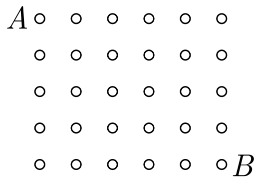
8. Összefüggőség, séták, körök

1.$^-$ Körszerűen elhelyezünk 14 csúcsot, és a negyedszomszédosakat összekötjük. Hány komponense lesz a kapott gráfnak?

2.$^-$ Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G összefüggő gráf egy köréből elhagyunk egy élt, akkor a maradék gráf is összefüggő lesz.

4.$^-$ Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?

8. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

9. Igazoljuk a következőket:

a) Egy gráfban egy zárt *vonal* olyan részgráfot határoz meg, amelyben minden csúcs foka páros.

b) Egy gráfban egy nyílt *vonal* olyan részgráfot határoz meg, amelyben pontosan két páratlan fokú csúcs van: a vonal két végpontja.

10. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

11. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

12. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

13. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább δ.

a) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van (legalább) δ hosszú út.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\delta \geq 2$, akkor létezik G-ben δ-nál hosszabb kör. (Ebből következik az előző feladat is.)

14. Bizonyítsuk be a következőket:

a) Ha egy gráf 2-reguláris, akkor minden komponense kör.

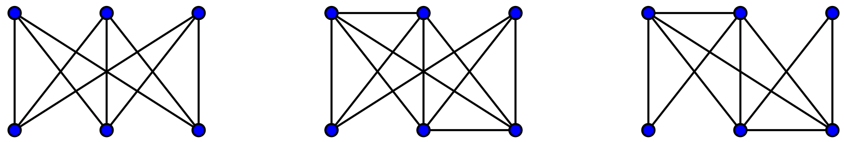
b) Ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb 2, akkor a gráfnak minden komponense út vagy kör (ahol az út komponens 1 pontú, azaz izolált csúcs is lehet).

Megjegyzés. Ezek „akkor és csak akkor” állítások, ugyanis a másik irányok nyilvánvalók.

15. Legyen G egy olyan gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza körök élhalmazainak diszjunkt uniója. [TK. 4.1.12.]

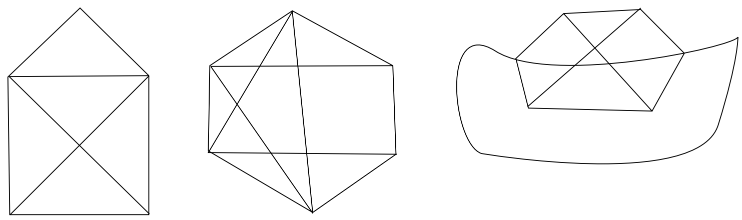
16.$^+$ Egy társaságban néhányan korábbról már ismerik egymást, de nem mindenki ismer mindenkit. Minden este a társaság egyik tagja meghívja az összes (aktuális) ismerősét a társaságból egy partira, ahol bemutatja őket egymásnak. Tegyük fel, hogy már mindenki tartott legalább egy ilyen partit, de Anna és Béla még nem ismerősök. Igazoljuk, hogy ők a következő partin sem lesznek bemutatva egymásnak.

17.$^-$ Az alábbi gráfok közül melyekben van nyílt, illetve zárt Euler-vonal? (Ha van, akkor adjuk is meg.)



18.$^-$ A G egyszerű csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $1 \leq |i - j| \leq 2$. Van-e nyílt, illetve zárt Euler-vonal G-ben? (Ha igen, adjuk is meg.)

19.$^-$ Az alábbi három alakzat közül melyek rajzolhatók le a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?



20. a) A H_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok (pontosan) egy bitben térnek el. Van-e Euler-vonal H_n-ben? (Ezt a H_n gráfot az n dimenziós (hiper)kockagráfnak nevezik.)

b) A $\widetilde{H}_n$ gráf csúcshalmaza ugyanaz, mint H_n csúcshalmaza, és $\widetilde{H}_n$-ben két csúcs pontosan akkor összekötött, ha két bitben térnek el. Van-e Euler-vonal $\widetilde{H}_n$-ben?

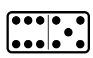
21. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható zárt sétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

22. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával. [10.15]

23. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

24. Egy összefüggő G gráfban $2k$ pontnak van páratlan foka ($k \geq 1$). Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab éldiszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is? [10.12]

25. Egy dominó két összeragasztott négyzetből áll, mely négyzeteken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 szám van (pöttyökkel jelezve). Minden konfiguráció előfordul, így összesen $7 + \binom{7}{2} = 28$ különböző dominó van. Le lehet-e rakni ezt a 28 dominót körszerűen úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező fele mindig ugyanannyi pöttyöt tartalmazzon?



26.$^{+}$ Egy hegycsúcsról két út vezet le a tengerparthoz. Egyik út sem megy a tengerszint alá, illetve a hegycsúcsnál magasabbra. Mutassuk meg, hogy Anita és Béla a két úton haladva el tud úgy jutni a hegycsúcsról a tengerparthoz, hogy közben magasságuk végig megegyezik! (Az utakat „szép” görbék írják le, véges sok emelkedő/lejtő szakasszal.)

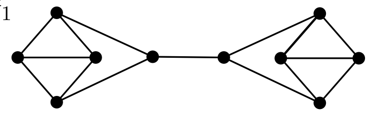
27.$^{+}$ Igazoljuk, hogy bármely n-re létezik olyan 2^n hosszú 0-1 sorozat, amelynek körszerű felírásában megtalálható (pontosan egyszer) az összes n hosszú 0-1 sorozat, az óramutató járásával megegyező körüljárásban elolvasva n egymást követő bitet.

$$00010111 \longrightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \end{array}$$

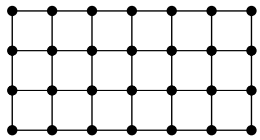
Segítség: Olvassuk el az irányított gráfokról szóló részt.
Megjegyzés: Az ilyen sorozatok száma $2^{2^{n-1}}$, melyre elemi bizonyítás nem ismert.

28. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:

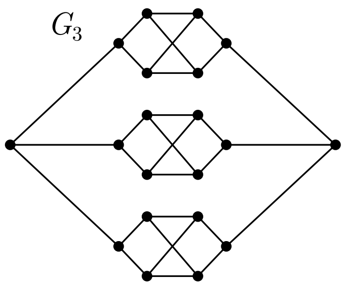
G_1

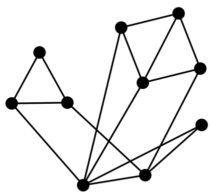


G_2



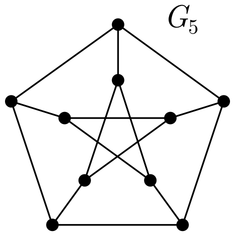
G_3





G_4

G_5



29. Az előző feladat G_2 gráfjának mintájára definiálhatjuk a négyzetrács-gráfokat (a G_2 a 4×7-es négyzetrács-gráf). Mely m,n-ekre van Hamilton-kör az $m\times n$-es négyzetrács-gráfban?

30. a) 12 ember vesz részt egy vacsorán. Mindenki legalább 6 embert ismer a társaságból. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy le tudnak úgy ülni egy kör alakú asztal mellé, hogy mindenki ismeri a két szomszédját.
b) Késve megérkezik András, aki legalább 7 embert ismer a jelenlévők közül. Igazoljuk, hogy Andrással együtt a 13 ember le tud ülni az előzőek szerint.
c) Akkor is tudnánk-e ezt, ha András csak 6 embert ismerne?

31. Van-e Hamilton-kör a H_n hiperkockagráfban (ld. előző feladatsor)?

32. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?

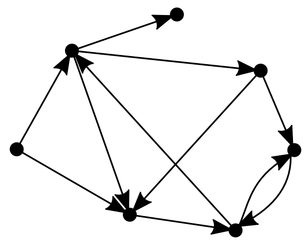
33. Egy $3\times3\times3$ méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan kocka következzen, amelyiknek az épp elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát. El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot út, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, aminek van közös lapja az elsővel?

34. A $KG(16,3)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[16]}{3}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $KG(16,3)$-ban van Hamilton-kör.

35. Igazoljuk, hogy ha egy $2n+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-utat. (Vezessük vissza a Dirac-tételre a feladatot.)

36. (Rédei tétele.) Igazoljuk, hogy K_n bármely irányításában van irányított Hamilton-út. Igaz-e, hogy mindig van Hamilton-kör is?

Néhány szó az irányított gráfokról (nem vizsgaanyag)



Az ábrán egy **irányított gráfot** látunk. Informálisan, az irányítatlan (=„hagyományos") gráfokból élek irányításával nyert matematikai objektumokat irányított gráfoknak nevezzük, ahol élek irányításán azt értjük, hogy minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A precíz definíció, a később ismertetett fogalmakkal együtt, megtalálható a fogalomtárban.) Irányított gráfokkal nem szimmetrikus kapcsolatokat is tudunk modellezni, például a fenti gráf kódolhatja azt, hogy egy héttagú családban ki kit ajándékozott meg tavaly karácsonykor.

Egy irányított gráfban egy csúcsnak kétféle fokszáma van: Egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló élek (nyílvég nélküli élvégek) száma, a csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó élek (nyílvégek) száma. Könnyű meggondolni, hogy minden irányított gráfban a kifokok összege megegyezik a befokok összegével, és mindkét összeg az élek számát adja.

Irányított gráfoknál a séta megfelelője az **irányított séta** (lásd fogalomtár), amely már figyelembe veszi az élek irányítását: egy élen mindig csak a nyíl irányába haladhatunk át (mintha „egyirányú utca" lenne). Az irányított vonal, út, Euler-vonal definíciója analóg módon történik.

Az **Euler-tétel** irányított gráfokra vonatkozó változata a következő: Egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráfban akkor és csak akkor van *zárt* irányított Euler-vonal, ha $\overrightarrow{G}$ összefüggő és $\overrightarrow{G}$-ben minden pont kifoka megegyezik a befokával. (Itt az összefüggőség úgy értendő, hogy ha elhagyjuk az élek irányítását, akkor a kapott irányítatlan gráf legyen összefüggő.) Az irányítatlan Euler-tétel bizonyításának megértése után ezt a tételt nem olyan nehéz belátni.