Binomiális együtthatók

Kombinatorika

3. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. február 28.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Megjegyzés. Középiskolában egy n elemű halmaz k elemű részhalmazát az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációjának is nevezik. (Brrr.)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n-nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n-nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Jelölés. Ha H egy véges halmaz, k pedig egy természetes szám, akkor $\binom{H}{k}$ jelöli a H halmaz k-elemű részhalmazainak halmazát, azaz

$$\binom{H}{k} := \{R \subseteq H : |R| = k\}.$$

Például $\binom{[n]}{k}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazainak halmaza.

Tehát $\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$.

A Pascal-háromszög:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Bizonyítás. Világos, hogy egy n elemű halmaznak 1 db 0 elemű részhalmaza van (az üres halmaz), és 1 db n elemű részhalmaza van (saját maga).

$$
\begin{matrix}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \color{blue}{\binom{4}{2}} & \color{red}{+} & \color{blue}{\binom{4}{3}} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \color{blue}{\binom{5}{3}} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{matrix}
\quad = \quad
\begin{matrix}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \color{blue}{6} & \color{red}{+} & \color{blue}{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \color{blue}{10} & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{matrix}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \color{blue}{\binom{4}{2}} & \color{red}{+} & \color{blue}{\binom{4}{3}} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \color{blue}{\binom{5}{3}} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \color{blue}{6} & \color{red}{+} & \color{blue}{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \color{blue}{10} & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Lásd következő dia.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\color{red}{\binom{5}{0}} & & \color{green}{\binom{5}{1}} & & \color{blue}{\binom{5}{2}} & & \color{blue}{\binom{5}{3}} & & \color{green}{\binom{5}{4}} & & \color{red}{\binom{5}{5}} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\color{red}{1} & & \color{green}{5} & & \color{blue}{10} & & \color{blue}{10} & & \color{green}{5} & & \color{red}{1} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

Bizonyítás. Egy n elemű halmaz $n-k$ elemű részhalmazai éppen a k elemű részhalmazok komplementerei. Precízebben fogalmazva, az $A \mapsto \overline{A}$ leképezés egy $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$ bijekció, ahol $\overline{A} := [n] \setminus A$. (Miért?)

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\vdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
\quad \xrightarrow{\Sigma} 2^5
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\xrightarrow{\Sigma} 2^5
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Bizonyítás. Mindkét oldal $[n]$ részhalmazait számolja meg (ld. előző előadás). $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k-elemű részhalmazait számolja meg.

Bal oldal: Ez az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható definíciója. ✓

Jobb oldal: Az $\binom{n-1}{k}$ tag az $[n]$ halmaz azon k-elemű részhalmazait számolja meg, amelyek nem tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok éppen az $n-1$ elemű $\{2, 3, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazai.)

Az $\binom{n-1}{k-1}$ tag az $[n]$ halmaz azon k-elemű részhalmazait számolja meg, amelyek tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok $\{1\} \dot\cup R$ alakúak, ahol R a $\{2, 3, \ldots, n\}$ halmaz tetszőleges $(k-1)$-elemű részhalmaza lehet.) ✓ □

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k-elemű részhalmazait számolja meg.

1	2	3	4	5	
●	●	●	○	○	
●	●	○	●	○	
●	●	○	○	●	
●	○	●	●	○	
●	○	●	○	●	$\binom{5}{3}$ db
●	○	○	●	●	
○	●	●	●	○	
○	●	●	○	●	
○	●	○	●	●	
○	○	●	●	●	

1	2	3	4	5	
●	●	●	○	○	
●	●	○	●	○	
●	●	○	○	●	$\binom{4}{2}$ db
●	○	●	●	○	
●	○	●	○	●	
●	○	○	●	●	
○	●	●	●	○	
○	●	●	○	●	$\binom{4}{3}$ db
○	●	○	●	●	
○	○	●	●	●	

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Tétel. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Megjegyzés. Elég az első egyenlőséget bizonyítani, mert a második egyenlőségnél csupán a törtet bővítettük $(n-k)$!-sal.

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

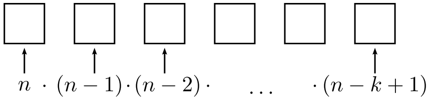
Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy
$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$
Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1,\dots,n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1,\dots,n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n-féle lehet. Bármi is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$-féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k-adik) elemet $(n-k+1)$-féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓



Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1,\dots,n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n-féle lehet. Bármi is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$-féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k-adik) elemet $(n-k+1)$-féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

Ez a (középiskolában is gyakran használt) indoklás nem túl precíz. Gondolkodjunk el azon, hogy hogyan kellene ezt precízen leírni, k szerinti indukcióval.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy
$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$
Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bal oldal: Most aszerint osztályozva számoljuk össze a sorozatokat, hogy mely betűk szerepelnek bennük.

Először kiválasztjuk a sorozatban szereplő k (különböző) betűt: Erre $\binom{n}{k}$ lehetőség van, mert $[n]$ egy k-elemű részhalmazát kell kijelölni.

Bárhogy is választottuk meg a sorozatba kerülő betűket, ezeket $k!$-féle sorrendben lehet leírni (ld. középiskola / későbbi előadás, vagy ismételjük meg a jobb oldalnál alkalmazott gondolatot).

Ebből adódik a bal oldali válasz. ✓ $\square$

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 = 1 \\ 1 < 2 > 1 \\ 1 < 3 = 3 > 1 \\ 1 < 4 < 6 > 4 > 1 \\ 1 < 5 < 10 = 10 > 5 > 1 \\ \vdots \end{array}$$

Megjegyzés. Páros n esetén a fenti egyenlőtlenség-láncban kétszer is szerepel az $\binom{n}{n/2}$ binomiális együttható (a két „középső" elem lesz az), hiszen ekkor $\lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil = n/2$.

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}.$$

Így

$$\binom{n}{k} \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \binom{n}{k+1} \iff \binom{n}{k} \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \iff 1 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{n-k}{k+1} \iff k \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{n-1}{2},$$

ami a bizonyítandót adja. $\square$

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}.$$

Így

$$\binom{n}{k} \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \binom{n}{k+1} \iff \binom{n}{k} \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \iff 1 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \frac{n-k}{k+1} \iff k \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \frac{n-1}{2},$$

ami a bizonyítandót adja. □

Feladat. Adjunk a fenti állításra egy másik bizonyítást a Pascal-háromszög segítségével is (n szerinti indukcióval).

Tétel. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \le k \le n$ esetén (a bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n-et és k-t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

Ekkor

$$\boxed{\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\binom{n_3}{k_3}\dots\binom{n_s}{k_s} \mod 2.}$$

Tétel. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \leq k \leq n$ esetén (a bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n-et és k-t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

Ekkor

$$\boxed{\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\binom{n_3}{k_3}\dots\binom{n_s}{k_s} \mod 2.}$$

Megj. Mivel $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$ és $\binom{0}{1} = 0$, ez azt jelenti, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páros, ha van olyan $i \in [s]$ pozíció, amelyre $n_i = 0$ és $k_i = 1$:

$$\begin{matrix} n_1 n_2 n_3 \dots n_s \\ k_1 k_2 k_3 \dots k_s \end{matrix} = \begin{matrix} \dots\dots 0 \dots \\ \dots\dots 1 \dots \end{matrix}$$

Tétel. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \le k \le n$ esetén (a bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n-et és k-t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

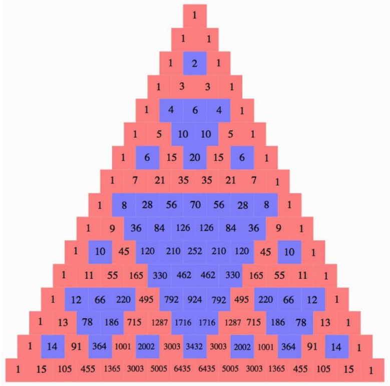
Ekkor

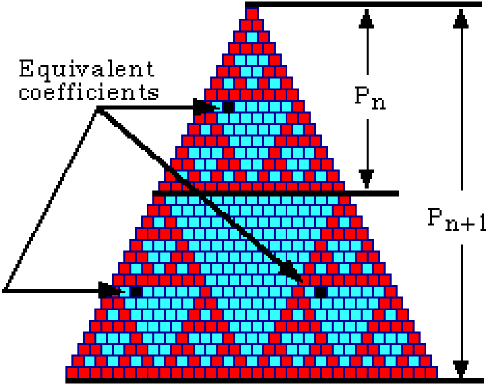
$$\boxed{\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\binom{n_3}{k_3}\dots\binom{n_s}{k_s} \mod 2.}$$

Példa. $\binom{105}{44}$ páros, mert $105 = \overline{1101001}$ és $44 = \overline{0101100}$, és így

$$\binom{105}{44} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{0} \equiv 0 \pmod 2.$$

A paritások szemléltetése a Pascal-háromszögben:





Képek forrása:

https://www.quora.com/How-interesting-is-this-naturally-occurring-Pascal-s-triangle

https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/siertri/Pascalmath.htm

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak" nevezzük.

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Binomiális tétel.
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak" nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots yx + \dots + yyy\dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y. (Ez 2^n darab tag.)

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots yx + \dots + yyy\dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y. (Ez 2^n darab tag.)

Minden ilyen $yxx\dots yxy$ tag „hatvány alakban” felírva $x^{n-k}y^k$ alakú lesz, ahol k az y-ok száma ($k \in \{0,\dots,n\}$). Egy rögzített k-ra tehát annyi tagból fog $x^{n-k}y^k$ adódni, ahány olyan n-tényezős szorzat („szó”) van, amelynek pontosan k db tényezője („betűje”) y, és $n-k$ db tényezője („betűje”) x. Ez a szám pedig $\binom{n}{k}$, mert ennyiféleképpen tudjuk kijelölni az y-ok helyét az n helyből. Ezért az összevonható tagok összevonása után a tétel jobb oldala adódik. $\square$