4. FELADATSOR

1. Igazoljuk, hogy egy T fának legalább $\Delta(T)$ levele van, ahol $\Delta(T)$ a maximális fokszámot jelöli T-ben.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy fában bármely két csúcs között pontosan egy út létezik.

3. Egy 210 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?

4. Létezik-e olyan összefüggő gráf, amelynek fokszámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?

5. Igazoljuk, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet elhagyva a maradék gráf is összefüggő. [11.33]

6. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

7. Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n - c$.

8. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos élek szerepelnek. [11.24]

9. a) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

b) Mutassuk meg, hogy egy fában a leghosszabb utak lefoghatók egyetlen ponttal. (Azaz van olyan pont a fában, amelyen az összes maximális hosszúságú út áthalad.)
Megjegyzés: Megadható olyan összefüggő (nem fa) gráf, amelyben nincs ilyen pont. (De nem könnyű ilyen gráfot találni.)

10.$^+$ Legyenek $T_1, \ldots, T_k$ egy T fa összefüggő részgráfjai. Bizonyítsuk be, hogy ha bármelyik két T_i és T_j fának van közös pontja, akkor van olyan pont, amely az összes T_i-n rajta van.

11.$^+$ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

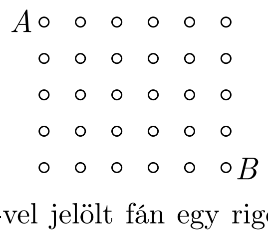
12.$^+$ Egy $n{\times}n$-es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.

13. Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan kört.

14.$^-$ Mely gráfok párosak a következő gráfok közül? [9.31]

a) K_n, vagyis az n pontú teljes gráf;
b) C_n, vagyis az n pontú kör;
c) S_n, vagyis az n élű csillag;
d) P_n, vagyis az n élű út;
e) H_n, vagyis az n dimenziós kockagráf (lásd 8. feladatsor).

15. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle északi, déli, keleti vagy nyugati irányban álló legközelebbi fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

16. Egy klubesten tizennégy fő vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az est folyamán hány különböző (ellenkező nemű) partnerrel táncolt. A cédulákon rendre a

$$3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$$

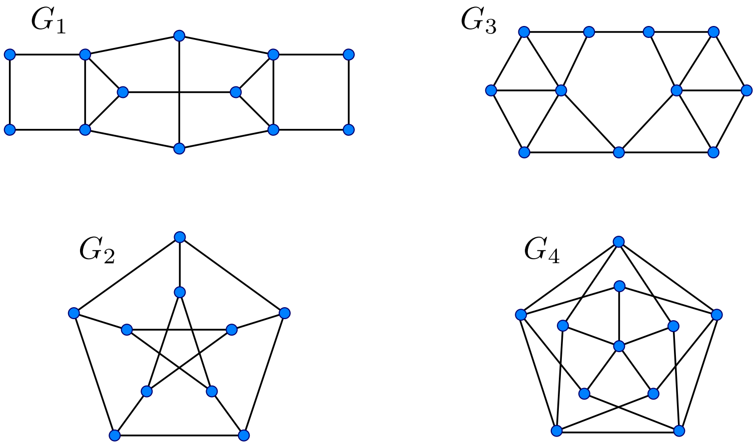
számok szerepeltek. Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

17. Határozzuk meg azokat a gráfokat, amelyekben nincs páratlan kör, és izomorfak a komplementerükkel.

18. Mutassuk meg, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával.

19.$^+$ Igazoljuk, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból alkalmas élek elhagyásával olyan páros gráfot kaphatunk, melyben minden csúcs foka legalább az eredeti fokszámának fele. (Ebből következik az előző feladat is.)

20. Határozzuk meg az ábrán látható gráfok kromatikus számát: [13.5]



21. Vegyünk egy 4 hosszú kört és egy 5 hosszú kört (melyek csúcsdiszjunktak). A 4 hosszú kör minden pontját kössük össze az 5 hosszú kör összes pontjával. Mennyi az így kapott (9 pontú) gráf kromatikus száma?

22. Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egy király egyikről a másikra léphet szabályos lépéssel. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma? [13.6]

23. A G gráf csúcshalmaza $\{1, \dots, 100\}$, és két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha relatív prímek. Igazoljuk, hogy $\chi(G) = \pi(100) + 1$, ahol $\pi(100)$ jelöli azt, hogy hány prímszám van 1-től 100-ig.

24. Az $\{1, \dots, 100\}$ csúcshalmazon egy egyszerű gráfot definiálunk: Legyen két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha egyik osztja a másikat. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát. [13.8]

25. Adott a síkon néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem halad át közös ponton. A keletkező metszéspontok alkotják a G gráf csúcshalmazát, és két csúcs pontosan akkor összekötött G-ben, ha szomszédos metszéspontok valamelyik egyenesen. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma legfeljebb 3. [13.22]
Segítség: Egy alkalmas sorrendben haladva színezzük mohó módon a csúcsokat.

26. A $KG(n, k)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2k$ esetén $\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$.
Megjegyzés: Lovász László topológiai érveléssel igazolta, hogy valójában egyenlőség teljesül.

27.$^+$ Mi az a minimális színszám, ahány színnel ki lehet színezni a (végtelen) négyzetrács mezőit úgy, hogy bárhogy rakunk le „L-alakot"

28.$^-$ Tekintsük a következő G (egyszerű) páros gráfot: G két színosztálya $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ és $F = \{v_1, \dots, v_n\}$, és az u_i és v_j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $i \neq j$. Színezzük G csúcsait a mohó algoritmussal (ld. előadás) a következő sorrendben: $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$.

a) Hány színt fog kiosztani a mohó algoritmus?

b) Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Tanulság: Előfordulhat, hogy a mohó algoritmus a optimálisnál jóval több szín felhasználásával színez (de vö. következő feladat).

29. A mohó színezési algoritmussal kapott jó színezés függ attól, hogy milyen sorrendben haladtunk végig a csúcsokon. Az előző feladatban láttuk, hogy előfordulhat, hogy „szerencsétlen" csúcssorrend esetén az algoritmus a kromatikus számnál több színt használ fel.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G (egyszerű) gráf esetén létezik a csúcsoknak olyan sorrendje, amely sorrend szerint haladva a mohó algoritmus $\chi(G)$ színt használ fel (azaz optimálisan színez).

Megjegyzés: Tehát elméletileg a kromatikus szám meghatározható úgy, hogy vesszük a csúcsok összes lehetséges sorrendjét, és minden sorrendre lefuttatjuk a mohó algoritmust: a kapott jó színezések között előforduló legkisebb felhasznált színszám lesz a kromatikus szám. Ezzel a módszerrel az a probléma, hogy nagyon lassú, a csúcsok összes lehetséges sorrendje $|V|!$, ami jellemzően óriási szám.

30. (**Hatszín-tétel.**) Az Euler-formula segítségével megmutatható, hogy minden egyszerű síkgráfban van legfeljebb ötödfokú csúcs. (A bizonyítás elolvasható az előadás honlapján.) Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy minden egyszerű síkgráf kromatikus száma legfeljebb 6.

31. a) Legyen G egy összefüggő gráf, és v egy tetszőleges csúcsa. Mutassuk meg, hogy G csúcsainak van olyan sorrendje, hogy v az utolsó csúcs, és v-t leszámítva az összes csúcsból vezet él valamely későbbi csúcsba.

b) Igazoljuk, hogy tetszőleges összefüggő, nem reguláris G (egyszerű) gráfra $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

32. Legyen G egy *háromszögmentes* gráf, amelynek kromatikus száma k. Konstruálunk G-ből egy G' gráfot a következőképpen: Kiindulásként vegyük a G gráf k darab csúcsdiszjunkt példányát. n^k lehetőségünk van arra, hogy mindegyik példányból kiválasszunk egy csúcsot, ahol n a G csúcsszámát jelöli. Minden ilyen kiválasztáshoz felveszünk egy új csúcsot, amelyet összekötünk a k kiválasztott csúccsal. Így egy $kn + n^k$ pontú gráfhoz jutunk, legyen ez G'. Mutassuk meg, hogy G' is háromszögmentes, és kromatikus száma $k + 1$.

Tanulság: A feladatban leírt operáció tehát megtartja a háromszögmentességet, és 1-gyel növeli a kromatikus számot. Így a (háromszögmentes) K_1 gráfból kiindulva ($G := K_1$) a fenti eljárást ismételgetve a $G, G', G'', G''', \dots$ gráfsorozat gráfjai mind háromszögmentesek, és az i-edik gráf kromatikus száma i. Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy háromszögmentes gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet (míg egy háromszögmentes gráf ω paraméterének értéke csak legfeljebb 2, illetve ha van (nemhurok)éle, akkor pontosan 2).

33. a) Egy versenyen $(m - 1)n + 1$ ember szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük m ember, akik páronként nem ismerik egymást, vagy van egy ember, aki legalább n másikat ismer.

b) Igaz marad-e az állítás, ha eggyel kevesebb ember vesz részt a versenyen? [16.1]

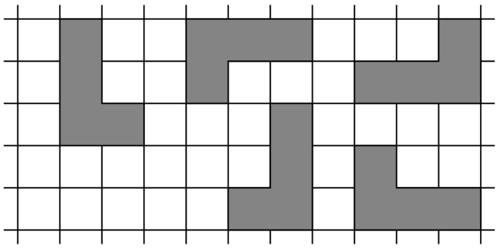
34. Egy n pontú teljes gráf ($n \geq 3$) éleit kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan Hamilton-kör, amely teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll. [16.2]

35. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális?

Segítség: $R(3) = 6$.

36. 17 ember vesz részt egy partin. Közülük bármelyik kettő vagy nem ismeri egymást, vagy jó barátok, vagy utálják egymást. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan ember, akik mind idegenek egymás számára, mind jó barátok, vagy mind utálják egymást.

37. Az n pontú teljes gráf éleit kiszíneztük n színnel, mindegyik színt felhasználva ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy kialakul „tarka” háromszög, azaz olyan három pontú kör, amelynek 3 éle 3 különböző színt kapott.(lásd ábra), az négy különböző színű mezőt takarjon le?



38.$^-$ Tekintsük a következő G (egyszerű) páros gráfot: G két színosztálya $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ és $F = \{v_1, \dots, v_n\}$, és az u_i és v_j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $i \neq j$. Színezzük G csúcsait a mohó algoritmussal (ld. előadás) a következő sorrendben: $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$.

a) Hány színt fog kiosztani a mohó algoritmus?

b) Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Tanulság: Előfordulhat, hogy a mohó algoritmus a optimálisnál jóval több szín felhasználásával színez (de vö. következő feladat).

39. A mohó színezési algoritmussal kapott jó színezés függ attól, hogy milyen sorrendben haladtunk végig a csúcsokon. Az előző feladatban láttuk, hogy előfordulhat, hogy „szerencsétlen” csúcssorrend esetén az algoritmus a kromatikus számnál több színt használ fel.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G (egyszerű) gráf esetén létezik a csúcsoknak olyan sorrendje, amely sorrend szerint haladva a mohó algoritmus $\chi(G)$ színt használ fel (azaz optimálisan színez).

Megjegyzés: Tehát elméletileg a kromatikus szám meghatározható úgy, hogy vesszük a csúcsok összes lehetséges sorrendjét, és minden sorrendre lefuttatjuk a mohó algoritmust: a kapott jó színezések között előforduló legkisebb felhasznált színszám lesz a kromatikus szám. Ezzel a módszerrel az a probléma, hogy nagyon lassú, a csúcsok összes lehetséges sorrendje $|V|!$, ami jellemzően óriási szám.

40. (**Hatszín-tétel.**) Az Euler-formula segítségével megmutatható, hogy minden egyszerű síkgráfban van legfeljebb ötödfokú csúcs. (A bizonyítás elolvasható az előadás honlapján.) Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy minden egyszerű síkgráf kromatikus száma legfeljebb 6.

41. a) Legyen G egy összefüggő gráf, és v egy tetszőleges csúcsa. Mutassuk meg, hogy G csúcsainak van olyan sorrendje, hogy v az utolsó csúcs, és v-t leszámítva az összes csúcsból vezet él valamely későbbi csúcsba.

b) Igazoljuk, hogy tetszőleges összefüggő, nem reguláris G (egyszerű) gráfra $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

42. Legyen G egy *háromszögmentes* gráf, amelynek kromatikus száma k. Konstruálunk G-ből egy G' gráfot a következőképpen: Kiindulásként vegyük a G gráf k darab csúcsdiszjunkt példányát. n^k lehetőségünk van arra, hogy mindegyik példányból kiválasszunk egy csúcsot, ahol n a G csúcsszámát jelöli. Minden ilyen kiválasztáshoz felveszünk egy új csúcsot, amelyet összekötünk a k kiválasztott csúccsal. Így egy $kn + n^k$ pontú gráfhoz jutunk, legyen ez G'. Mutassuk meg, hogy G' is háromszögmentes, és kromatikus száma $k + 1$.

Tanulság: A feladatban leírt operáció tehát megtartja a háromszögmentességet, és 1-gyel növeli a kromatikus számot. Így a (háromszögmentes) K_1 gráfból kiindulva ($G := K_1$) a fenti eljárást ismételgetve a $G, G', G'', G''', \ldots$ gráfsorozat gráfjai mind háromszögmentesek, és az i-edik gráf kromatikus száma i. Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy háromszögmentes gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet (míg egy háromszögmentes gráf ω paraméterének értéke csak legfeljebb 2, illetve ha van (nemhurok)éle, akkor pontosan 2).

43. a) Egy versenyen $(m-1)n+1$ ember szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük m ember, akik páronként nem ismerik egymást, vagy van egy ember, aki legalább n másikat ismer.
b) Igaz marad-e az állítás, ha eggyel kevesebb ember vesz részt a versenyen? [16.1]

44. Egy n pontú teljes gráf ($n \geq 3$) éleit kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan Hamilton-kör, amely teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll. [16.2]

45. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális?
Segítség: $R(3) = 6$.

46. 17 ember vesz részt egy partin. Közülük bármelyik kettő vagy nem ismeri egymást, vagy jó barátok, vagy utálják egymást. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan ember, akik mind idegenek egymás számára, mind jó barátok, vagy mind utálják egymást.

47. Az n pontú teljes gráf éleit kiszíneztük n színnel, mindegyik színt felhasználva ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy kialakul „tarka” háromszög, azaz olyan három pontú kör, amelynek 3 éle 3 különböző színt kapott.