4. Sorbaállítások, átrendezések

1. Hányféleképpen lehet n bástyát elhelyezni az $n\times n$-es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

2. Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

3. Hányféleképpen lehet n embert körbeállítani? (Két körbeállítás azonos, ha bárkit is választunk ki az n ember közül, a két körbeállításnál a bal (illetve a jobb) oldali szomszédja ugyanaz lesz.) [4.30]

4. Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? (Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.) [4.29]

5. Hányféleképpen lehet n házaspár összesen $2n$ tagját sorbaállítani úgy, hogy mindegyik házaspár két tagja egymás mellé kerüljön?

6. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \ldots, 20\}$ halmaznak, amelyben az $1, 2, 3, 4$ számok nagyság szerint növekvő sorrendben helyezkednek el (tehát a 2-es valahol az 1-estől jobbra áll, a 3-as valahol a 2-estől jobbra áll, és a 4-es valahol a 3-astól jobbra áll)?

7. a) Tekintsük azon négyjegyű számokat, melyek minden jegye különböző, és nem tartalmaznak 0-t. Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
b) És mi a helyzet, ha a 0 számjegy is megengedett?

8. Van 12 különböző virágpalántánk, melyből 8 tulipán és 4 rózsa. Hányféle sorrendben tudjuk ezeket a palántákat kiültetni a virágoskertünk egy sorába úgy, hogy ne kerüljön egymás mellé két rózsa?

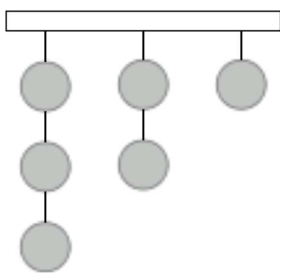
9. a) Egy 20 fős osztályban egyik órán párokban kell dolgozni (tíz párt kell kialakítani). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
b) Óra után fényképezkedik az osztály. Két tízes sorba kell állniuk úgy, hogy a hátsó sor mind a tíz gyereke előtt alacsonyabb gyerek álljon. Hányféle fénykép készülhet? (A gyerekek mind különböző magasságúak.)

10. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? (A vásárlókat és a pénztárakat is megkülönböztetjük.) [TK. 3.4.8.]

11. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, hogy az első helyen álló szám kivételével minden másik i számra igaz, hogy $i-1$ vagy $i+1$ az i előtt áll vahahol?

12.$^+$ Hányféleképpen lehet úgy sorbaállítani $\binom{[n]}{1} \cup \binom{[n]}{2}$ elemeit, hogy minden kételemű $\{u, v\}$ halmaz az $\{u\}$ és $\{v\}$ halmazoknál később következzen a sorbaállításban? [Monthly, 2023.]

13. Egy céllövöldében hat lufi lóg az ábrán látható módon. A 6 lufit kell egyesével lelőnünk úgy, hogy minden zsinóron csak az eddig ki nem lőtt legalsó lufi célozható. Hányféle (megengedett) sorrendben lőhetjük le a 6 lufit?



14. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az *első* M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)

15. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé? [4.13]

16. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy (semelyik) két S betű ne kerüljön egymás mellé?

17. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?

18. n különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i-edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? [4.22]

19. Hány nullára végződik a $((3!)!)!$ szám? [4.6]

20.$^+$ Bizonyítsuk be az $(n!)^{n+1}|(n^2)!$ oszthatóságot, lehetőleg kombinatorikus úton. [4.8]

21. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$. [4.11]

22.$^+$ Bizonyítsuk be Wilson tételét, mely szerint tetszőleges p prímszámra $p|(p-1)!+1$. *Segítség:* Számoljuk meg, hogy egy szabályos p-szög csúcsai között hány körút tervezhető úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer megyünk keresztül, ha az elforgatással egymásba vihető körutakat nem különböztetjük meg. [4.31]

23. Határozza meg az x^{10} együtthatóját az $(1-x+x^3)^{14}$ polinomban.

24. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az '1' elemet tartalmazó ciklus hossza k?

25. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az '1' és '2' elemek ugyanabban a ciklusban lesznek?

26. Hány olyan permutációja van $[2n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza 2?

27.$^+$ Hány olyan permutációja van $[2n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza páros?

28.$^+$ Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?

29. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

30.$^+$ Egy városban csak két család közötti lakáscserét lehet elvégezni (több családot érintő lakáscsere tilos), és egy család egy nap csak egyszer költözhet. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges lakáscsere elvégezhető két nap alatt. [4.44]