

1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. Hányféleképpen lehet 20 egyforma szaloncukrot szétosztani András, Béla, Cecília, Dénes és Erika között úgy, hogy minden lány legalább egyet, és minden fiú legalább kettőt kapjon?
2. Hány olyan $[n] \rightarrow [n]$ permutáció van, amelyben az 1 elemet tartalmazó ciklus hossza k ?
Segítség: A helyes válasz nem függ k -től (ha $1 \leq k \leq n$), ami elég meglepő tény.
3. Legyen U egy n elemű halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre X és Y *diszjunkt* részhalmazai U -nak.
4. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$.
5. Legyen n egy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Segítség: Tekintsük a $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ és $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ polinomok szorzatát. (Tisztán kombinatorikus úton is megoldható a feladat.)

6. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér.

Jó munkát!