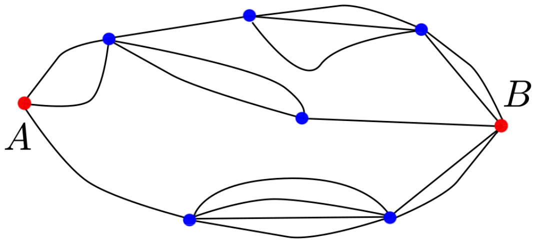
1. feladatsor

1. Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

2. Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva A-ból B-be kell eljutnunk. Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba (tehát mindig „távolodunk” A-tól)?



3. Hányféleképpen lehet elhelyezni a fehér és fekete királyt az üres 8×8-as sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

4. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?

5. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? [3.1]

6. Legyen U egy n elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $Y \subseteq X \subseteq U$. [TK. 3.1.3.]

7. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?

8. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben az elemek összege páratlan?

9. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.)

10. Ki lehet-e úgy tölteni egy $n \times n$-es táblázatot az 1, 2 és 3 számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?

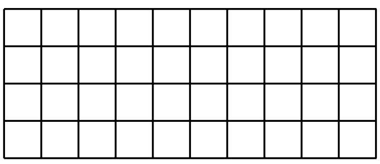
11. Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$. [1.25]

12. Igaz-e, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz? [1.8]

13. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amely 4-essel kezdődik, pontosan 3 db 2-es van benne, és nincs benne 0?

14. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre kihúzunk 6 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között pontosan két piros lap és pontosan két ász legyen? (A kihúzott lapok sorrendje nem számít.)

15. Hány téglalapot határoznak meg az alábbi rács vonalai? [3.4]



16. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a pozitív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2018.$$

17.$^{+}$ Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (azaz két olyan szám, amelynek különbsége 1)? [3.6]

18. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 2$ természetes számra

$$\frac{2^n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

19. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq k \geq 1$ esetén

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

20. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [3.17]

a) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

b) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

c) $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0, \quad \text{ha } n \geq 1.$

d) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

e) $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

f) $\displaystyle 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

g) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

21. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}.$$

22. a) A binomiális tételre való hivatkozás nélkül, kettős leszámlálással bizonyítsuk, hogy minden n és m pozitív egészre teljesül, hogy

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \cdots + \binom{n}{n}m^n.$$

b) Miért következik az előző pontból a binomiális tétel?

23.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$(5+\sqrt{26})^n$$

tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő. [3.21]

24. Írjuk fel egyszerűbb alakban az $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$ polinomot!

25. Indokoljuk meg, hogy a következő két feladatnak mi köze van egymáshoz, és a b) feladatot az a) feladat felhasználásával oldjuk meg:

a) Határozzuk meg az $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40})$ polinomszorzás eredményét. Ehhez használhatunk számítógépet. (A honlapomon bemutatom egy példával, hogy hogyan lehet polinomokat szorozni az ingyenes Wolfram Alphaval.)

b) Pénztárcánkban négy 5-forintos, egy 10-forintos, és két 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk pontosan kifizetni (tehát úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni)? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?

26. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajta gyümölcsök teljesen egyformák.)

27. Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)

28.$^-$ Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a+b+c+d=2018.$$

29. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy

a) tetszőleges elosztás megengedett;
b) mindenki kapjon legalább egyet;
c) az i-edik gyerek legalább i forintot kapjon ($i=1,\dots,n$);
d) mindenki páros sok forintot kapjon;
e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

30. Cégünknél 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzösszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?

31. Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

32. Hány monoton növő $[n]\to[n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x<y$ esetén $f(x)\le f(y)$.)

33. Mutassuk meg, hogy a $\{0,1,\dots,2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1,2,\dots,2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

34. Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1,\dots,m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n}(1+x+x^2+\dots+x^{m_k}).$$

35. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1,2,\dots,n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1,n+2,\dots,2n$ multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

36.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1\dots c_k=\binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1+\dots+c_k=n$. [TK. 3.4.11.]

37. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$,

b) $\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right)$,

c) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n-1}{i}\!\!\right)$.