

A kombinatorika alapelvei. Részhalmazok.

Kombinatorika

1-2. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2024. február 14-21.

Honlapom: <http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/>

Itt megtalálhatók az elérhetőségeim, fogadóórám, illetve az előadás és a gyakorlat honlapja stb. A kurzushonlapokról minden kivetített vagy kiosztott segédanyag letölthető, illetve elérhető a pontos tételsor is (ld. TEMATIKA).

Gyakorlat [max. 50 pont]:

- Két zárthelyi [max. 15 + 15 pont]: március 27. és május 15.
- Házi feladatok [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- Pluszpontok: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Gyakorlat [max. 50 pont]:

- **Két zárthelyi** [max. 15 + 15 pont]: **március 27.** és **május 15.**
- **Házi feladatok** [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- **Pluszpontok**: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Előadás [max. 50 pont]:

- **Vizsga** [max. 50 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (tételhúzással). További részletek a honlapon.
- **Pluszpontok**: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.

Gyakorlat [max. 50 pont]:

- **Két zárthelyi** [max. 15 + 15 pont]: **március 27.** és **május 15.**
- **Házi feladatok** [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- **Pluszpontok**: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik zh javítható/pótolható (a vizsgaidőszakban); a házi feladatok nem.

Előadás [max. 50 pont]:

- **Vizsga** [max. 50 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (tételhúzás-sal). További részletek a honlapon.
- **Pluszpontok**: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.

Érdemjegy:

0 – 49: **(1)** 50 – 62: **(2)** 63 – 75: **(3)** 76 – 87: **(4)** 88 – 100: **(5)**

Jelölések / konvenciók.

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (természetes számok halmaza)

$\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (pozitív egészek halmaza)

$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ (standard n elemű halmaz)

$|A|$ halmaz vagy multihalmaz elemszáma

$\dot{\cup}$ halmazok diszjunkt uniója, pl. $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$. Ez a szokásos halmazelméleti unió, azzal a többletinformációval, hogy az összeuniózott halmazok páronként diszjunktak.

Egy tipikus kombinatorika feladat.

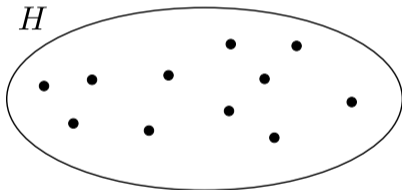
Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.



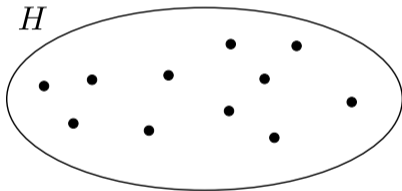
$$|H| = ?$$

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.

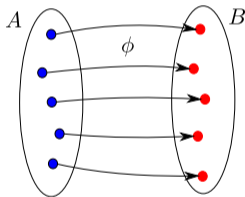


$$|H| = ?$$

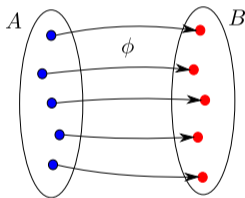
A megszámlolandó objektumokat ugyanis belerakhatjuk egy halmazba. Például a fenti feladatban az **5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmazának** elemszámát kell meghatározni.

Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



- Definíció.** A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha
- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
 - **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).

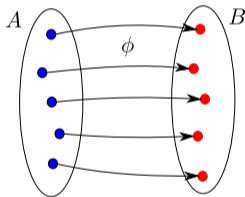


Ekvivalens definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, ha minden B -beli elemnek **pontosan egy** őse van A -ban.

ϕ injektív \equiv Minden B -beli elemnek legfeljebb egy őse van A -ban.

ϕ szürjektív \equiv Minden B -beli elemnek legalább egy őse van A -ban.

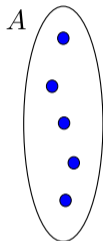
- Definíció.** A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha
- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát tetszőleges $a_1 \neq a_2$ A -beli elemek esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
 - **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



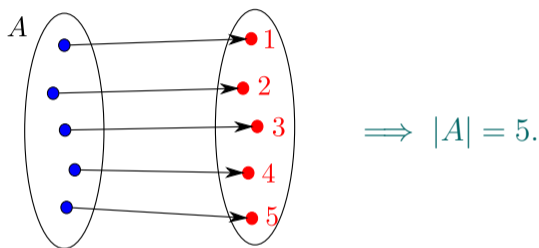
Ekvivalens definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, ha minden B -beli elemnek **pontosan egy** őse van A -ban.

Bijekciós alapelv. Az A, B véges halmazok elemszáma pontosan akkor egyezik meg, ha létezik $A \rightarrow B$ bijekció.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



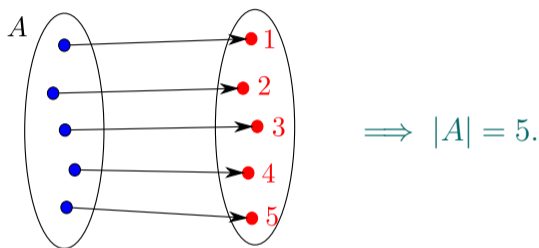
Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



Definíció. Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő” megszámlolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n -re.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz **elemszámán**? Hogyan **definiáljuk** ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)

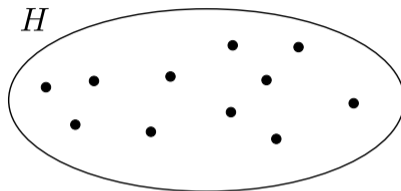


Definíció. Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

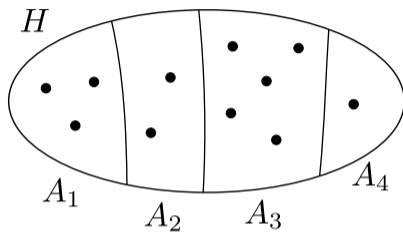
Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő” megszámlolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n -re.

Definíció. Egy A halmaz **véges**, ha $|A| = n$ valamely n természetes számra.

Mikor adunk össze?

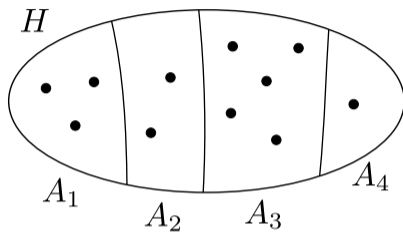


Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

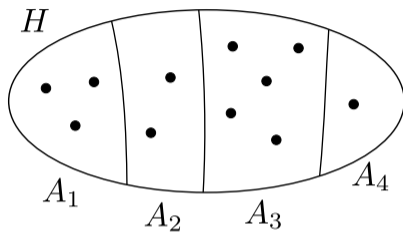
Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az

$$A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq H$$

páronként diszjunkt halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

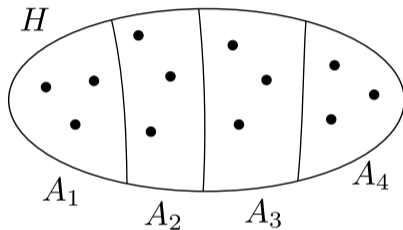
Összeadási alapelv (tömör verzió). Tetszőleges A_1, \dots, A_k véges halmazokra

$$|A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|,$$

ahol $\dot{\cup}$ a diszjunkt uniót jelöli.

Mikor szorzunk?

Mikor szorzunk? 1. Egyrészt akkor, amikor egyforma méretű osztályokat alakítunk ki, és az összeadási alapelv alkalmazásakor ezen osztályok elemszámának összege szorzással adódik. (Általános iskola: A szorzás ismételt összeadás.)



$$|H| = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3.$$

(Ez még nem a szorzási alapelv.)

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges A_1, \dots, A_k véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges A_1, \dots, A_k véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ azon k -asok ($\approx k$ hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1 -ből, második eleme A_2 -ből, ..., k -edik eleme A_k -ből kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges A_1, \dots, A_k véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

A fenti példában ha A_1 jelöli az „egyik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, A_2 jelöli a „másik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, akkor az $A_1 \times A_2$ halmaz elemei (a rendezett párok) a két választás lehetséges **együttes** kimeneteleinek felelnek meg.

Szorzási alapelv. Tetszőleges A_1, \dots, A_k véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Bizonyítás. Osztályozzuk $A_1 \times \dots \times A_k$ elemeit (k -asait) aszerint, hogy mi a k -as első eleme. Ekkor $|A_1|$ darab osztály jön létre, és minden osztályban $|A_2 \times \dots \times A_k|$ darab k -as lesz (a bijekciós alapelvet is használva), így az összeadási alapelv szerint

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2 \times \dots \times A_k|.$$

Ezt a gondolatmenetet megismételve $A_2 \times \dots \times A_k$ -re, kapjuk, hogy

$$|A_2 \times \dots \times A_k| = |A_2| \cdot |A_3 \times \dots \times A_k|.$$

És így tovább (= k szerinti indukció), ebből adódik az állítás:

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| &= |A_1| \cdot |A_2 \times \dots \times A_k| = \\ &= |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3 \times \dots \times A_k| = \dots = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|. \quad \square \end{aligned}$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$(A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) =$$
$$Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta +$$
$$Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta +$$
$$Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta.$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned} (A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\ Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\ Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta. \end{aligned}$$

Észrevétel. Tekintsünk egy olyan n -tényezős szorzatot, ahol mindegyik tényező egy összeg, és bontsuk fel a zárójeleket. A „minden tagot minden taggal össze-szorzunk” lépés úgy is megfogalmazható, hogy vesszük a $Z_1 \times \dots \times Z_n$ halmaz elemeit, ahol Z_i az i -edik zárójel tagjainak halmaza, és minden $(t_1, \dots, t_n) \in Z_1 \times \dots \times Z_n$ n -eshez felvesszük a $t_1 \cdot \dots \cdot t_n$ szorzatot, majd ezeket a szorzatokat $+$ jellel kapcsoljuk össze.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m + 1$ tárgyat osztottunk szét. \square

Csak arról van szó, hogy ha s_i -vel jelöljük az i -edik skatulyában lévő tárgyak számát, akkor

$$s_1 \leq 1, s_2 \leq 1, \dots, s_m \leq 1 \implies s_1 + s_2 + \dots + s_m \leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m.$$

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. a) Ha minden skatulyába N/m -nél (szigorúan) kevesebb tárgy kerülne, akkor összesen kevesebb, mint

$$\overbrace{\frac{N}{m} + \frac{N}{m} + \cdots + \frac{N}{m}}^{m\text{-szer}} = N$$

tárgyunk lenne. □

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. b) Ha minden skatulyába N/m -nél (szigorúan) több tárgy kerülne, akkor összesen több, mint

$$\overbrace{\frac{N}{m} + \frac{N}{m} + \cdots + \frac{N}{m}}^{m\text{-szer}} = N$$

tárgyunk lenne.



Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább N/m (tehát legalább $\lceil N/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb N/m (tehát legfeljebb $\lfloor N/m \rfloor$) tárgy kerül.

Megjegyzés. Az általánosított skatulyaelv csak annak a ténynek a bonyolultabb megfogalmazása, hogy ha vesszük néhány szám átlagát, akkor az átlag a legnagyobb és a legkisebb átlagolt szám között van.

($N/m =$ átlagos skatulyatartalom.)

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H **részhalmazai**.

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H **részhalmozai**.

Definíció. Egy H halmaz **hatványhalmazán** a H összes részhalmozainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$ -val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$\mathcal{P}(H) = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \right\}.$$

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részalmazai:

| | | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> |
|---------------|----------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| \emptyset | | | a | b | c | | ○ | ○ | ○ |
| $\{a\}$ | | | a | b | c | | ● | ○ | ○ |
| $\{b\}$ | | | a | b | c | | ○ | ● | ○ |
| $\{c\}$ | \equiv | | a | b | c | \equiv | ○ | ○ | ● |
| $\{a, b\}$ | | | a | b | c | | ● | ● | ○ |
| $\{a, c\}$ | | | a | b | c | | ● | ○ | ● |
| $\{b, c\}$ | | | a | b | c | | ○ | ● | ● |
| $\{a, b, c\}$ | | | a | b | c | | ● | ● | ● |

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részalmazai:

| | | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> |
|---------------|----------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| \emptyset | | | a | b | c | | ○ | ○ | ○ |
| $\{a\}$ | | | a | b | c | | ● | ○ | ○ |
| $\{b\}$ | | | a | b | c | | ○ | ● | ○ |
| $\{c\}$ | \equiv | | a | b | c | \equiv | ○ | ○ | ● |
| $\{a, b\}$ | | | a | b | c | | ● | ● | ○ |
| $\{a, c\}$ | | | a | b | c | | ● | ○ | ● |
| $\{b, c\}$ | | | a | b | c | | ○ | ● | ● |
| $\{a, b, c\}$ | | | a | b | c | | ● | ● | ● |

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részalmazja van.

| | | | $\frac{a \ b \ c}{\circ \circ \circ}$ | $\frac{a \ b \ c}{0 \ 0 \ 0}$ |
|---------------|-------------|----------|---------------------------------------|-------------------------------|
| \emptyset | $a \ b \ c$ | | $\circ \circ \circ$ | $0 \ 0 \ 0$ |
| $\{a\}$ | $a \ b \ c$ | | $\bullet \circ \circ$ | $1 \ 0 \ 0$ |
| $\{b\}$ | $a \ b \ c$ | | $\circ \bullet \circ$ | $0 \ 1 \ 0$ |
| $\{c\}$ | $a \ b \ c$ | \equiv | $\circ \circ \bullet$ | \equiv $0 \ 0 \ 1$ |
| $\{a, b\}$ | $a \ b \ c$ | | $\bullet \bullet \circ$ | $1 \ 1 \ 0$ |
| $\{a, c\}$ | $a \ b \ c$ | | $\bullet \circ \bullet$ | $1 \ 0 \ 1$ |
| $\{b, c\}$ | $a \ b \ c$ | | $\circ \bullet \bullet$ | $0 \ 1 \ 1$ |
| $\{a, b, c\}$ | $a \ b \ c$ | | $\bullet \bullet \bullet$ | $1 \ 1 \ 1$ |

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részalmazja van.

Bizonyítás. Legyen H egy n elemű halmaz. H egy részalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy a H halmaz minden elemére eldöntjük, hogy belevesszük-e a részalmazba vagy nem („ \bullet vagy \circ ”). Ez n független döntés, mindegyik elemnél kétféle lehetőséggel, ami a szorzási alapelv szerint összesen valóban $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$ lehetőség. \square

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

| | | | <u>a</u> <u>b</u> <u>c</u> | | <u>a</u> <u>b</u> <u>c</u> |
|---------------|---------|----------|---|----------|---|
| \emptyset | $a b c$ | | ○ ○ ○ | | 0 0 0 |
| $\{a\}$ | $a b c$ | | ● ○ ○ | | 1 0 0 |
| $\{b\}$ | $a b c$ | | ○ ● ○ | | 0 1 0 |
| $\{c\}$ | $a b c$ | \equiv | ○ ○ ● | \equiv | 0 0 1 |
| $\{a, b\}$ | $a b c$ | | ● ● ○ | | 1 1 0 |
| $\{a, c\}$ | $a b c$ | | ● ○ ● | | 1 0 1 |
| $\{b, c\}$ | $a b c$ | | ○ ● ● | | 0 1 1 |
| $\{a, b, c\}$ | $a b c$ | | ● ● ● | | 1 1 1 |

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

| | | | <u>a</u> <u>b</u> <u>c</u> | | <u>a</u> <u>b</u> <u>c</u> |
|---------------|-------------|----------|---|----------|---|
| \emptyset | a b c | | ○ ○ ○ | | 0 0 0 |
| $\{a\}$ | a b c | | ● ○ ○ | | 1 0 0 |
| $\{b\}$ | a b c | | ○ ● ○ | | 0 1 0 |
| $\{c\}$ | a b c | \equiv | ○ ○ ● | \equiv | 0 0 1 |
| $\{a, b\}$ | a b c | | ● ● ○ | | 1 1 0 |
| $\{a, c\}$ | a b c | | ● ○ ● | | 1 0 1 |
| $\{b, c\}$ | a b c | | ○ ● ● | | 0 1 1 |
| $\{a, b, c\}$ | a b c | | ● ● ● | | 1 1 1 |

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0.

Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

| | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> |
|---------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| \emptyset | | a | b | c | | 0 | 0 | 0 |
| $\{a\}$ | | a | b | c | | ● | 0 | 0 |
| $\{b\}$ | | a | b | c | | 0 | ● | 0 |
| $\{c\}$ | \equiv | a | b | c | \equiv | 0 | 0 | ● |
| $\{a, b\}$ | | a | b | c | | ● | ● | 0 |
| $\{a, c\}$ | | a | b | c | | ● | 0 | ● |
| $\{b, c\}$ | | a | b | c | | 0 | ● | ● |
| $\{a, b, c\}$ | | a | b | c | | ● | ● | ● |

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0.

Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

| | | $\frac{a \ b \ c}{\hline}$ | $\frac{a \ b \ c}{\hline}$ |
|---------------|---------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| \emptyset | $a \ b \ c$ | $\circ \ \circ \ \circ$ | $0 \ 0 \ 0$ |
| $\{a\}$ | $a \ b \ c$ | $\bullet \ \circ \ \circ$ | $1 \ 0 \ 0$ |
| $\{b\}$ | $a \ b \ c$ | $\circ \ \bullet \ \circ$ | $0 \ 1 \ 0$ |
| $\{c\}$ | $\equiv a \ b \ c \equiv$ | $\circ \ \circ \ \bullet \equiv$ | $0 \ 0 \ 1$ |
| $\{a, b\}$ | $a \ b \ c$ | $\bullet \ \bullet \ \circ$ | $1 \ 1 \ 0$ |
| $\{a, c\}$ | $a \ b \ c$ | $\bullet \ \circ \ \bullet$ | $1 \ 0 \ 1$ |
| $\{b, c\}$ | $a \ b \ c$ | $\circ \ \bullet \ \bullet$ | $0 \ 1 \ 1$ |
| $\{a, b, c\}$ | $a \ b \ c$ | $\bullet \ \bullet \ \bullet$ | $1 \ 1 \ 1$ |

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0.

Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Megjegyzés. A karakterisztikus vektor definiálásához (és értelmezéséhez) le kell rögzíteni az alphalmaz elemeinek egy sorrendjét!

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. □

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. □

Következmény. Az „egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van” állítás bizonyításának (szőrszálhasogatóan) precíz leírása:

Legyen H egy n elemű halmaz. Az előző állítás szerint létezik bijekció $\mathcal{P}(H)$ és a $\{0, 1\}^n$ halmaz között. Így a bijekciós alapelv szerint

$$|\mathcal{P}(H)| = |\{0, 1\}^n| = \overbrace{|\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{|\{0, 1\}| \cdot \dots \cdot |\{0, 1\}|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}^{n\text{-szer}} = 2^n,$$

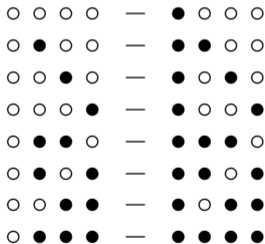
ahol a 3. egyenlőségénél a szorzási alapelvet használtuk. □

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

Tehát pontosan a részhalmazok fele, azaz 2^{n-1} darab részhalmaz páros elemszámú, ahol n a H elemszáma.

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmozosa van, mint ahány páratlan elemszámú.

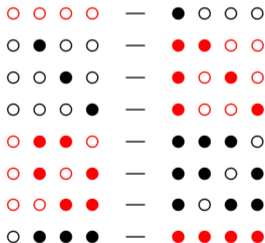
Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H -nak a h_1 -et nem tartalmazó részhalmozait párbaállítjuk a h_1 -et tartalmazó részhalmozokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$ -et választjuk. (Ez párbaállítás.)



Az 1. oszlop felel meg h_1 -nek.

Tétel. Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmozosa van, mint ahány páratlan elemszámú.

Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H -nak a h_1 -et nem tartalmazó részhalmozait párbaállítjuk a h_1 -et tartalmazó részhalmozokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$ -et választjuk. (Ez párbaállítás.)



Mivel mindegyik párban 1-gyel tér el a két résztvevő halmaz elemszáma, így mindegyik párban az egyik halmaz páros elemszámú, a másik páratlan elemszámú. Ez bizonyítja az állítást. □

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| ● | ● | ● | ○ | ○ |
| ● | ● | ○ | ● | ○ |
| ● | ● | ○ | ○ | ● |
| ● | ○ | ● | ● | ○ |
| ● | ○ | ● | ○ | ● |
| ● | ○ | ○ | ● | ● |
| ○ | ● | ● | ● | ○ |
| ○ | ● | ● | ○ | ● |
| ○ | ● | ○ | ● | ● |
| ○ | ○ | ● | ● | ● |

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. □

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. □

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozva számoljuk össze: Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k = 0, 1, \dots, n$. \square

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez nyilvánvaló. Azért kapott ez nevet, mert két mennyiség egyenlőségét néha így a legegyszerűbb igazolni: alkalmas összeszámlálási probléma felmutatásával.