Sorbaállítások, átrendezések
(permutációk)

Kombinatorika

6-7. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2024. március 20-27.

Definíció. Egy H véges halmaz sorbaállításán egy olyan H elemeiből álló sorozatot értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Definíció. Egy H véges halmaz sorbaállításán egy olyan H elemeiből álló sorozatot értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

$$a, b, c \qquad a, c, b \qquad b, a, c \qquad b, c, a \qquad c, a, b \qquad c, b, a$$

Definíció. Egy H véges halmaz sorbaállításán egy olyan H elemeiből álló sorozatot értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

$$a, b, c \qquad a, c, b \qquad b, a, c \qquad b, c, a \qquad c, a, b \qquad c, b, a$$

Konvenció. A sorozatelemeket elválasztó vesszőket általában nem írjuk ki a sorbaállításokban:

$$abc \qquad acb \qquad bac \qquad bca \qquad cab \qquad cba$$

Definíció. Egy H véges halmaz sorbaállításán egy olyan H elemeiből álló sorozatot értünk, amely H minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz sorbaállításai (6 db van):

$$a, b, c \qquad a, c, b \qquad b, a, c \qquad b, c, a \qquad c, a, b \qquad c, b, a$$

Megjegyzés. Egy n hosszú sorozatra tekinthetünk egy $[n]$-en értelmezett függvényként. (Valójában ez a sorozatok formális definíciója: az i-edik sorozatelem nem más, mint az i számhoz rendelt függvényérték.)

$$d, b, e, a, c, f \quad \equiv \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & b & e & a & c & f \end{array}$$

Ekvivalens def. Egy n elemű H halmaz sorbaállítása egy $[n] \to H$ bijekció.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).

Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \ldots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

$a_n \_\, \_\, \_\, \_$	$\_\, a_n \_\, \_\, \_$	$\_\, \_\, a_n \_\, \_$	$\ldots$	$\_\, \_\, \_\, \_\, a_n$
alakúak	alakúak	alakúak		alakúak

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).
Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \ldots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

a_n _ _ _ _ alakúak	_ a_n _ _ _ alakúak	_ _ a_n _ _ alakúak	$\ldots$	_ _ _ _ a_n alakúak

Így n osztályba soroltuk H sorbaállításait. Mindegyik osztályban $(n-1)!$ sorbaállítás van: Ugyanis azon sorbaállításokat, amelyekben az a_n elem a rögzített i-edik helyen áll, úgy kapjuk meg, hogy a maradék $n-1$ helyre (a _ pozíciókba) beírjuk az $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ halmaz tetszőleges sorbaállítását; és az indukciós feltevés szerint $(n-1)!$ sorbaállítása van az $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ halmaznak.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk az állítást (az $n = 1$ eset nyilvánvaló).

Legyen $n \geq 2$. A $H = \{a_1, \ldots, a_n\}$ halmaz sorbaállításait osztályozzuk aszerint, hogy az általunk kitüntetett a_n elem hányadik helyen áll a sorbaállításban:

a_n _ _ _ _ alakúak	_ a_n _ _ _ alakúak	_ _ a_n _ _ alakúak	...	_ _ _ _ a_n alakúak

Így n osztályba soroltuk H sorbaállításait. Mindegyik osztályban $(n-1)!$ sorbaállítás van: Ugyanis azon sorbaállításokat, amelyekben az a_n elem a rögzített i-edik helyen áll, úgy kapjuk meg, hogy a maradék $n-1$ helyre (a _ pozíciókba) beírjuk az $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ halmaz tetszőleges sorbaállítását; és az indukciós feltevés szerint $(n-1)!$ sorbaállítása van az $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ halmaznak.

Tehát H sorbaállításainak száma $n \cdot (n-1)! = n!$, a bizonyítandó. □

A következő formula megadja az $n!$ nagyságrendjét, amely a faktoriális függvény nagy értékeinek becslésekor, illetve határérték-számításkor is hasznos:

Stirling-formula*. $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Jelmagyarázat. A fenti tételben a $\sim$ jelölés azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

A következő formula megadja az $n!$ nagyságrendjét, amely a faktoriális függvény nagy értékeinek becslésekor, illetve határérték-számításkor is hasznos:

Stirling-formula*. $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Jelmagyarázat. A fenti tételben a $\sim$ jelölés azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Feladat. A Stirling-formula segítségével mutassuk meg, hogy

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Definíció. A H feletti M multihalmaz sorbaállításán egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló sorozatot értünk, amelyben minden H-beli elem pontosan annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása M-ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\mathrm{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:

$$baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcdbcaac, \quad \ldots$$

Definíció. A H feletti M multihalmaz sorbaállításán egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló sorozatot értünk, amelyben minden H-beli elem pontosan annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása M-ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:

$$baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcdbcaac, \quad \ldots$$

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \ldots \cdot M(h_n)!}.$$

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaznak $\frac{9!}{3!2!3!1!}$ darab sorbaállítása van.

Definíció. A H feletti M multihalmaz sorbaállításán egy $|M|$ hosszú, H elemeiből álló sorozatot értünk, amelyben minden H-beli elem pontosan annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása M-ben.

Példa. Az $M = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}_{\text{multi}}$ multihalmaz néhány sorbaállítása:

$$baacdacbc, \quad babacccda, \quad abcdbcaac, \quad \ldots$$

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ feletti M multihalmaz sorbaállításainak száma

$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \ldots \cdot M(h_n)!}.$$

Bizonyítás. Ha megkülönböztetnénk M elemeit (például a fenti M multihalmaz helyett az $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1\}$ halmaz elemeit állítanánk sorba), akkor a számláló, $|M|!$ lenne a sorbaállítások száma. A megkülönböztetés megszüntetése (az „indexek törlése”) után így minden megszámolandó M-sorbaállítást pontosan $(M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \ldots \cdot M(h_n)!)$-szor számoltunk. $\square$

Trinomiális tétel.
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!}\, x^i y^j z^k.$$

Trinomiális tétel.
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Példa.

$$(x+y+z)^3 = \frac{3!}{3!0!0!}x^3 + \frac{3!}{0!3!0!}y^3 + \frac{3!}{0!0!3!}z^3 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y + \frac{3!}{2!0!1!}x^2z +$$
$$+ \frac{3!}{1!2!0!}y^2x + \frac{3!}{0!2!1!}y^2z + \frac{3!}{1!0!2!}z^2x + \frac{3!}{0!1!2!}z^2y + \frac{3!}{1!1!1!}xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$$

Trinomiális tétel.
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:
$$\begin{aligned}(x+y+z)^n &= (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots xz + \dots + zzz\dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x, y vagy z. (Ez 3^n darab tag.)

Trinomiális tétel.
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^n &= (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots xz + \dots + zzz\dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x, y vagy z. (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban” felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k-ra, ahol $i+j+k=n$, hiszen összesen n tényezőből áll a tag.

Trinomiális tétel.
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:
$$\begin{aligned}(x+y+z)^n &= (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots xz + \dots + zzz\dots zz.\end{aligned}$$

Az így kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok, amelyekben mindegyik tényező x, y vagy z. (Ez 3^n darab tag.) Minden tag „hatvány alakban" felírva $x^i y^j z^k$ alakú, valamely i, j, k-ra, ahol $i+j+k=n$, hiszen összesen n tényezőből áll a tag. Egy rögzített i, j, k kitevőhármasra pontosan annyi tagból fog $x^i y^j z^k$ adódni így, ahány olyan x, y és z „betűkből" álló n betűs „szó" van, amelyben i darab x, j darab y és k darab z szerepel. Ez a szám pedig $\frac{n!}{i!j!k!}$, ugyanis a keresett szavak éppen az i db x, j db y és k db z betű lehetséges sorbaállításai. Összevonás után adódik a tétel jobb oldala. $\square$

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!}\, x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!}\, x^i y^j z^k.$$

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomiális tétel.

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

A binomiális tétel és a trinomiális tétel közös általánosítása a következő:

Polinomiális (vagy multinomiális) tétel.

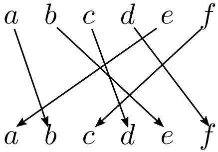
$$(x_1+x_2+\cdots+x_d)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_d=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_d!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_d^{k_d}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan adódik. □

Def. Egy H véges halmaz átrendezésén (vagy permutációján) egy $H \to H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

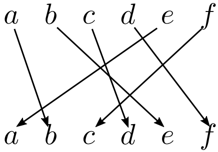
$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & f & a & c \end{array} \qquad \equiv$$



Def. Egy H véges halmaz átrendezésén (vagy permutációján) egy $H \to H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & f & a & c \end{array} \equiv$$

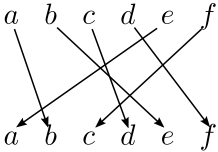


Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát S_n-nel jelöljük.

Def. Egy H véges halmaz átrendezésén (vagy permutációján) egy $H \to H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & f & a & c \end{array} \quad \equiv$$



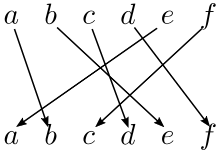
Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát S_n-nel jelöljük.

Megjegyzés. $[n]$ átrendezése tehát egy $[n] \to [n]$ bijekció. Az 1. dia 'Ekvivalens def.' pontja alapján egy $[n] \to [n]$ bijekciót lehet $[n]$ sorbaállításaként is „olvasni". Tehát $[n]$ sorbaállításai és átrendezései között tulajdonképpen nincs különbség formálisan, ezért nem meglepő a következő:

Def. Egy H véges halmaz átrendezésén (vagy permutációján) egy $H \to H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & f & a & c \end{array} \quad \equiv$$



Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát S_n-nel jelöljük.

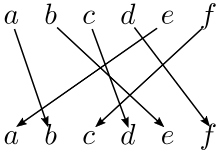
Megjegyzés. $[n]$ átrendezése tehát egy $[n] \to [n]$ bijekció. Az 1. dia 'Ekvivalens def.' pontja alapján egy $[n] \to [n]$ bijekciót lehet $[n]$ sorbaállításaként is „olvasni”. Tehát $[n]$ sorbaállításai és átrendezései között tulajdonképpen nincs különbség formálisan, ezért nem meglepő a következő:

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

Def. Egy H véges halmaz átrendezésén (vagy permutációján) egy $H \to H$ bijekciót értünk.

Példa. Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz egy átrendezése:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & f & a & c \end{array} \quad \equiv$$



Jelölés. $[n]$ átrendezéseinek halmazát S_n-nel jelöljük.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése van.

A következő (kicsit) általánosabb tételt fogjuk belátni:

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

Megjegyzés. $|A| \neq |B|$ esetén az $A \to B$ bijekciók száma 0.

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi\colon A \to B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \dots, b_n\}$ halmaz egy sorbaállítása. (Miért?)

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_2 & b_5 & b_4 & b_6 & b_1 & b_3 \end{array}$$

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi\colon A \to B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ halmaz egy sorbaállítása. (Miért?)

$$
\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{b_2} & b_5 & b_4 & b_6 & b_1 & \multicolumn{1}{c|}{b_3} \\
\hline
\end{array}
$$

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

1. bizonyítás: Ezt már lényegében bebizonyítottuk a sorbaállításoknál:

Legyen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Ekkor egy $\phi\colon A \to B$ függvény egyértelműen megadható a $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$ vektorral. A ϕ függvény pontosan akkor bijekció, ha ez a $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$ vektor a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ halmaz egy sorbaállítása. (Miért?)

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{b_2} & b_5 & b_4 & b_6 & b_1 & \multicolumn{1}{c|}{b_3} \\ \hline \end{array}$$

És mivel az n elemű $\{b_1, \ldots, b_n\}$ halmaznak $n!$ darab sorbaállítása van, a bizonyítandót kapjuk. $\square$

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \to B$ bijekciót.

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \to B$ bijekciót.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr] & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6
\end{tikzcd}$$

Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

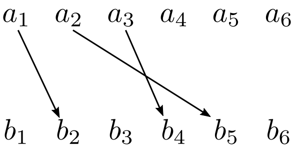
2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \to B$ bijekciót.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr] & a_2 \arrow[drrr] & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6
\end{tikzcd}$$

Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.
Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n-1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B-beli elem lehet).

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

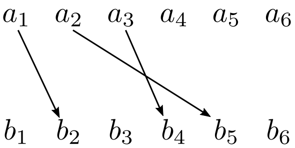
2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \to B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.
Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n-1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B-beli elem lehet).
Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n-2)$-féleképp választhatjuk meg ...
És így tovább, ez összesen $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Tétel. Ha A és B két n-elemű halmaz, akkor az $A \to B$ bijekciók száma $n!$.

2. bizonyítás: Legyen ismét $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és próbáljuk meg előállítani az összes $A \to B$ bijekciót.



Az a_1 elem képének megválasztására n lehetőség van.
Bárhogy is választottuk meg az a_1 képét, az a_2 elem képének megválasztására $n-1$ lehetőség van (az a_1 képétől különböző tetszőleges B-beli elem lehet).
Hasonlóan, ezek után az a_3 elem képét $(n-2)$-féleképp választhatjuk meg ...
És így tovább, ez összesen $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség. $\square$

Ezzel látszólag az $A \to B$ injektív fgveket számoltuk meg, de $|A| = |B| = n$ miatt egy $A \to B$ injektív fgv automatikusan szürjektív is, tehát bijektív.

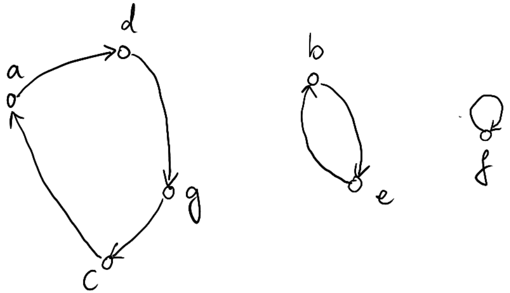
Definíció. Egy $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramján a következő ábrát értjük:

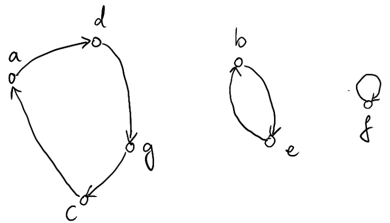
- H minden elemére felveszünk egy karikát (és megcímkézzük az elemmel).
- Minden $h \in H$ elemhez húzunk egy nyilat a h-hoz tartozó karikából a $\phi(h)$-hoz tartozó karikába.

Példa. A $H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ halmaz

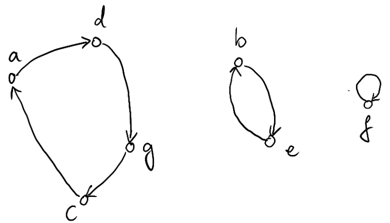
$$a \mapsto d, \quad b \mapsto e, \quad c \mapsto a, \quad d \mapsto g, \quad e \mapsto b, \quad f \mapsto f, \quad g \mapsto c$$

átrendezésének diagramja:





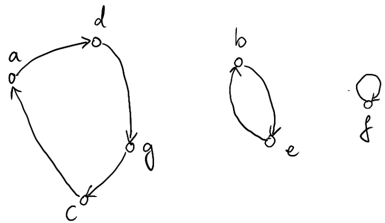
Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket'' (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció ciklusainak nevezzük.



Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket" (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció ciklusainak nevezzük.

Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \ldots, r_l\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (l hosszú) ciklusát alkotják, ha

$$\phi(r_1) = r_2,\ \ \phi(r_2) = r_3,\ \ \phi(r_3) = r_4,\ \ \ldots\ \ , \phi(r_{l-1}) = r_l,\ \ \phi(r_l) = r_1.$$



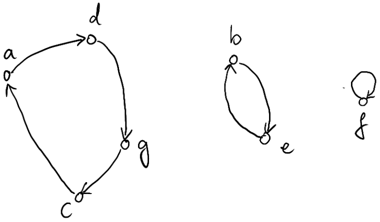
Informálisan, egy ϕ permutáció diagramjában megjelenő „köröket” (egyirányba mutató nyilakkal) a permutáció ciklusainak nevezzük.

Definíció. Legyen ϕ a H halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $\{r_1, \ldots, r_l\} \subseteq H$ elemek ϕ egy (l hosszú) ciklusát alkotják, ha

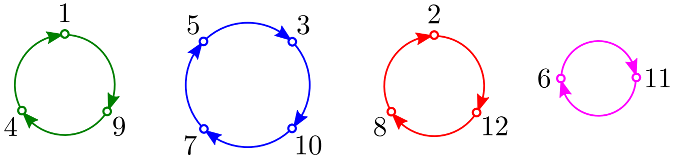
$$\phi(r_1) = r_2,\ \ \phi(r_2) = r_3,\ \ \phi(r_3) = r_4,\ \ \ldots\ \ , \phi(r_{l-1}) = r_l,\ \ \phi(r_l) = r_1.$$

Példa. A fenti permutációban az $\{a, d, g, c\}$ elemek egy 4 hosszú ciklust, a $\{b, e\}$ elemek egy 2 hosszú ciklust, az $\{f\}$ elem egy 1 hosszú(!) ciklust alkotnak.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.



Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat": a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$

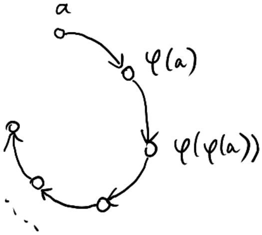
Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$



Egy darabig új elemekre lépünk, de H végessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe először visszalépünk, csak a kinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

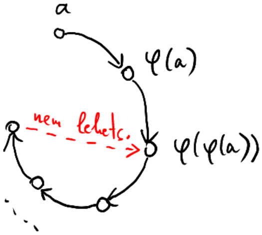
Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$



Egy darabig új elemekre lépünk, de H végessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe először visszalépünk, csak a kinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

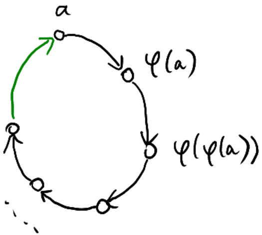
Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat": a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$



Egy darabig új elemekre lépünk, de H végessége miatt előbb-utóbb biztosan olyan elemre lépünk, ahol már jártunk. Könnyű meggondolni, hogy az az elem, amelybe először visszalépünk, csak a kinduló a elem lehet (ii) miatt (különben lenne olyan elem, amely egynél több elemhez hozzá van rendelve).

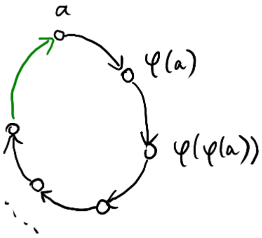
Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$



Ezzel egy ciklust találtunk (a ciklusát)! Legyen ez a ciklus C. Ha C tartalmazza H összes elemét, akkor készen vagyunk. (Tfh nem.) Mivel C minden karikájába már megy be is és ki is 1-1 nyíl, így más nyilak nem illeszkednek C elemeire. Ebből következik, hogy ϕ megszorítása $(H \setminus C)$-re a $H \setminus C$ egy permutációja lesz.

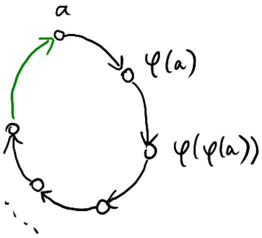
Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Bizonyítás. Először egy permutáció diagramjának alaptulajdonságait gondoljuk végig. Tetszőleges $\phi\colon H \to H$ permutáció diagramjára igazak a következők:

(i) Minden karikából pontosan egy nyíl indul ki (hiszen ϕ függvény).

(ii) Minden karikába pontosan egy nyíl érkezik be (hiszen ϕ bijektív).

A tétel bizonyításához ϕ diagramjában egy rögzített $a \in H$ elemből kiindulva „mindig kövessük a kivezető nyilat”: a, $\phi(a)$, $\phi(\phi(a))$, $\phi(\phi(\phi(a)))$, $\ldots$



Folytassuk a ciklusok keresését a C-n kívüli részben: Egy tetszőleges C-n kívüli a' elemből indulva kövessük a nyilakat $\ldots$ Az előző gondolatmenet szerint ezek ismét egy „ciklussá záródnak be”. És így tovább, megkapjuk ϕ keresett ciklusokra bontását. (Alaphalmaz elemszáma szerinti indukcióval lehet a leírást tömören befejezni.) $\square$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható egy algoritmus, amellyel egy permutáció ciklusait megtalálhatjuk.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\left[{n \atop k}\right]$-val jelöljük.

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása" is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\left[{n \atop k}\right]$-val jelöljük.

Ne felejtsük el, hogy az algebristáktól eltérően mi az 1 hosszú ciklusokat is mindig figyelembe vesszük!

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\left[{n \atop k}\right]$-val jelöljük.

Állítás.
$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

Tétel. Minden (véges) permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bomlik.

Megjegyzés. Egy permutáció páronként diszjunkt ciklusokra bontása egyértelmű. (Ez nyilvánvaló.)

Megjegyzés. A tétel „megfordítása” is igaz: Minden olyan diagram, amely ciklusok (irányított körök) diszjunkt uniója, az egy permutációt definiál.

Def. Az $[n]$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát $\left[{n \atop k}\right]$-val jelöljük.

Állítás.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

Tétel*.

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$