Másodrendű lineáris rekurziók megoldása

Mintafeladat. *Oldjuk meg az*

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 2,$$
$$a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2)$$

lineáris rekurziót! (Azaz adjuk meg az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *sorozatot explicit alakban.)*

Előkészítő gondolatok. Világos, hogy pontosan egy sorozat elégíti ki a fenti feltételeket, hiszen az a_2, a_3, a_4 stb. elemeket mindig egyértelműen meghatározza az előttük álló két sorozatelem. Így nincs más dolgunk, mint valahogy találni egy olyan sorozatot, amelyre teljesülnek az előírt követelmények. Például, ha az első néhány elem felírása után megsejtjük a zárt alakot, és ellenőrizzük, hogy valóban teljesülnek rá a feladatbeli a feltételek, akkor készen vagyunk. Persze a legtöbb esetben nem könnyű megsejteni a zárt alakot, mert az „csúnya", ahogy ennél a feladatnál is.

Az alábbiakban egy mechanikus módszert ismertetünk, amellyel „meg lehet találni" a keresett sorozatot. Megmutatható, hogy ilyen típusú rekurzióknál ez a keresési módszer *mindig* eredményre vezet, soha nem „akad el" (ha a segédanyag végén található kiegészítést is hozzávesszük), de ezt most nem részletezzük. A feladatok matematikailag precíz megoldásához erre nincs is szükség, hiszen az előző bekezdés szerint elegendő annyit ellenőrizni/végiggondolni, hogy a megtalált sorozat valóban megoldás. (A konkrét feladatoknál pedig azt fogjuk „tapasztalni", hogy mindig rátalálunk a megoldásra, ha ezt a keresési utat követjük.)

A mintafeladat megoldása. Először figyelmen kívül hagyjuk a kezdeti feltételeket.
1. lépés: Meghatározzuk, hogy mely $a_n = q^n$ alakú (mértani) sorozatokra teljesül az előírt

$$a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2} \tag{1}$$

rekurzív feltétel (ahol $q \neq 0$). Keressük tehát azokat a q számokat, amelyekre fennáll, hogy

$$q^n = 6q^{n-1} - 7q^{n-2}.$$

Ez q^{n-2}-nel való osztás és rendezés után a

$$q^2 - 6q + 7 = 0 \tag{2}$$

másodfokú egyenlethez vezet, melynek a megoldóképlet szerint két megoldása lesz:

$$q_1 = 3 - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad q_2 = 3 + \sqrt{2}.$$

Kaptuk tehát, hogy az $\tilde{a}_n = (3 - \sqrt{2})^n$ és az $\hat{a}_n = (3 + \sqrt{2})^n$ sorozatok kielégítik az (1) rekurzív összefüggést. Nem nehéz meggondolni, hogy ha két sorozat kielégíti az (1) feltételt, akkor a sorozatok „lineáris kombinációi" is; azaz esetünkben az

$$a_n = \alpha \cdot (3 - \sqrt{2})^n + \beta \cdot (3 + \sqrt{2})^n$$

alakú sorozatok kielégítik (1)-et *bármely* α, β valós számok esetén.

Tehát ha találunk olyan α és β számokat, melyekkel az iménti a_n sorozatra az is fennáll, hogy $a_0 = 1$ és $a_1 = 2$, akkor ezzel megkapjuk a keresett sorozatot, mert minden feltétel teljesülni fog.

2. lépés: Meghatározzuk az α és β számokat oly módon, hogy $a_0 = 1$ és $a_1 = 2$ teljesüljön, azaz fennálljon, hogy

$$\begin{cases} \alpha \cdot (3-\sqrt{2})^0 + \beta \cdot (3+\sqrt{2})^0 = 1 \\ \alpha \cdot (3-\sqrt{2})^1 + \beta \cdot (3+\sqrt{2})^1 = 2. \end{cases}$$

Vagyis az

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (3-\sqrt{2})\alpha + (3+\sqrt{2})\beta = 2 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldani α-ra és β-ra. Ennek megoldása: $\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$. A számolás részleteit mellőzzük. (Például a $\beta = 1-\alpha$ összefüggést beírjuk a 2. egyenletbe ...)

Tehát a megoldás:

$$\boxed{a_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \cdot (3-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \cdot (3+\sqrt{2})^n.}$$

További gyakorló feladatok. *Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat:*

(i) $b_0 = 4,\ b_1 = -1;\quad b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ *(ha* $n \geq 2$*).*

(ii) $c_1 = 2,\ c_2 = 3;\quad c_n = 5c_{n-1} - 6c_{n-2}$ *(ha* $n \geq 3$*).*

(iii) $d_0 = d_1 = 1;\quad d_n = 4d_{n-1} + d_{n-2}$ *(ha* $n \geq 2$*).*

(iv)* $e_0 = e_1 = 1;\quad e_n = 6e_{n-1} - 9e_{n-2}$ *(ha* $n \geq 2$*).*

Megoldások.

(i) $b_n = 2^n + 3 \cdot (-1)^n$.

(ii) $c_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot 3^n$.

(iii) $d_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot (2-\sqrt{5})^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot (2+\sqrt{5})^n$.

(iv) $e_n = 3^n - \frac{2}{3}n \cdot 3^n = \left(1 - \frac{2}{3}n\right)3^n$.

Ellenőrzés. A feladatmegoldás végén leellenőrizhetjük, hogy a kapott sorozat kielégíti a feladatban megadott feltételeket (ez a keresett sorozat egyértelműsége miatt egy matematikailag korrekt *bizonyítás* is arra, hogy a kapott zárt alak helyes). Például a fenti (ii) feladat eredményét a következőképpen ellenőrizhetjük:

$$c_1 = \frac{3}{2} \cdot 2^1 - \frac{1}{3} \cdot 3^1 = 3 - 1 = 2. \quad \checkmark$$

$$c_2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 6 - 3 = 3. \quad \checkmark$$

$$5c_{n-1} - 6c_{n-2} = 5\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1}\right) - 6\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{n-2} - \frac{1}{3} \cdot 3^{n-2}\right) =$$

$$= \frac{15}{4} \cdot 2^n - \frac{5}{9} \cdot 3^n - \frac{9}{4} \cdot 2^n + \frac{2}{9} \cdot 3^n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot 3^n = c_n. \quad \checkmark$$

Kiegészítés. (Többszörös gyökök.) Másodrendű lineáris rekurziók esetén az ismertetett módszer mindig működik, ha az 1. lépésben, a (2) pontnál olyan másodfokú egyenletet kapunk q-ra, amelynek két *különböző* gyöke van. Ebbe az is beleértendő, ha nincs valós gyök, azaz az eset, amikor két különböző (nem valós) komplex gyök van. Komplex gyökök esetén ugyanúgy végigvihető a módszer a komplex számtest felett dolgozva: ekkor olyan zárt alakot kapunk, amelyben ugyan látszólag lesznek komplex számok, de a műveletek elvégzése után valós számokat kapunk (hasonlóan ahhoz, hogy irracionális számok megjelenhetnek a zárt alakban olyankor is, amikor a sorozatelemek egészek).

Egy példán keresztül mutatjuk be, hogy hogyan járhatunk el abban az esetben, ha a (2) pontnál olyan egyenletet kapunk, amelynek csak egy (többszörös) gyöke van. A (iv)-es feladatban ez a szituáció áll fenn: a megoldás során az 1. lépésben a

$$q^2 - 6q + 9 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek egyetlen gyöke a $q = 3$. Könnyen ellenőrizhető, hogy most nemcsak az $\tilde{e}_n = 3^n$ mértani sorozat, hanem annak n-szerese, az $\hat{e}_n = n \cdot 3^n$ sorozat is kielégíti a rekurzív feltételt (többszörös gyök esetén mindig ez a helyzet, hogy a megtalált mértani sorozat mellett annak n-szerese is ilyen), és így ezek

$$e_n = \alpha \cdot 3^n + \beta n \cdot 3^n$$

lineáris kombinációi is ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Most ilyen alakban keressük a megoldást. A 2. lépésben tudunk olyan α és β számokat találni, hogy az $e_0 = 1$ és $e_1 = 1$ kezdeti feltételek is teljesüljenek: ebben a példában az $\alpha = 1$ és $\beta = -\frac{2}{3}$ értékek adódnak az

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszerből.

Magasabb rendű lineáris rekurziók. Magasabb rendű lineáris rekurziók esetén a lineáris rekurziók alaptétele „súgja meg”, hogy milyen alakban kell keresni a megoldást. Ezután a kezdeti feltételekből meghatározhatók az ismeretlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ együtthatók. (Olyan lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek lesz megoldása, méghozzá egyértelmű. Ezt is garantálja az alaptétel.) Célszerű ellenőrizni, hogy az így kapott sorozat valóban megoldása a rekurziónak a megadott kezdeti feltételekkel (mivel az alaptétel helyességét nem annyira könnyű végiggondolni).