1. Kombinatorikus alapelvek, részhalmazok

1. Hány legalább 6, de legfeljebb 9 karakterből álló jelszó készíthető a 26 betűs angol ábécé betűit felhasználva?

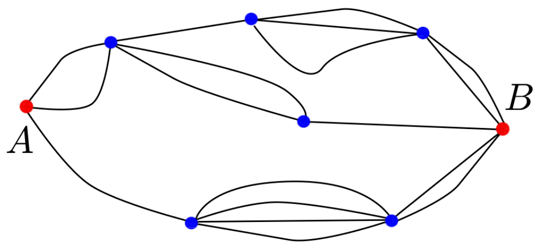
2. Hány olyan egész szám van 100-tól 9.999-ig, amely páros számjeggyel kezdődik és végződik? Hol melyik kombinatorikus alapelvet használtuk a feladat megoldása során?

3. Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

4. Hányféle új magyar rendszámtábla készíthető, ha a jogszabály a következőket írja elő? (A latin ábécé 26 betűs, melyből 5 betű magánhangzó.)

„Az állandó rendszámtábla a latin abc szerinti két magánhangzóból vagy két mássalhangzóból – kivéve a cs, gy, ly, ny, sz, ty, zs betűkombinációkat –, az ezt követő címer után két betűjelből, kötőjelből és három számjegyből áll. A rendszámtábla betűjelei helyén ékezetes magánhangzók nem állhatnak, a számjegyek helyén 001-től 999-ig terjedő érték szerepelhet.”

5. Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva A-ból B-be kell eljutnunk. Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba (tehát mindig „távolodunk” A-tól)?



6. Hányféleképpen lehet elhelyezni a fehér és fekete királyt az üres 8×8-as sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

7. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?

8. Hány olyan egész szám van 0-tól 999.999-ig, amely tartalmaz 3-as számjegyet?

9. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? [3.1]

10. n különböző csokit két (nemüres) csoportra osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?

11. Legyen U egy n elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $X \subseteq Y \subseteq U$. [TK. 3.1.3.]

12. Egy n elemű halmaz összes részhalmaza közül találomra kiválasztunk egyet, majd az összes részhalmaz közül megint kiválasztunk egyet (uniform módon, egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott részhalmaz közül egyik tartalmazza a másikat. [3.11]

13. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?

14. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben az elemek összege páratlan?

15.$^+$ A $\{2, 4, 6, \ldots, 16\}$ halmaz összes részhalmazára kiszámoljuk az elemek összegének utolsó számjegyét. Igazoljuk, hogy minden lehetséges végződés páros sokszor fordul elő!

16.$^+$ (Kis Fermat-tétel.) Igazoljuk kombinatorikus érveléssel, hogy tetszőleges p prímszám és a pozitív egész esetén $p|a^p - a$.

17. Az alábbiak közül mely természetes számokból van több 1.000.000-ig:
(i) amelyek csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(ii) amelyek csak 3, 8 és 9 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(iii) amelyek csak 3, 8 és 0 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer)?

18.

$$\sum_{R\subseteq[n]} |R| = ?$$

19. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.)

20.$^+$ Ha M egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük $S(M)$-mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy M elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például

$$S(\{1, 2, 5, 6, 9\}) = 9 - 6 + 5 - 2 + 1 = 7, \qquad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az $S(M)$ összegek összege, ha M befutja az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz összes nemüres részhalmazát? [3.36]

21. Ki lehet-e úgy tölteni egy $n{\times}n$-es táblázatot az 1, 2 és 3 számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?

22. Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$. [1.25]

23. Igaz-e, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz?

24.$^+$ Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát" hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (OKTV, 1963.)

25. Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 3 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy a klubok száma megegyezik az osztály tanulóinak számával.

26.$^+$ Egy matematikaversenyen 200 résztvevő vett részt, ahol 6 feladatot kellett megoldaniuk. Minden feladatra legalább 120 helyes megoldás érkezett. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan versenyző, hogy mindegyik problémát megoldotta legalább az egyikük. [IMC]

27. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tau(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \ln n,$$

ahol $\tau(j)$ a j szám osztóinak számát jelöli.

28.$^+$ Kombinatorikus érveléssel (kettős leszámlálással) hozzuk zárt alakra az alábbi összeget:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n.$$