

1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

Válaszainkat mindig indokoljuk!

Az **1-3. feladatoknál** a végeredményt „számszerűsített formában” adjuk meg, például: 20160. (Akinak nincs számológépe, olyan választ adjon, amelyben kombinatorikus mennyiségek már nem szerepelnek, csak alapműveletek/hatványozás stb.)

1. Az $\{1, 2, \dots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz (legalább egy) 3-mal osztható számot? (3 p.)
2. A Bolyai Közlekedési Vállalat (BKV) jegyein az alábbi 5×5 -ös számtáblázat szerepel:

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Az előírás szerint a buszon található lyukasztónak tíz számot kell kilyukasztania úgy, hogy minden sorban pontosan kettő legyen kilyukasztva. Hány ilyen lyukasztási mód van? (3,5 p.)

3. Hány olyan megoldása van a természetes számok körében az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$$

egyenletnek, amelyre teljesül, hogy

$$x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 2, \quad x_4 \leq 2?$$

(A 0 természetes szám. Az utolsó egyenlőtlenségjel a többihez képest fordítva áll.) (3,5 p.)

4. 15 különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe (tehát összesen 30 zoknit). A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz a 10. kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? (3,5 p.)
5. Legyen $n \geq 3$. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ halmaznak, amelyben az 1 nem az első helyen, a 2 nem a második helyen, és a 3 nem a harmadik helyen áll? (3,5 p.)
6. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot a következő lineáris rekurzióval definiáltuk:

$$a_0 = 5, \quad a_1 = 2; \quad a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2.$$

- a) Oldja meg a rekurziót, azaz adjon képletet a_n -re.
- b) Az a_2 sorozatelemet számolja ki először a rekurzív definíció alapján, majd az előző pontban kapott képlet segítségével. Ellenőrizze a két válasz egyenlőségét. (4 p.)

Jó munkát!