3. FELADATSOR

1.$^-$ Lehet-e egy (8 pontú) gráf fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$?

2.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám. (Az ismeretségek kölcsönösek.) [9.21]

3. a) Rajzoljunk le egy olyan (8 pontú) gráfot, amelynek fokszámsorozata: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
b) Van-e ilyen *egyszerű* gráf?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két főből álló társaságban található két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. [9.23]

5. A G egyszerű gráf fokszámsorozata: $1, 1, 1, 2, 2, 2, 5$. Hány éle van $\overline{G}$-nek, azaz G komplementerének?

6. Egy körmérkőzéses sakktornán 10 résztvevő van. 11 partit már lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan versenyző, aki már legalább 3 partit játszott.

7. Egy 10 férfiból és 10 nőből álló baráti társaságban minden férfi 5 emberrel fogott kezet az este folyamán. Hány férfi–nő kézfogás történt, ha tudjuk, hogy az összes férfi–férfi kézfogások száma 12? (Férfi–nő kézfogás: Egy férfi és egy nő fog kezet. Férfi–férfi kézfogás: Két férfi fog kezet.)

8. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb $6n$ ajándéktárgyat adtak át.

9. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze (a változás előjelét is figyelembe véve). [9.24]

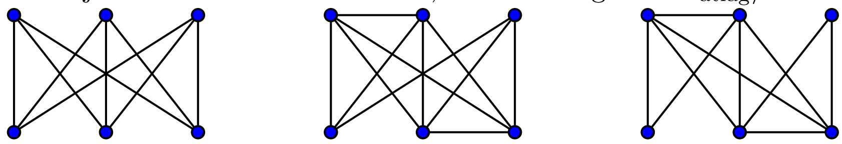
10. Egy partin öt házaspár vett részt. A parti elején elején látszólag véletlenszerűen néhányan kézfogással üdvözölték egymást (senki nem fogott kezet a házastársával). Az egyik férj kíváncsi lett, és mindenkitől megtudakolta a kézfogásai számát (a feleségétől is). Meglepetten vette tudomásul, hogy kilenc különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet a felesége?

11. Egy pingpongbajnokságon mindenki egyszer játszott mindenkivel. Azt mondjuk, hogy az A játékos közvetett módon legyőzte a B játékost, ha van olyan A által megvert C játékos, aki B-t megverte. Igazoljuk, hogy van olyan játékos, aki minden más játékost legyőzött (közvetlenül vagy közvetett módon).

12.$^+$ Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával, és természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

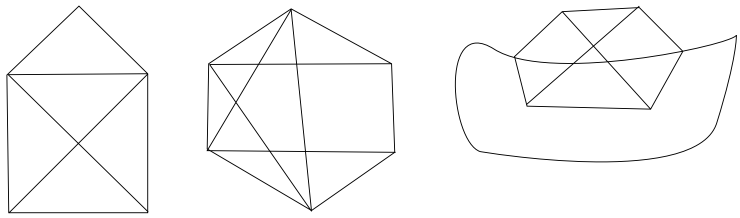
13.$^+$ A 11.a osztály sakkozni szerető diákjai körmérkőzéses sakktornát rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely kettőhöz van legalább egy olyan, akit mindketten legyőztek a tornán. Legalább hányan szeretnek sakkozni a 11.a-ban? [OKTV 2015/2016, II. kat., 1. ford.]

14.$^+$ Az elmúlt évben a világranglistán nyilvántartott teniszezők átlagosan $d_{\text{átlag}}$ ellenféllel játszottak a ranglistáról ($d_{\text{átlag}} \in \mathbb{Q}$). Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük néhány úgy, hogy ha csak az ezeknek egymás ellen játszott mérkőzéseit nézzük, mindenki legalább $d_{\text{átlag}}/2$ másikkal játszott.



15.$^-$ A G egyszerű csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $1 \le |i-j| \le 2$. Van-e nyílt, illetve zárt Euler-vonal G-ben? (Ha igen, adjuk is meg.)

16.$^-$ Az alábbi három alakzat közül melyek rajzolhatók le a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?



17. a) A H_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \ge 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok (pontosan) egy bitben térnek el. Van-e Euler-vonal H_n-ben? (Ezt a H_n gráfot az n dimenziós (hiper)kockagráfnak nevezik.)

b) A $\widetilde{H}_n$ gráf csúcshalmaza ugyanaz, mint H_n csúcshalmaza, és $\widetilde{H}_n$-ben két csúcs pontosan akkor összekötött, ha két bitben térnek el. Van-e Euler-vonal $\widetilde{H}_n$-ben?

18. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható zárt sétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

19. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával. [10.15]

20. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

21. Egy összefüggő G gráfban $2k$ pontnak van páratlan foka ($k \ge 1$). Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab éldiszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is? [10.12]

22.$^-$ Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

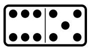
24. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?

25. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

26. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

27. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

28. Egy dominó két összeragasztott négyzetből áll, mely négyzeteken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 szám van (pöttyökkel jelezve). Minden konfiguráció előfordul, így összesen $7 + \binom{7}{2} = 28$ különböző dominó van. Le lehet-e rakni ezt a 28 dominót körszerűen úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező fele mindig ugyanannyi pöttyöt tartalmazzon?



29.$^{+}$ Egy hegycsúcsról két út vezet le a tengerparthoz. Egyik út sem megy a tengerszint alá, illetve a hegycsúcsnál magasabbra. Mutassuk meg, hogy Anita és Béla a két úton haladva el tud úgy jutni a hegycsúcsról a tengerparthoz, hogy közben magasságuk végig megegyezik! (Az utakat „szép” görbék írják le, véges sok emelkedő/lejtő szakasszal.)

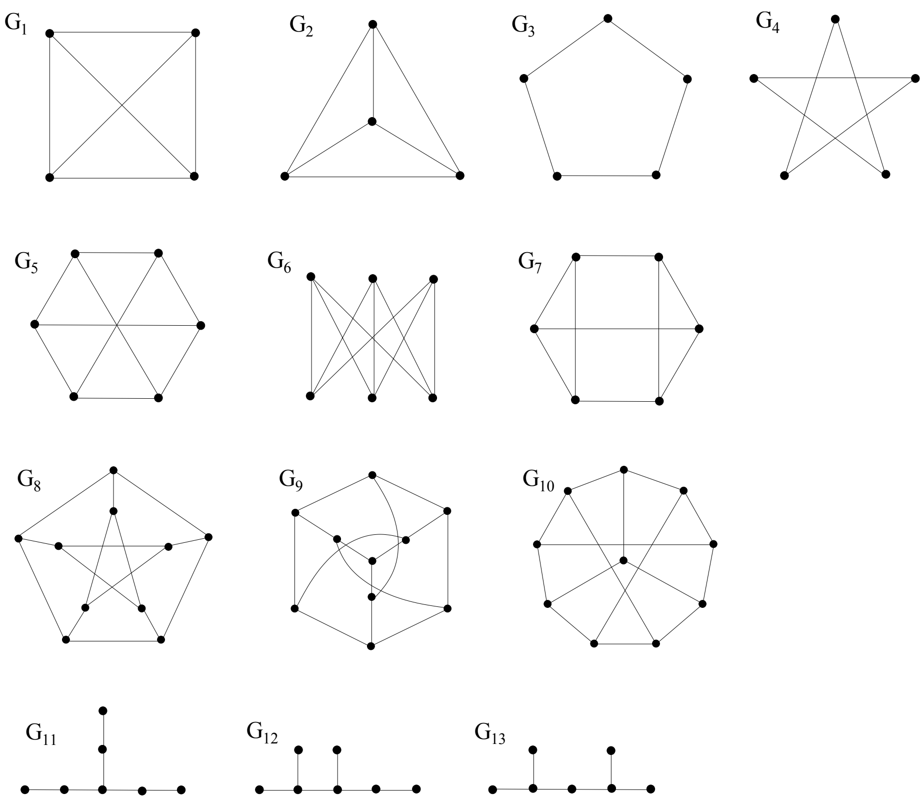
30.$^{+}$ Igazoljuk, hogy bármely n-re létezik olyan 2^n hosszú 0-1 sorozat, amelynek körszerű felírásában megtalálható (pontosan egyszer) az összes n hosszú 0-1 sorozat, az óramutató járásával megegyező körüljárásban elolvasva n egymást követő bitet.

$$00010111 \longrightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \end{array}$$

Segítség: Olvassuk el az irányított gráfokról szóló részt.
Megjegyzés: Az ilyen sorozatok száma $2^{2^{n-1}}$, melyre elemi bizonyítás nem ismert.

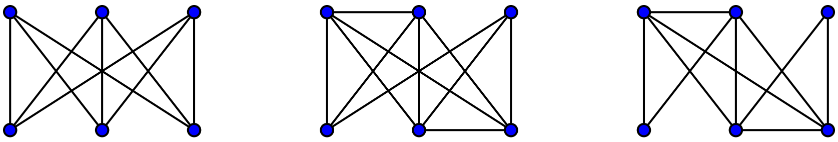
31.$^{+}$ Egy társaságot vegyes társaságnak nevezünk, ha sem olyan nincs benne, aki mindenkit ismer, sem olyan, aki senkit nem ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább öttagú társaság vegyes, akkor kiválaszthatók közülük négyen olyanok, akik egymás között vegyes társaságot alkotnak.

32. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak egymással?



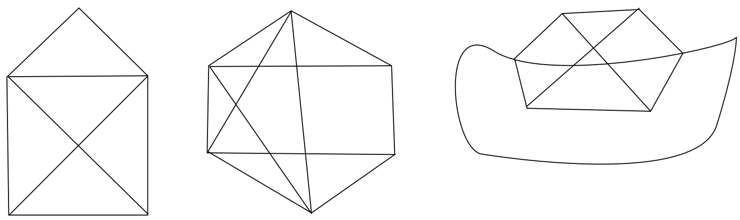
33. Legyen $KG(5,2)$ az az egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza $\binom{[5]}{2}$, és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Rajzoljuk le a $KG(5,2)$ gráfot, és döntsük el, hogy az előző feladatban szereplő gráfok közül melyekkel izomorf.

34.$^{-}$ Az alábbi gráfok közül melyekben van nyílt, illetve zárt Euler-vonal? (Ha van, akkor adjuk is meg.)



35.$^{-}$ A G egyszerű csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $1 \leq |i - j| \leq 2$. Van-e nyílt, illetve zárt Euler-vonal G-ben? (Ha igen, adjuk is meg.)

36.$^{-}$ Az alábbi három alakzat közül melyek rajzolhatók le a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?



37. a) A H_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok (pontosan) egy bitben térnek el. Van-e Euler-vonal H_n-ben? (Ezt a H_n gráfot az n dimenziós (hiper)kockagráfnak nevezik.)

b) A $\widetilde{H}_n$ gráf csúcshalmaza ugyanaz, mint H_n csúcshalmaza, és $\widetilde{H}_n$-ben két csúcs pontosan akkor összekötött, ha két bitben térnek el. Van-e Euler-vonal $\widetilde{H}_n$-ben?

38. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható zárt sétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

39. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával. [10.15]

40. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

41. Egy összefüggő G gráfban $2k$ pontnak van páratlan foka ($k \geq 1$). Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab éldiszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is? [10.12]

42.$^{-}$ Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

43. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

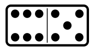
44. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?

45. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

46. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

47. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

48. Egy dominó két összeragasztott négyzetből áll, mely négyzeteken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 szám van (pöttyökkel jelezve). Minden konfiguráció előfordul, így összesen $7 + \binom{7}{2} = 28$ különböző dominó van. Le lehet-e rakni ezt a 28 dominót körszerűen úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező fele mindig ugyanannyi pöttyöt tartalmazzon?



49.$^+$ Egy hegycsúcsról két út vezet le a tengerparthoz. Egyik út sem megy a tengerszint alá, illetve a hegycsúcsnál magasabbra. Mutassuk meg, hogy Anita és Béla a két úton haladva el tud úgy jutni a hegycsúcsról a tengerparthoz, hogy közben magasságuk végig megegyezik! (Az utakat „szép" görbék írják le, véges sok emelkedő/lejtő szakasszal.)

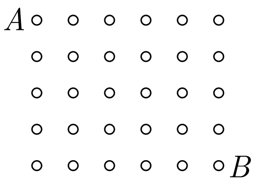
50.$^+$ Igazoljuk, hogy bármely n-re létezik olyan 2^n hosszú 0-1 sorozat, amelynek körszerű felírásában megtalálható (pontosan egyszer) az összes n hosszú 0-1 sorozat, az óramutató járásával megegyező körüljárásban elolvasva n egymást követő bitet.

$$00010111 \longrightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \end{array}$$

Segítség: Olvassuk el az irányított gráfokról szóló részt.
Megjegyzés: Az ilyen sorozatok száma $2^{2^{n-1}}$, melyre elemi bizonyítás nem ismert.

51.$^-$ Körszerűen elhelyezünk 14 csúcsot, és a negyedszomszédosakat összekötjük. Hány komponense lesz a kapott gráfnak?

52.$^-$ Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

53.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő.

54.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy ha egy G összefüggő gráf egy köréből elhagyunk egy élt, akkor a maradék gráf is összefüggő lesz.

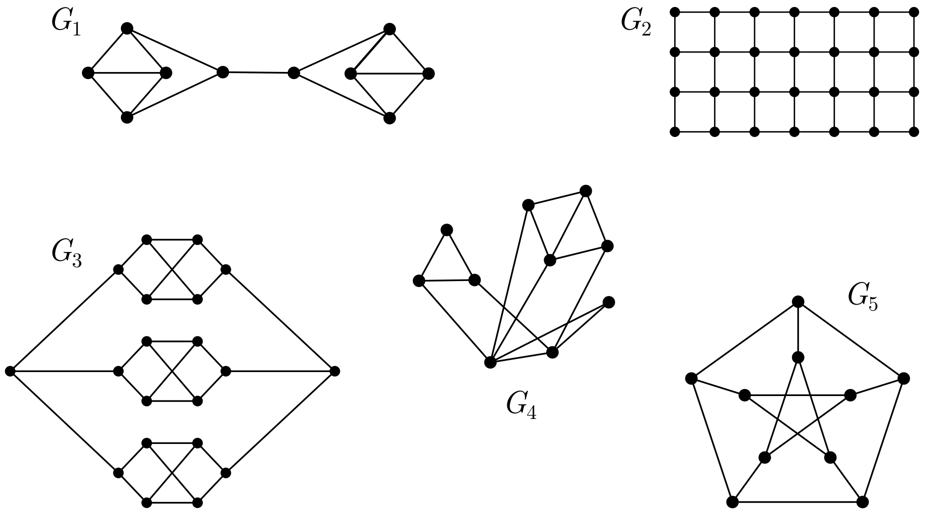
55.$^-$ Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

56. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább δ.
a) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van (legalább) δ hosszú út.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\delta \geq 2$, akkor létezik G-ben δ-nál hosszabb kör.
(Ebből következik az előző feladat is.)

57. Bizonyítsuk be a következőket:
a) Ha egy gráf 2-reguláris, akkor minden komponense kör.
b) Ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb 2, akkor a gráfnak minden komponense út vagy kör (ahol az út komponens 1 pontú, azaz izolált csúcs is lehet).
Megjegyzés. Ezek „akkor és csak akkor" állítások, csak a másik irány nyilvánvaló.

58. Legyen G egy olyan gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza körök élhalmazainak diszjunkt uniója. [TK. 4.1.12.]

59. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:



60. Az előző feladat G_2 gráfjának mintájára definiálhatjuk a négyzetrács-gráfokat (a G_2 a 4×7-es négyzetrács-gráf). Mely m, n-ekre van Hamilton-kör az $m\times n$-es négyzetrács-gráfban?

61. a) 12 ember vesz részt egy vacsorán. Mindenki legalább 6 embert ismer a társaságból. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy le tudnak úgy ülni egy kör alakú asztal mellé, hogy mindenki ismeri a két szomszédját.

b) Késve megérkezik András, aki legalább 7 embert ismer a jelenlévők közül. Igazoljuk, hogy Andrással együtt a 13 ember le tud ülni az előzőek szerint.

c) Akkor is tudnánk-e ezt, ha András csak 6 embert ismerne?

62. Van-e Hamilton-kör a H_n hiperkockagráfban (ld. előző feladatsor)?

63. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?

64. Egy $3\times3\times3$ méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan kocka következzen, amelyiknek az épp elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát. El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot út, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, aminek van közös lapja az elsővel?

65. A $KG(16,3)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[16]}{3}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $KG(16,3)$-ban van Hamilton-kör.

66. Igazoljuk, hogy ha egy $2n+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-utat. (Vezessük vissza a Dirac-tételre a feladatot.)

67. (Rédei tétele.) Igazoljuk, hogy K_n bármely irányításában van irányított Hamilton-út. Igaz-e, hogy mindig van Hamilton-kör is?

68.$^+$ Egy társaságban néhányan korábbról már ismerik egymást, de nem mindenki ismer mindenkit. Minden este a társaság egyik tagja meghívja az összes (aktuális) ismerősét a társaságból egy partira, ahol bemutatja őket egymásnak. Tegyük fel, hogy már mindenki tartott legalább egy ilyen partit, de Anna és Béla még nem ismerősök. Igazoljuk, hogy ők a következő partin sem lesznek bemutatva egymásnak.