1. Kombinatorikus alapelvek

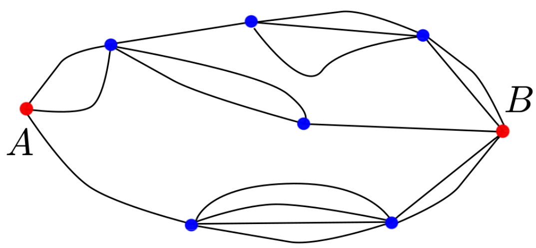
1. Hány olyan egész szám van 1000-től 99999-ig, amely páros számjeggyel kezdődik és végződik? Hol melyik kombinatorikus alapelvet használtuk a feladat megoldása során?

2. Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

3. Hányféle új magyar rendszámtábla készíthető, ha a jogszabály a következőket írja elő? (A latin ábécé 26 betűs, melyből 5 betű magánhangzó. Az Y mássalhangó.)

„Az állandó rendszámtábla a latin abc szerinti két magánhangzóból vagy két mássalhangzóból – kivéve a cs, gy, ly, ny, sz, ty, zs betűkombinációkat –, az ezt követő címer után két betűjelből, kötőjelből és három számjegyből áll. A rendszámtábla betűjelei helyén ékezetes magánhangzók nem állhatnak, a számjegyek helyén 001-től 999-ig terjedő érték szerepelhet.”

4. Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva A-ból B-be kell eljutnunk. Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba (tehát mindig „távolodunk” A-tól)?



5. Hányféleképpen lehet elhelyezni a fehér és fekete királyt az üres 8×8-as sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

6. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?

7. Tízszer egymás után feldobunk egy kockát. Hány kimenetel lehetséges? Ebből hányszor lesz olyan dobás-sorozat, amelyben van hatos?

8. Tízszer egymás után feldobunk egy érmét. Hány kimenetel lehetséges? Ebből hányszor lesz két azonos dobás közvetlen egymás után?

9. Egy kirándulásra készülünk és a hátizsákunkba pakolunk. Otthon öt csokink van: egy Mars, egy Twix, egy Milka, egy Tibi és egy Balaton. Valamennyit beleteszünk a hátizsákunkba (esetleg egyet se, esetleg mindet). Erre hány lehetőségünk van?

10. n különböző csokit két (nemüres) csoportra osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?

11. Van 20 szál különböző virágunk és 5 különböző vázánk. Hányféleképpen tehetjük a vázákba a virágszálainkat? (Váza maradhat üresen is.)

12. a) Hány $n \times m$-es 0-1 mátrix van?
b) Hány szimmetrikus $n \times n$-es 0-1 mátrix van?
c) Hány olyan $n \times m$-es 0-1 mátrix van, amelyben minden sor- és oszlopösszeg páros?

13. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot?[3.1]

14. Legyen U egy n elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $X \subseteq Y \subseteq U$. [TK. 3.1.3.]

15. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?

16. Az $\{1, 2, \dots, 100\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben az elemek összege páratlan?

17.$^+$ A $\{2, 4, 6, \dots, 16\}$ halmaz összes részhalmazára kiszámoljuk az elemek összegének utolsó számjegyét (az üres halmazra ez 0). Igazoljuk, hogy minden lehetséges végződés páros sokszor fordul elő!

18.$^+$ (Kis Fermat-tétel.) Igazoljuk kombinatorikus érveléssel, hogy tetszőleges p prímszám és a pozitív egész esetén $p|a^p - a$.

19. Az alábbiak közül mely természetes számokból van több 1.000.000-ig:
(i) amelyek csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(ii) amelyek csak 3, 8 és 9 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(iii) amelyek csak 3, 8 és 0 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer)?

20.

$$\sum_{R \subseteq [n]} |R| = ?$$

21. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.)

22.$^+$ Ha M egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük $S(M)$-mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy M elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például

$$S(\{1, 2, 5, 6, 9\}) = 9 - 6 + 5 - 2 + 1 = 7, \qquad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az $S(M)$ összegek összege, ha M befutja az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz összes nemüres részhalmazát? [3.36]

23. Ki lehet-e úgy tölteni egy $n \times n$-es táblázatot az 1, 2 és 3 számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?

24. Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$. [1.25]

25. Tizenhét doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négyféle színű golyóból páros sok van.

26. Igaz-e, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz?

27.$^+$ Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát" hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (OKTV, 1963.)

28. Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 3 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy a klubok száma megegyezik az osztály tanulóinak számával.

29. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tau(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \ln n,$$

ahol $\tau(j)$ a j szám osztóinak számát jelöli.

30.$^+$ Kombinatorikus érveléssel (kettős leszámlálással) hozzuk zárt alakra az alábbi összeget:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2)(n-1)n.$$