KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Síkgráfok

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2014.

1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy szépen síkra rajzolt G gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha nem lehet olyan zárt, önmagát nem metsző görbét rajzolni a síkon, amely elkerüli az éleknek megfelelő görbéket, és a görbe által definiált belső és külső tartomány is tartalmaz G-beli csúcsot.*

2. Feladat. *Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha komponensei síkgráfok.*

⋆

3. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha G síkra rajzolt összefüggő gráf, akkor az országok száma*

$$|E(G)| - |V(G)| + 2.$$

4. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha a G gráf összefüggő, egyszerű síkgráf, akkor*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

5. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha G összefüggő, egyszerű, páros síkgráf, akkor*

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

6. Feladat. *Az $S_n, K_n, P_n, C_n, K_{n,m}$ gráfok közül melyek síkgráfok?*

7. Feladat. *Legyen G összefüggő, egyszerű síkgráf.*

a) Bizonyítsuk be, hogy G-nek van legfeljebb ötödfokú pontja.

b) Bizonyítsuk be, ha G páros, akkor van legfeljebb harmadfokú pontja is.

c) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van egy legfeljebb harmadfokú pont vagy egy ország, amelyet három él határol.

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor vagy G, vagy G komplementere nem síkgráf. Adjunk meg 8 pontú G síkgráfot úgy, hogy komplementere is síkgráf legyen.*

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha a G egyszerű gráf nem síkgráf, akkor élgráfja sem síkgráf. Igaz-e, ha G síkgráf, akkor élgráfja is síkgráf?*

⋆

10. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy gráf akkor és csak akkor rajzolható a síkra, ha lerajzolható a gömbre.*

11. Feladat. *Keressük meg azokat az n számokat, amelyekre létezik n körlap úgy, hogy a belsejük diszjunkt és mindegyik körhöz pontosan három olyan van, amely érinti azt.*

12. Feladat. *A síkon egy konvex sokszöget és ennek egy konvex sokszögekre osztását térképnek nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy térkép realizálható, ha van olyan T konvex test a térben, hogy T egyik lapjának merőleges vetülete a térkép kiinduló sokszöge, és további lapjainak vetületei pedig a felosztó (kis) sokszögek vagy a kiinduló sokszög egy oldala (tehát T-nek lehet „függőleges lapja").*

a) Adjunk meg olyan térképet, amelynek felosztásában csak háromszögek szerepelnek, és nem realizálható.

Bizonyítsuk be, hogy a következő feltételek bármelyikének teljesülése esetén egy térkép biztosan realizálható.

b) A felbontásban csak hegyesszögű háromszögek szerepelnek.

c) A felbontás minden sokszöge olyan húrsokszög, amely köré írt körének középpontja a sokszög belsejébe esik.

13. Feladat. *Legyen G egy egyszerű síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G lerajzolható a síkba úgy, hogy éleit egyenes szakaszok reprezentálják.*

14. Feladat. *Legyen B egy olyan véges ponthalmaz a síkon, amelynek pontjai nem illeszkednek egy egyenesre. B pontjai között olyan szakaszokat húzunk meg, amelyek egymást belső pontban nem metszik, és belső pontként B-beli pontot nem tartalmaznak.*

a) Bizonyítsuk be, hogy találhatunk három olyan pontot, amelyek által meghatározott háromszög köré írt kör belseje nem tartalmaz B-beli pontot.

b) Ha a szakaszok húzását addig folytatjuk, amíg már további szakasz húzása nem lehetséges, akkor a szakaszok által meghatározott tartományok mindegyike egy háromszög lesz, kivéve a külső, végtelen tartományt. (Ezt a B halmaz háromszögelésének nevezzük.)

c) Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszögelése B-nek, hogy a benne szereplő háromszögek mindegyikére a köré írt kör belseje nem tartalmaz B-beli pontot. Hogyan lehet egy ilyen háromszögelést találni?

d) Ha B-nek nincs egy körön lévő négy pontja, akkor a fenti háromszögelés egyértelmű.

15. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy konvex poliéder élváza által alkotott gráf (azaz az a gráf, amelynek pontjai a poliéder csúcsai, és élei a poliéder élei) síkgráf. Ezenkívül a gráf egyszerű gráf, minden pontjának foka legalább három és bármely két pontját elhagyva összefüggő marad.*

16. Feladat. *Alkalmazzuk konvex poliéderekre a 00 feladat eredményeit.*

17. Feladat. *Hányféle ötlapú konvex poliéder létezik?*

18. Feladat. *Egy konvex poliéder felszíne négyzetekre darabolható. Bizonyítsuk be, hogy a poliéder csúcsainak száma legfeljebb 8.*

Egy konvex poliéder felszíne szabályos háromszögekre darabolható. Mit mondhatunk a csúcsok maximális számáról?

19. Feladat. *Van-e olyan konvex test, amelynek 1990 éle van, és nincs háromszög lapja?*

20. Feladat. *a) Egy* 101 *csúcsú poliéder éleit megjelöltük a* $+1$*, illetve* -1 *számokkal. Mutassuk meg, hogy van a poliédernek olyan csúcsa, amelynél az oda befutó élekre írt számok szorzata* $+1$.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy 100 csúcsú konvex poliéder élei megszámozhatók a $+1$ *és* -1 *számokkal úgy, hogy minden egyes csúcsnál az oda befutó élekre írt számok szorzata* -1.

Igaz-e, hogy bárhogyan is írjuk egy 1989 csúcsú konvex test csúcsaira a -1, $+1$ számokat, lesz a testnek olyan csúcsa, amelynél az oda befutó élek másik végpontjához írt számok szorzata $+1$?

21. Feladat. *Egy konvex poliéder éleit úgy irányítjuk, hogy minden csúcsban legyen odavezető és onnan kiinduló él is. Bizonyítsuk be, hogy a poliédernek van legalább két lapja, amelyet az irányított élek mentén körbejárhatunk úgy, hogy minden élen az irányításnak megfelelően haladunk.*

22. Feladat. *Egy P konvex poliéder minden csúcsába páros sok él fut be. Legyen S egy sík, amely nem halad át P egyetlenegy csúcsán sem. Bizonyítsuk be, hogy S a P poliédert egy páros oldalszámú sokszögben metszi.*

23. Feladat. *Egy konvex poliéder éleit két színnel kiszínezzük. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan lapja a poliédernek, amelynek minden éle ugyanolyan színű, vagy pedig két olyan ívből áll, amelyek egyszínűek.*

⋆

24. Feladat. *Rajzoljuk le szépen K_5-t és $K_{3,3}$-t a tóruszra és a projektív síkra.*

25. Feladat. *Rajzoljuk le szépen K_7-et a tóruszra.*