5. Logikai szita

1.$^-$ Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát 12-en, a fizikát 14-en, a kémiát pedig 13-an szeretik. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy a matematikát és a kémiát is szereti; hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan vannak, akik nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül? [7.1]

2.$^-$ Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az A, B, illetve C párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind A, mind B, 30% számára szimpatikus mind A, mind C, és 27% számára szimpatikus mind B, mind C. Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

3. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

4. Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex, n oldalú sokszög csúcsai közül hármat úgy, hogy semelyik kettő se legyen szomszédos? [7.9]

5. Hány olyan n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

6. Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

7. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

8. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

9. Hány *szürjektív* $[n] \to [k]$ leképezés van?

Segítség: A feladat így is megfogalmazható [miért?]: Hány olyan n hosszú sorozat készíthető az $1, 2, \ldots, k$ számokból, amely tartalmazza az összes számot 1-től k-ig legalább egyszer?

10. Jelölje $\left\{ {n \atop k} \right\}$ azt a számot, hogy egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet k darab (nemüres) halmazra partícionálni. (Például $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$, mert az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak 3 db 2 osztályból álló partícionálása van: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ és $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Megjegyzés: Az $\left\{ {n \atop k} \right\}$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük.

11. Legyen $\phi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \qquad [7.5]$$

12. (Elcserélt levelek problémája.) Valaki n levelet ír, és megcímezi a hozzájuk tartozó n borítékot, majd a leveleket véletlenszerűen a borítékokba teszi.

a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik levél sem a saját borítékjába kerül?
b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k levél kerül a saját borítékjába?

13. Egy gálavacsorán n házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

14. Hányféleképpen lehet egy n elemű halmazt k darab különböző, m elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

15.$^{+}$ Hány olyan $\pi : [n] \to [n]$ permutáció van, amelyre $\pi(i+1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden i-re $(1 \leq i \leq n-1)$?

16.$^{+}$ Hányféleképpen ülhet le n házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy a férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett? (A székek meg vannak számozva.)

17. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases} \qquad [7.13]$$

18. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0. \qquad [7.15]$$

19. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} = 0. \qquad [7.16]$$