becslések és próbák

1. Egy városban a gépkocsik rendszámai számok, 1-től kezdődően. Adjunk maximum-likelihood becslést a városban található gépkocsik számára n megfigyelés alapján (jelölje pl. $x_1, \dots, x_n$ a megfigyelt n rendszámot). Adjuk meg a konkrét becslést, ha az 5, 8100, 76, 77073 és a 125916 rendszámokat figyeltük meg.

2. A gyártót és a kereskedőt egyaránt érdekli, hogy egy adott árukészletben hány darab selejtes van. Tegyük fel, hogy az árukészlet N darabból áll. Válasszunk ebből véletlenszerűen egy n-elemű ($1 \leq n < N$) mintát. Megszámoljuk, hány selejtes van a mintában. Legyen m a mintabeli selejtes darabok száma. Adjunk maximum-likelihood becslést a teljes készletben lévő selejtesek számára! Konkrét példaként tekintsük azt az esetet, amikor a készlet 2000 darabból áll és 20-elemű mintát veszünk.

3. A kékbálnaállomány becslésére a következő módszert alkalmazták: néhány napon át kb. 30 cm hosszú fémhengereket lőttek be a bálnák zsírpárnájába, közvetlenül a bőr alá. Feljegyezték, hogy hány bálnát jelöltek meg (M). Ezután felszólították a bálnahalászhajókat, hogy adják meg, hány bálnát fogtak (n), s azok közt hány volt megjelölve (k). Adjunk maximum-likelihood becslést a bálnák N számára!

4. Egy tóban a halakat betegség támadta meg, mely az egyes egyedeket ismert $p \quad (0 < p < 1)$ valószínűséggel pusztítja el. A kifogott haltetemek k számából adjunk maximum-likelihood becslést a betegség előtt a tóban élő halak számára! Adjuk meg a konkrét becslést, ha $k = 100$ és $p = 0,05$.

5. A színvakság gyakorisága egy populációban genetikai tényezők miatt p a férfiaknál és p^2 a nőknél. Adjuk meg a p maximum-likelihood becslését az alapján, hogy M férfiból m és N nőből n volt színvak.

6. Egy céllövő egy számára ismeretlen puskával először n_1 lövést ad le egy célra, minden egyes lövésének találati valószínűsége p. Ezután újra lő, ezúttal n_2 lövést ad le és αp a lövések találati valószínűsége. Jelöljük a találatok számát az egyes sorozatokban x_1-el illetve x_2-vel.

   a) A p paramétert ismertnek feltételezve adjunk max-likelihood becslést α-ra!

   b) Tegyük fel, hogy p is ismeretlen és becsüljük mindkét paramétert!

   c) Adjuk meg a konkrét becsléseket az *a*) illetve *b*) esetekben, ha $n_1 = 15$, $n_2 = 10$, $x_1 = 9$, $x_2 = 8$.

7. Tegyük fel, hogy egy almáskertben a fákat egy fertőzés támadja meg. A fertőzött fák száma Poisson eloszlást követ. Tíz egyforma nagy, egyenként három sorból álló ültetvényben rendre 0, 3, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 2 beteg fát találtak. Adjunk maximum-likelihood becslést az egy sorban található fertőzött fák számának várható értékére.

8. Egy céllövő p valószínűséggel talál el egy célpontot egy lövésből. Adjunk maximum-likelihood becslést p-re, ha az első találat k-adikra következett be!

9. Egy valószínűségi kísérletet addig végzünk, míg egy esemény kétszer be nem következik, és lejegyezzük a próbálkozások számát. Ezt n-szer megismételjük, így kapjuk az $x_1, \ldots, x_n$ mintát. A minta alapján adjunk maximum-likelihood becslést az esemény valószínűségére! Milyen eloszlást kapnánk, ha csak azon kísérletek számát írnánk le, amikor nem következett be az esemény?

10. Határozzuk meg egy ismeretlen helyzetű 1 hosszúságú intervallum felezőpontjának maximum-likelihood becslését! Adjunk konkrét becslést, ha a következő minta áll rendelkezésünkre: 1,1; 1,9; 1,3; 1,5; 1,7; 1,99.

11. Igazoljuk, hogy a $(0, \Theta)$ intervallumon egyenletes eloszlás Θ paraméterének maximum-likelihood becslése erősen konzisztens!

12. Egy alkatrészekből álló sokaság 6 mintapéldányának következő volt a teljes élettartama: 39, 45, 67, 50, 50, 60 (hónap). Tegyük fel, hogy az élettartam exponenciális eloszlású egy ismeretlen λ paraméterrel. Számoljuk ki a λ paraméter maximum-likelihood becslését!

13. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású η/t, ha t hőmérsékleten működtetjük.

    a) Hogyan függ a várható élettartam a t hőmérséklettől?

    b) Tegyük fel, hogy n megfigyelést különböző $t_1, t_2, \ldots, t_n$ hőmérsékleten végeztünk és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ élettartamot figyeltünk meg. Adjunk maximum-likelihood becslést η-ra!

    c) Adjunk meg konkrét becslést η-ra, ha a következő megfigyelések adódtak:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
élettartam (év)	2,3	9,8	0,8	10,2	8,1	7,7	1,2
hőmérséklet (C)	20	25	17	26	23	22,5	19

1. táblázat.

14. Egy laborban a mérést általában az (ismert) σ szórású műszeren végzik. n ilyen mérés elvégzése után (a független, azonos $N(\mu, \sigma)$ eloszlású adatok: $x_1, \ldots, x_n$) elromlott a készülék és csak a régi, $k\sigma$ (szintén ismert) szórású műszert lehetett használni. Ezzel a műszerrel az $y_1, \ldots, y_m$ adatokhoz jutottunk (μ változatlan). Adjunk maximum-likelihood becslést μ-re. Adjuk meg a konkrét becslést, ha a következő minta áll rendelkezésünkre: 1,1; 1,9; 1,3; 1,5; 1,7; 1,99 és 1,1; 0,9; 1,3; 1,5; 1,7; 1,99; 2,1; 1,9; 2,3 a régi műszerrel mért minta ($\sigma = 0,2$, $k = 1,2$).

15. Egy város energiafogyasztása normális eloszlású ismeretlen μ várható értékkel és a korábbi tapasztalatok alapján ismert σ szórással. n napon át végeztünk méréseket $x_1, \ldots, x_n$ eredménnyel, majd $n+1$. naptól m napon át csak a város egyik kerületéből érkeztek adatok, ahol a fogyasztás várható értéke az egész városénak a fele: $y_1, \ldots, y_m$ a kapott adatsor (tételezzük fel, hogy a szórás itt is σ). Adjunk maximum-likelihood becslést μ-re.

16. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mintánk az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2\eta}, & \text{ha } -\eta \leq x \leq \eta, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

($\eta > 0$) sűrűségfüggvényű eloszlásból. Adjunk maximum-likelihood becslést az ismeretlen η parameterre.

17. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ az

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha \cdot x(1-x^2)^{\alpha-1}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű eloszlásból vett minta. Adjunk maximum-likelihood becslést az ismeretlen $\alpha > 0$ paraméterre.

18. Tekintsük egy 0 várható értékű, 1 szórású valószínűségi változókból statisztikai mintát. Hány mintaelem szükséges ahhoz, hogy ha az elemszámot n-nel jelöljük, a mintaátlag abszolutértéke legalább 0,99 valószínűséggel kisebb legyen, mint $n^{-1/4}$? Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség és a centrális határeloszlástétel segítségével!

19. Diákok egy csoportjának megmérték a testsúlyát és magasságát. Határozzuk meg a jellemzők empirikus eloszlásfüggvényét, empirikus várható értékét és empirikus szórását!

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
testsúly (kg)	90	45	70	45	40	54	60	53	53	58	56	78
magasság (cm)	175	160	180	160	157	165	168	161	157	175	158	187

2. táblázat.

20. Jellemezzük a 2. táblázatbeli mutatók kapcsolatának szorosságát! Adjunk becslést a lineáris regressziós egyenes paramétereire!

21.* Annak a valószínűsége, hogy egy ember túlsúlyos p (akkor túlsúlyos valaki, ha a testtövegindex = testtömeg(kg)/magasság(m)^2 $>$ 25). Becsüljük meg a 2. táblázatbeli adatok alapján p-t, illetve adjunk olyan konfidencia-intervallumot, amely 0,95 valószínűséggel tartalmazza azt.

22. Tudjuk, hogy a testmagasság és a testsúly (közelítőleg) normális eloszlást követ. Adjunk meg egy olyan intervallumot, amely a 2. táblázatbeli magasságok várható értékét 0.95 valószínűséggel tartalmazza! Hogy változna a becslés, ha ismernénk a szórást? Adjunk egy ilyen intervallumot a szórásra is! Ugyanez a feladat a testsúlyra!

23. A 2. táblázatbeli adatok szórása legyen a becsült szórás. Teszteljük azt a nullhipotézist 5%-os szignifikancia-szinten, mely szerint a magasság várható értéke 170 cm! Teszteljük azt a nullhipotézist is, hogy a testsúly várható értéke 45 kg! Adjunk becslést úgy is, ha nem ismerjük a szórást!

24. Hogy változnának az előző feladatbeli tesztek, ha nem tudnánk, hogy a testmagasság és a testsúly normális eloszlást követ?

25. Egy, a 2. táblázatbelitől különböző csoportban a diákok magassága rendre 166, 165, 155, 177, 155, 165, 164, 164, 166, 158, 163, 155, 161, 170 cm. 5%-os szignifikancia-szinten teszteljük azt a nullhipotázist, hogy a két csoport magasságának szórása megegyezik!

26. Tegyük fel, hogy a 2. táblázatbeli és a 25. feladatbeli csoportokban megegyezik a magasság szórása. Teszteljük azt a nullhipotézist 5%-os szignifikancia-szinten, amely szerint a két csoportban a magasság várható értéke megegyezik!

27. Tekinthető-e a 2. táblázatban a testsúly normális eloszlásúnak 0,95 biztonsági szinten?

28. Tekinthetőek-e a 10. feladatban megadott értékek a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak 0,95 biztonsági szinten?

29. Tekinthetőek-e a 7. feladatban megadott értékek Poisson eloszlásúnak a becsült paraméterrel 0,95 biztonsági szinten?

30. Tekinthetőek-e a 12. feladatban megadott értékek exponenciális eloszlásúnak 0,95 biztonsági szinten?

31. Egy dobókockával 9-szer dobtunk. A dobott számok között egy 1-es, három 2-es, egy 3-as, két 4-es és két 5-ös volt. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a kocka szabályos (mind a hat érték valószínűsége egyenlő)!

32. Legyen A egy esemény ismeretlen $p = P(A)$ valószínűséggel. A Moivre-Laplace tétel felhasználásával konstruáljunk tesztet a következő nullhipotézis ellenőrzésére: $H_0 : p = p_0$. (ld. a centrális határeloszlás tételen alapuló próbákat!) Végezzük el a tesztet 1%-os szignifikancia-szint mellett annak ellenőrzésére, hogy egy pénzérme szabályos, ha azt figyeltük meg, hogy 100-ból 61 esetben dobtunk fejet. Teszteljük az előző feladatbeli értékekre azt a nullhipotézist, hogy a 6-os dobás valószínűsége $1/6$.