KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Sorbaállítások, átrendezések

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2014.

1. Feladat. *Egy 150 cm hosszúságú mérőszalagot az egész beosztásoknál 1 cm hosszúságú darabokra vágunk szét úgy, hogy minden lépésben egy tetszőleges olyan helyen vágjuk el a mérőszalagot, ahol eddig még nem tettük.*

a) Legfeljebb,

b) legalább

hány lépésben végezhető el a feldarabolás?

c) Hányféleképpen végezhető el ez a vágási módszer?

Válaszoljuk meg az a) és b) kérdéseket abban az esetben is, ha egy lépésben tetszőleges számú (de legalább egy) részt vehetünk kézbe és azokat egy vágással tovább oszthatjuk.

2. Feladat. *Hányféleképpen lehet n embert sorba állítani?*

3. Feladat. *Egy osztályteremben n^2 szék van egy négyzetes elrendezésben: n sorban, mindegyik sorban n darab. Hányféleképpen ültethetünk le n^2 ember?*

4. Feladat. *Egy $n \times n$ méretű táblára szeretnénk n darab bástyát letenni úgy, hogy ne üssék egymást (ne legyen kettő, amelyek egy sorba, vagy egy oszlopba esnek). Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

5. Feladat. *Egy teremben n gyerek sorba állt. Belép egy $n+1$-edik és „beszúrja" magát a sorba (egymás közt a többiek megtartják eredeti viszonyukat, de beengedik a későt). Hányféle lehetőség van a késve érkezett számára?*

6. Feladat. *Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, 6\}$ elemeit úgy, hogy ne az 1 számmal kezdjük a sort?*

7. Feladat. *Hány tízjegyű természetes szám van? Ezek közűl hány tartalmazza mind a tíz számjegyet?*

8. Feladat. *Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, hogy az első helyen álló szám kivételével minden másik i számra igaz, hogy $i-1$ vagy $i+1$ az i előtt áll?*

$\star \quad \star \quad \star$

9. Feladat. *Hány számjegyű 100!? 2 mekkora kitevővel szerepel 100!-ban? Tetsző-Leges p prímszámra p mekkora kitevővel szerepel 100!-ban?*

10. Feladat. *Legyen n egy páros szám. Igazoljuk, hogy*

a) $n! \geq 2^{n-1}$,

b) $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$,

c) $n! \leq n^{n-1}$,

d) $n! \leq \frac{n+1}{2}^{n}$.

11. Feladat. *Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat (k, m, n természetes számok):*

a) $(n!)^{n+1} | (n^2)!$,

b) $(k!)^{(k-1)!} | (k!)!$,

c) $m!n!(m+n)! | (2m)!(2n)!$.

⋆ ⋆ ⋆

12. Feladat. *Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni? Ezek közűl hány olyan van, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?*

13. Feladat. *Egy doboz három kék, három piros és négy barna zoknit tartalmaz. Nyolc zoknit húzunk ki egyenként. Ezt hányféleképpen tehetjük meg, ha az azonos színű zoknikat nem tudjuk megkülönböztetni?*

14. Feladat. *Hányféleképpen lehet három piros, három fehér és három zöld golyót egymás mellé rakni úgy, hogy bármelyik két egymás mellé kerülő golyó különböző színű legyen? (Az ugyanolyan színű golyókat nem lehet egymástól megkülönböztetni.)*

15. Feladat. *Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát űltetett egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Legyen $\frac{m}{n}$ annak a valószínűsége, hogy nem kerül két nyírfa egymás mellé ($\frac{m}{n}$ nem egyszerűsíthető). Mennyi $m+n$?*

16. Feladat. *Egy M multihalmazban n darab különböző elem van. Az egyes elemek multiplicitása $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (azaz M számossága $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$). Hány sorbaállítása van M-nek?*

17. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n}} \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}.$$

⋆ ⋆ ⋆

18. Feladat. *Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a bal szomszédja és mindenkinek ugyanaz a jobb szomszédja a két esetben.*

Mi a válasz, ha két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.

19. Feladat. *Hányféleképpen lehet n embert körbeállítani? (Két körbeállítás azonos, ha bárkit is választunk ki az n ember közül, a két körbeállításnál a bal (illetve a jobb) oldali szomszédja ugyanaz lesz.)*

20. Feladat. *n óvodás az udvaron játszik. Csoportokba oszlanak és minden csoport körjátékot kezd el játszani (egy, két gyerek is alkothat külön kört). Két körbe állítást akkor tekintünk azonosnak, ha a két esetben mindegyiküknek ugyanaz a bal szomszédja. Hányféleképpen játszhatnak?*

21. Feladat. *A fenti feladatból n gyerekek körökben játszik. Egy újabb gyerek jön az udvarba és csatlakozik a jatékhoz. Hány lehetősége van erre? A korábbi viszonyokat nem változtatja meg, de ha kiválaszt egy kört és benne egy helyet, akkor oda beengedik.*

22. Feladat. *Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz azon permutációinak a száma, amelynek k fixpontja van.*

a) Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=1}^{n} kp_n(k) = n!$,

b) Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

23. Feladat. *Legyen p prímszám.*

a) Egy szabályos p-szög csúcsai között egy körutat tervezünk úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer menjünk keresztül. Ezt hányféleképpen tehetjük meg, ha az elforgatással egymásba vihető körutakat nem különböztetjük meg?

b) Bizonyítsuk be, hogy $p|(p-1)!+1$ (Ezt nevezzük Wilson tételének).

⋆ ⋆ ⋆

24. Feladat. *Legyen $\Sigma = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$. Egy $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_l \rangle$ sorozatot univerzális sorozatnak nevezünk, ha $u_i \in \Sigma$, és Σ elemeinek tetszőleges permutációját megkaphatjuk U-ból $l-n$ elemének kihúzásával. Adott n esetén azt a minimális l-et keressük, amelyre létezik ℓ hosszú univerzális sorozat. Jelöljük $\ell(n)$-nel ezt a minimális számot. Adjunk becsléseket az $\ell(n)$ függvényre.*

25. Feladat. *Egy kelet—nyugati irányú út egy kanyargós folyón többször áthalad. A folyó délnyugaton ered, és végül (némi kanyargás után) keletre tart. Az úton lévő hidakat egy nyugatról keletre tartó utazás alatt megszámozzuk 1-től n-ig, az áthaladás szerinti sorrend alapján. Ezek után a folyón az eredetétől végigutazunk, és feljegyezzűk a hidak számát a találkozás szerinti sorrend alapján. Így az n szám egy sorbaállítását kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorbaállításban a páratlan helyeken páratlan számok állnak.*