1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy az E és I betűk ne kerüljenek egymás mellé?

2. Hányféleképpen lehet az n számot pozitív egészek összegére bontani, ha a tagok sorrendje is számít, és egytagú összeg is megengedett ($n \in \mathbb{N}$)? Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: 3, 2+1, 1+2, 1+1+1.

3. Igazoljuk, hogy egy n elemű halmaz $n-2$ ciklusú permutációinak száma $2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$.

4. A Bolyai Lottón 2011 szám van (1-től 2011-ig), ebből 100-at sorsolnak ki. A szokásos ikszelős játék mellett lehetőség van arra is, hogy a játékos megtippelje, hogy a kisorsolt számok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik paritásra érdemesebb tippelni, azaz melyik típusú lottósorsolás-kimenetelből van több?
Segítség: Tekintsük az $(1-x)(1+x)(1-x)(1+x)\ldots(1-x)$ polinomot (itt 2011 tényező szerepel), mely $(1-x^2)^{1005}(1-x)$ alakban is felírható.

5. Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right)$$

6.$^{+}$ Jelölje $B(n)$ az n-edik Bell-számot, azaz az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz partícióinak számát. Például $B(3) = 5$, ugyanis $\{1, 2, 3\}$ partíciói a következők: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$. Igazoljuk, hogy az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz azon partícióinak száma, melyeknek egyik osztályában sincs két szomszédos szám, $B(n-1)$.

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér. *Jó munkát!*