

1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. A matematikus kirándulás 10 résztvevője (köztük Eszter és Heni) Avalon játékot játszik. A játék elején sorsolással szétosztják a következő szerepeket a játékosok között: 4 db „Arthur hű szolgálja”, 1 db „Merlin”, 1 db „Percival”, 3 db „Mordred kegyence” és 1 db „orgyilkos”. Hány olyan szereposztás van, amelyben Eszter „Arthur hű szolgálja”, Heni pedig „Merlin” karaktert kap?

2. Az $\{1, 2, \dots, 100\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz páros sok páratlan számot?

3. Igazoljuk, hogy

$$\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right),$$

ahol $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]$ a 2 ciklusból álló $[n] \rightarrow [n]$ permutációk számát jelöli.

4. Hányféle ajándécsomagot lehet készíteni 6 fajta csokiból úgy, hogy a csomagban összesen 30 csoki legyen, és mind a 6 fajtából páratlan sok? (Az egyes fajtákból korlátlan mennyiség áll rendelkezésünkre.)

5. Legyen $n \geq 2$. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}.$$

Segítség: Ha az $\binom{n}{k}$ számok generátorfüggvényét ismerjük (n fix), akkor a $k \binom{n}{k}$ számokét is.

6. Hányféleképpen lehet 7 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

Segítség: Logikai szitával megoldható a feladat.

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér.

Jó munkát!