Multihalmazok

Kombinatorika

5. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. március 13.

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.")

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Megjegyzés. Technikai okokból a 0 multiplicitást is megengedjük, így a H halmaz nem egyértelmű. Például a fenti M multihalmaz alaphalmazába belevehetjük Budapestet is, azzal, hogy az M-beli multiplicitása 0.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális. $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \mathrm{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \mathrm{Mars} \mapsto 1, \quad \mathrm{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Most következik még néhány definíció, de ezeket nem memorizálni kell, hanem látni, hogy csupán a szemléletes multihalmaz képünk fogalmait ültetjük át a precíz környezetbe.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$
Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Definíciók/elnevezések. Legyen $M \colon H \to \mathbb{N}$ egy H feletti multihalmaz.

- Egy $h \in H$ elemre az $M(h)$ függvényérték a h elem M-beli multiplicitása.
- Akkor mondjuk, hogy a $h \in H$ elem eleme M-nek, ha $M(h) > 0$.
- Az M multihalmaz $|M|$-mel jelölt elemszáma az alaphalmaz-elemek M-beli multiplicitásainak összege:

$$|M| := \sum_{h \in H} M(h).$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ multihalmaz egy részmultihalmaza az $N = \{1, 1, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ multihalmaz.

$$\begin{array}{llllll} M\colon & 1 \mapsto 3, & \mathrm{Szeged} \mapsto 2, & \sqrt{3} \mapsto 3, & \mathrm{Mars} \mapsto 1, & \mathrm{Vuk} \mapsto 2. \\ N\colon & 1 \mapsto 2, & \mathrm{Szeged} \mapsto 0, & \sqrt{3} \mapsto 1, & \mathrm{Mars} \mapsto 1, & \mathrm{Vuk} \mapsto 2. \end{array}$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Ez az n elemű halmaz részhalmai számának általánosítása. (Miért?)

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Bizonyítás. Egy N részmultihalmazban a h_i elem $N(h_i)$ multiplicitása 0-tól $M(h_i)$-ig bármi lehet, ami $M(h_i) + 1$ lehetőség, mindegyik $i \in [n]$-re. További megkötés nincs, így a szorzási alapelv adja a bizonyítandót. $\square$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H-ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ahol az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjának.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \mathrm{Mars}, \mathrm{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & \text{Mars} & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & \text{Mars} & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & \text{Mars} & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & \text{Mars} & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

A lényeg az, hogy annyi 11 elemű multihalmaz van a megadott 5 elemű alaphalmaz felett, ahányféleképpen fel tudunk írni egy 5 természetes számból álló sorozatot úgy, hogy a számok összege 11 legyen.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & \text{Mars} & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Általánosan, a következő lemmát kell igazolnunk a fenti tétel bizonyításához:

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

egyenletnek $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ darab megoldása van a természetes számok(ból álló szám-n-esek) halmazán.

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \ldots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mapsto \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{m_1 \text{ db}}, \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{m_2 \text{ db}}, \ldots, \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{m_n \text{ db}}$$

Például ($n = 5$, $k = 11$ esetén),

$$(3,2,3,1,2) \mapsto \bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet,\bullet,\bullet\bullet$$

$$(3,2,3,2,1) \mapsto \bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet$$

$$(0,5,0,2,4) \mapsto ,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet,,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$\vdots$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \ldots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_1\ \mathrm{db}}, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_2\ \mathrm{db}}, \ldots, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_n\ \mathrm{db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám-n-eseket, amelyekre az elemek összege k, ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \;\mapsto\; \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám-n-eseket, amelyekre az elemek összege k, ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Az ilyen jelsorozatok száma pedig $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen ennyiféleképpen lehet $n-1$ vesszőt és k pöttyöt leírni valamilyen sorrendben: Ennyiféleképpen tudjuk kijelölni a k pötty helyét az $n+k-1$ karakterből álló jelsorozatban. $\square$