7. Gráfelméleti alapok

1.$^-$ Lehet-e egy (8 pontú) gráf fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$?

2.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám. (Az ismeretségek kölcsönösek.) [9.21]

3. a) Rajzoljunk le egy olyan (8 pontú) gráfot, amelynek fokszámsorozata: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
b) Van-e ilyen *egyszerű* gráf?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két főből álló társaságban található két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. [9.23]

5. A G egyszerű gráf fokszámsorozata: $1, 1, 1, 2, 2, 2, 5$. Hány éle van $\overline{G}$-nek, azaz G komplementerének?

6. Egy körmérkőzéses sakktornán 10 résztvevő van. 11 partit már lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan versenyző, aki már legalább 3 partit játszott.

7. Egy 10 férfiból és 10 nőből álló baráti társaságban minden férfi 5 emberrel fogott kezet az este folyamán. Hány férfi–nő kézfogás történt, ha tudjuk, hogy az összes férfi–férfi kézfogások száma 12? (Férfi–nő kézfogás: Egy férfi és egy nő fog kezet. Férfi–férfi kézfogás: Két férfi fog kezet.)

8. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb $6n$ ajándéktárgyat adtak át.

9. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze (a változás előjelét is figyelembe véve). [9.24]

10. Egy partin öt házaspár vett részt. A parti elején elején látszólag véletlenszerűen néhányan kézfogással üdvözölték egymást (senki nem fogott kezet a házastársával). Az egyik férj kíváncsi lett, és mindenkitől megtudakolta a kézfogásai számát (a feleségétől is). Meglepetten vette tudomásul, hogy kilenc különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet a felesége?

11. Egy pingpongbajnokságon mindenki egyszer játszott mindenkivel. Azt mondjuk, hogy az A játékos közvetett módon legyőzte a B játékost, ha van olyan A által megvert C játékos, aki B-t megverte. Igazoljuk, hogy van olyan játékos, aki minden más játékost legyőzött (közvetlenül vagy közvetett módon).

12. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az összekötő szakaszokat pirossal vagy kékkel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű szakasz indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük. Összesen hány háromszöget színezünk be? [Szakest, 2018]

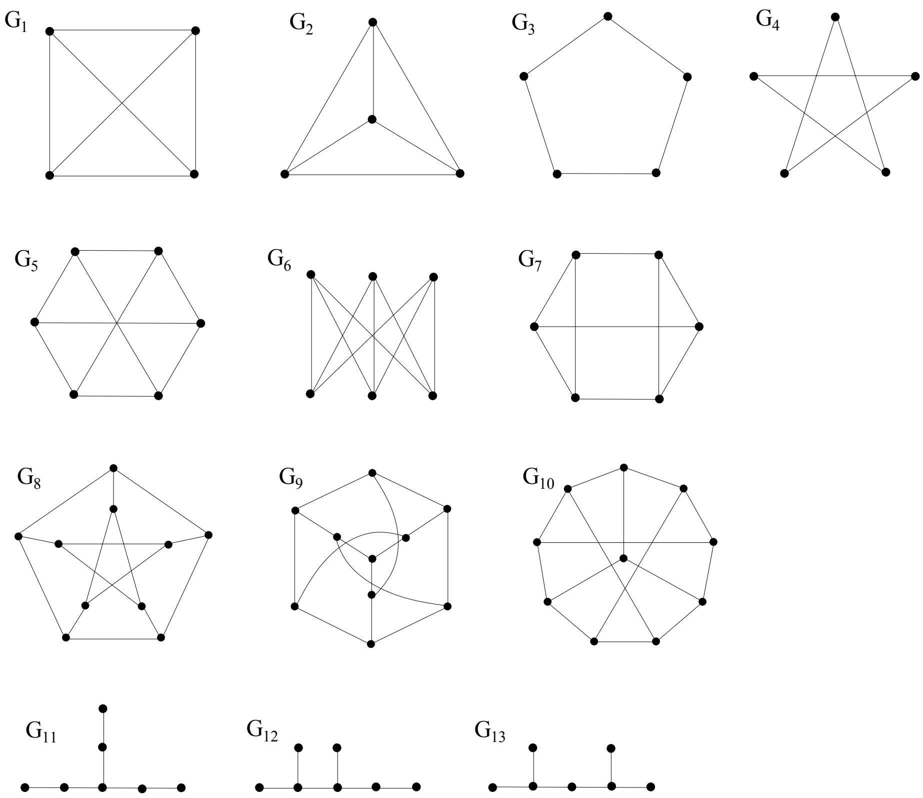
13.$^+$ Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával, és természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

14.$^+$ A 11.a osztály sakkozni szerető diákjai körmérkőzéses sakktornát rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely kettőhöz van legalább egy olyan, akit mindketten legyőztek a tornán. Legalább hányan szeretnek sakkozni a 11.a-ban? [OKTV 2015/2016, II. kat., 1. ford.]

15.$^+$ Az elmúlt évben a világranglistán nyilvántartott teniszezők átlagosan $d_{\text{átlag}}$ ellenféllel játszottak a ranglistáról ($d_{\text{átlag}} \in \mathbb{Q}$). Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük néhány úgy, hogy ha csak az ezeknek egymás ellen játszott mérkőzéseit nézzük, mindenki legalább $d_{\text{átlag}}/2$ másikkal játszott.

16.$^+$ Egy társaságot vegyes társaságnak nevezünk, ha sem olyan nincs benne, aki mindenkit ismer, sem olyan, aki senkit nem ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább öttagú társaság vegyes, akkor kiválaszthatók közülük négyen olyanok, akik egymás között vegyes társaságot alkotnak.

17. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak egymással?



18. Legyen $KG(5,2)$ az az egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza $\binom{[5]}{2}$, és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Rajzoljuk le a $KG(5,2)$ gráfot, és döntsük el, hogy az előző feladatban szereplő gráfok közül melyekkel izomorf.

Néhány definíció

- A G egyszerű gráf **komplementere** az a ($\overline{G}$-sal jelölt) egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és két csúcs pontosan akkor összekötött $\overline{G}$-ben, ha *nem* összekötöttek G-ben. Tehát $V(\overline{G}) := V(G)$ és $E(\overline{G}) := \binom{V}{2} \setminus E(G)$.
- A G és H egyszerű gráfok **izomorfak**, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Az izomorfizmus jelölése: $G \simeq H$.
(Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak esetleg máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban".)
- Általános gráfok izomorfiája ezek után értelemszerűen definiálható (az előző pont zárójeles részét formalizálva); ez az érdeklődő hallgatók számára egyszerű gyakorló feladat.