6. Rekurziók

1. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$-es téglalapot dominókkal (1×2-es téglalapokkal)?

2. Egy építőjátékunk van, amely piros és kék téglákat tartalmaz. Hányféleképpen lehet ilyen téglákból n magas tornyot építeni, ha nem engedjük meg, hogy két piros tégla szomszédos szintre kerüljön? (A téglák a színektől eltekintve egyformák. Minden szintre egy tégla kerül.)

3. Hányféleképpen lehet az n számot pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?

4. Hányféleképpen lehet az n számot *páratlan* pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?

5. n forintunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (zárójelben az egységár): perec (1 forint), fagylalt (2 forint), csoki (2 forint). Hányféleképpen költhetjük el a pénzünket? [6.17]

6. Legyen s_n azoknak az n jegyű, csak $0, 1, 2$ számjegyeket tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 3$-ra $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$. [6.20]

7. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.
a) $a_0 = 1,\ a_1 = 6;\quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
b) $a_0 = 3,\ a_1 = 6;\quad a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
c) $a_0 = 1,\ a_1 = 2;\quad a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
d) $a_0 = 1,\ a_1 = 1;\quad a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
e) $a_0 = 6,\ a_1 = 8;\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
f) $a_0 = 3,\ a_1 = -3;\quad a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
g) $a_0 = 1,\ a_1 = 1;\quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
h) $a_0 = 1,\ a_1 = 1;\quad a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
i) $a_0 = 1,\ a_1 = 1;\quad a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
j) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 13;\quad a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
k) $a_0 = 17,\ a_1 = 14,\ a_2 = 110;\quad a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).

8. Adjunk meg egy olyan másodrendű lineáris rekurziót, amelynek a megoldása:

$$a_n = 3 \cdot 5^n + (-4)^n.$$

9.$^+$ Oldjuk meg a következő rekurziót:

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n + 2^n \ \text{(ha } n \geq 2).$$

10. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?

11. Egy kör alakú asztal körül $2n$-en ülnek. Hányféleképpen alkothatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik kezet fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)

12.$^+$ Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Lineáris rekurzió megoldása Wolfram Alphával:
A 7/b. feladat megoldása: `solve a(0)=3, a(1)=6, a(n)=a(n-1)+6a(n-2)`

Kilenc kidolgozott lineáris rekurzió megoldás Hajnal Péter honlapján:
http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/BSc_Kombinatorika/lin_alap.htm