KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Szita

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2015.

1. Bemelegítő feladatok

1. Feladat. *Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát* 12*-en, a fizikát* 14*-en, a kémiát pedig* 13*-an szeretik. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy a matematikát és a kémiát is szereti; hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan vannak, akik nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül?*

2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Adjunk hasonló formulát

$$|A \cup B \cup C|$$

elemszámra.

3. Feladat. *Legyen $A, B, C \subset S$. Adjunk formulát az*

$$|S \setminus (A \cup B)|, |S \setminus (A \cup B \cup C)|,$$

elemszámokra.

4. Feladat. *Hány olyan páratlan,* 120*-nál nem nagyobb egész van, ami nem osztható sem* 3*-mal, sem* 5*-tel és sem* 7*-tel.*

Mi a fenti feladat köze a 120*-nál nem nagyobb prímszámok számához?*

5. Feladat. *Hány természetes szám megoldása van az*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

egyenletnek, ha $x_i \leq 5$?

6. Feladat. *Egy pékség három fajta zsemélt árul: normál, mákosat és szezám magosat. Az egyes fajtákból rendre kilenc, három és öt darab van a boltban.* 12 *zsemlét rendelnek. Hányféleképpen állíthatják össze a rendelést?*

7. Feladat. *Egy választás előtti közvélemény kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az A, B illetve C párttal a megkérdezettek 65%, 57%, illetve 58% elégedett. Továbba, 28% fogadja mind A-t, mind B-t, 30% fogadja el mind A-t, mind C-t, míg 27% fagadja el B-t és C-t, Végül 12% mind három párttal elégedett. Mire gondolunk ezek után?*

8. Feladat. *Egy szerencsejátékban ötször gurítanak egy dobókockát. A játékos nyer, ha az utolsó dobás eredménye korábban már kijött. Mi a nyerés valószínűsége? Többféle érvelés is leheteséges, próbáljuk a szita formulát alkalmazni. A megoldásunk helyességét kisérletezéssel is ellenőrizzük.*

9. Feladat. *Hány olyan legfeljebb* 100 *étékű természetese szám van, amely sem* 5*-tel, sem* 7*-tel nem osztható?*

10. Feladat. *Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé* 26 *betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?*

11. Feladat. *A 45 tagú „Majmok Tudományos Akadémiája" ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak:*

1. *Okosabb-e a majom, mint az ember?*
2. *Szebb-e a majom, mint az ember?*
3. *Igaz-e, hogy az ember a majom őse?*

A szavazás után kiderült, hogy az

a) *1. és a 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a 2. kérdésre csak 17.*

b) *Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a 2. kérdésre, 12-en pedig a 3. kérdésre nemmel feleltek.*

c) *Igent mondott a 2. és a 3. kérdésre hat „akadémikus", de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.*

Hányan szavaztak minden kérdésre nemmel?

2. A szita

12. Feladat (Szita formula). *Legyenek az A_i halmazok ($i = 12, 2, \ldots, n$) egy S alamphalmaz részhalmazai. Legyen*

$$A_I = \cap_{i \in I} A_i, \quad (I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}), \qquad A_\emptyset = S.$$

Legyen

$$\sigma_j = \sum_{|I|=j} |A_I|, \quad (1 \leq j \leq n), \qquad \sigma_0 = |S|.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} |S \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| =& |S| - (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) + \\ & + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) - \cdots \\ =& \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j. \end{aligned}$$

13. Feladat. *Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, amelyben egy i számot sose követi $i+1$?*

Hogyan változik a válasz ha azt se engenjük meg, hogy n-et az 1 szám kövesse?

14. Feladat. *A szita foemula használatával határozzuk meg hányféleképpen ültethetünk le n házaspárt egy kör alakú asztalhoz úgy , hogy*

(i) egyik hölgy sem ül házáspárja mellett?

(ii) egy hölgy sem ül egy másik hölggyel szemben?

15. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a $[m]$-ből $[n]$-be képző szürjektív függvények száma*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

16. Feladat. *Legyen n és $k \geq \ell$ pozitív egészek. Hány olyan egész megoldása van az*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

egyenletnek, amelyre $0 \leq x_i \leq \ell$?

17. Feladat. *Hányféleképpen állíthatunk össze egy nyakláncot k féle színezett gyöngyből (mindegyikből sok van), ahol minden i-re az i-edik pozícióban álló gyöngy színének különbözőnek kell lenni a szomszédai színétől?*

18. Feladat. *Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf. Számoljuk meg hányféle jó színezése van k színnel. Bizonyítsuk be, hogy a válasz egy polinom-függvénye k-nak.*

19. Feladat. *Legyen $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek száma, és jelentse $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb prímszámokat. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n - 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq m} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} \right\rfloor.$$

20. Feladat. *Hány olyan, n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prím osztója legalább kétjegyű?*

21. Feladat. *Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex, n oldalú sokszög csúcsai közül hármat úgy, hogy ezek egyike se legyen szomszédos a másik kettő egyikével sem?*

22. Feladat. *Hányféleképpen táncolhat n házaspár úgy, hogy senki sem táncol a saját házastársával?*

23. Feladat. *Hányféleképpen ülhet le n házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett?*

24. Feladat. *Határozzuk meg a*

$$\sum \frac{1}{2^k}$$

összeg értékét, ahol az összegezés olyan k-ra történik, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel.

25. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n = \begin{cases} 0, & ha\ 0 \le n < k; \\ n!, & ha\ n = k. \end{cases}$$

26. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}\binom{k}{i}\binom{n+k-i-1}{n}, \qquad 1 \le n, k.$$

27. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+n-k-1}{n-k} = 0, \qquad 1 \le m, n.$$

28. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{m-s}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m-k}{s}^d = 0, \qquad 1 \le sd < m.$$

⋆

29. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \cdots - \sigma_{2k+1} \le |S \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| \le \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \cdots + \sigma_{2k}.$$

30. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sigma_r \le \frac{n-r+1}{r}\sigma_{r-1}.$$

31. Feladat. *Legyen T_k azoknak az elemeknek a halmaza S-ből, amelyek pontosan k darab A_i halmaznak elemei. Bizonyítsuk be, hogy*

$$|T_k| = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{k+j}\binom{j}{k}\sigma_j.$$

32. Feladat. *Legyen T'_k azoknak az elemeknek halmaza S-ből, amelyek legfeljebb k darab A_i halmaznak elemei. Bizonyítsuk be, hogy*

$$|T'_k| = \sigma_0 + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{k+j}\binom{j-1}{k}\sigma_j.$$

33. Feladat. *Legyen T''_k azoknak az elemeknek halmaza S-ből, amelyeket legalább k darab A_i tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$|T''_k| = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{k+j}\binom{j-1}{k-1}\sigma_j.$$

34. Feladat. *Hányféleképpen táncolhat n házaspár úgy, hogy*

(i) pontosan k férfi táncoljon a saját feleségével,

(ii) legfeljebb k férfi táncoljon a saját feleségével,

(iii) legalább k férfi táncoljon a saját feleségével?

35. Feladat. *Hányféleképpen tehetünk be m urnába n tárgyat úgy, hogy legfeljebb k urna legyen üres?*