3. Multihalmazok, formális hatványsorok

1. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

2. Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

3. Hány lehetséges ötöslottóhúzás-kimenetel lenne, ha egy számot többször is kihúzhatnának (és a kihúzott számok sorrendje továbbra sem számítana)?

4. Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)

5. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2024.$$

6. Az alábbi egyenlőtlenségnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d \leq 2024.$$

7. Hányféleképpen lehet az alábbi listában kitölteni a hiányzó pontszámokat úgy, hogy a fiúk összesített pontszáma 100 pont, a lányok összesített pontszáma 90 pont legyen? (Minden pontszám egy tetszőleges nemnegatív egész szám lehet.)

```
EREDMÉNYEK:
Á. Tamás            ... pont
B. Erika            ... pont
F. Gábor Zoltán     ... pont
H. Viktor           ... pont
H. Ádám Ferenc      ... pont
I. Ferenc           ... pont
K. Beatrix          ... pont
K. Csilla Ildikó    ... pont
K. Kata             ... pont
N. Ádám             ... pont
O. Ramóna           ... pont
Sz. Dorka           ... pont
V. Kristóf          ... pont
```

8. Van otthon 3 Mars, 4 Snickers, 5 Milky way és 6 Sport szelet csoki. (Az azonos fajtájúak egyformák.) Három gyermekünk, András, Bea és Cili indul iskolába. Mindhármójuk hátizsákjába rejtünk néhány csokit ebből a készletből (otthon is maradhat csoki). Hányféle csokiosztás lehetséges, ha az is előfordulhat, hogy valaki nem kap semmit (akár mindhárman), és az is, hogy egyiküknek adjuk az összes meglévő csokit?

9. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy

a) tetszőleges elosztás megengedett;
b) mindenki kapjon legalább egyet;
c) az i-edik gyerek legalább i forintot kapjon (minden $i \in [n]$-re);
d) mindenki páros sok forintot kapjon;
e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

10. Cégünknél 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzösszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?

11. Oljuk meg a következő problémát, amihez a 2. feladatsor 12. feladatánál jutottunk: A természetes számok körében hány megoldása olyan megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 85$$

egyenletnek, ahol az x_2, x_3, x_4, x_5 változók értéke legalább 1?

12. Hány monoton növő $[n] \to [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)

13. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \ldots, 2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

14. Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1, \ldots, m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_k}).$$

15. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \ldots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \ldots, 2n$ multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

16.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \ldots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \cdots + c_k = n$. [TK. 3.4.11.]

17. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$,

b) $\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right)$,

c) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n-1}{i}\!\!\right)$.

18. Legyen F a páratlan természetes számok generátorfüggvénye, G pedig a $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k$ formális hatványsor, vagyis

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$$
$$G = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots$$

a) Számoljuk ki az FG szorzat első négy tagját.
b) Számoljuk ki az $\frac{F}{G}$ hányados első négy tagját (az osztás definíciója szerint).
c) Írjuk fel G-t zárt alakban, és ebből számoljuk ki $\frac{F}{G}$ pontos értékét.