

## 5. LOGIKAI SZITA

1. Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az  $A$ ,  $B$ , illetve  $C$  párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind  $A$ , mind  $B$ , 30% számára szimpatikus mind  $A$ , mind  $C$ , és 27% számára szimpatikus mind  $B$ , mind  $C$ . Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

2. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

3. Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex,  $n$  oldalú sokszög csúcsai közül hármát úgy, hogy semelyik kettő se legyen szomszédos? [7.9]

4. (Vö. I/16. feladat.) Hány olyan hétjegyű szám van, amely csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaz (mindegyiket legalább egyszer)?

5. Egy számítógépes rendszerben 8 karakterből álló jelszavakat kell megadni az angol ábécé kisbetűiből (**a-z**, ez 26 darab karakter), az angol ábécé nagybetűiből (**A-Z**, ez újabb 26 karakter) és számjegyekből (**0-9**, ez 10 darab karakter) választva a karaktereket. (Egy karaktert többször is használhatunk.) Biztonsági okokból egy jelszótól megkövetelik, hogy tartalmazzon kisbetűt, nagybetűt és számjegyet is. Hány korrekt jelszó van?

6. Hány olyan  $n$ -nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

7. Hányféleképpen lehet a  $3 \times 3$ -as négyzet kilenc mezőjét pirosra és kékre színezni úgy, hogy semelyik  $2 \times 2$ -es résznégyzet (a sarkoknál) ne legyen teljesen piros? [A mezők meg vannak különböztetve, például meg vannak számozva 1-től 9-ig.]

8. Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

9. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

10. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

11. Hány szürjektív  $[n] \rightarrow [k]$  leképezés van?

*Segítség:* A feladat így is megfogalmazható [miért?]: Hány olyan  $n$  hosszú sorozat készíthető az  $1, 2, \dots, k$  számokból, amely tartalmazza az összes számot 1-től  $k$ -ig legalább egyszer?

12. Jelölje  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  azt a számot, hogy egy  $n$  elemű halmazt hányféleképpen lehet  $k$  darab (nem-üres) halmazra partícionálni. (Például  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3$ , mert az  $\{1, 2, 3\}$  halmaznak 3 db 2 osztályból álló partícionálása van:  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$  és  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ .) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

*Megjegyzés:* Az  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  számokat másodfajú Stirling-számoknak nevezzük.

13. Legyen  $\phi(n)$  az  $n$ -nél nem nagyobb,  $n$ -hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha  $n$  prímtényezőző felbontása  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , akkor

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \quad [7.5]$$

14. (Elcserélt levelek problémája.)

a) Hány fixpont nélküli permutáció van az  $[n]$  halmazon?

b) Hány olyan permutáció van az  $[n]$  halmazon, amelynek pontosan  $k$  darab fixpontja van?

**15.** Egy gálavacsorán  $n$  házaspár vesz részt. Mind a  $2n$  jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

**16.** Hányféleképpen lehet egy  $n$  elemű halmazt  $k$  darab különböző,  $m$  elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

**17.+** Hány olyan  $\pi : [n] \rightarrow [n]$  permutáció van, amelyre  $\pi(i+1) - \pi(i) \neq 1$  teljesül minden  $i$ -re ( $1 \leq i \leq n-1$ )?

**18.+** Hányféleképpen ülhet le  $n$  házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy a férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett? (A székek meg vannak számozva.)

**19.** Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases} \quad [7.13]$$

**20.** Bizonyítsuk be, hogy  $m, n \geq 1$  esetén

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0. \quad [7.15]$$

**21.** Bizonyítsuk be, hogy  $m, n \geq 1$  esetén

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} = 0. \quad [7.16]$$