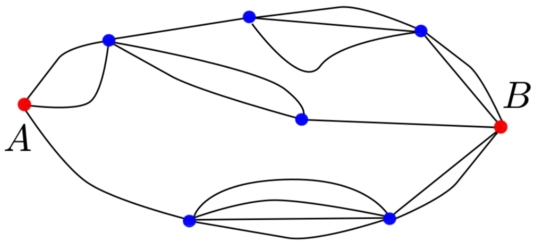
1. Kombinatorikus alapelvek, részhalmazok

1.$^-$ Hány legalább 6, de legfeljebb 9 karakterből álló jelszó készíthető a 26 betűs angol ábécé betűit felhasználva?

2.$^-$ Hány olyan egész szám van 100-tól 9.999-ig, amely páros számjeggyel kezdődik és végződik? Hol melyik kombinatorikus alapelvet használtuk a feladat megoldása során?

3.$^-$ Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

4. Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva A-ból B-be kell eljutnunk. Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba (tehát mindig „távolodunk” A-tól)?



5. Hányféleképpen lehet elhelyezni a fehér és fekete királyt az üres 8×8-as sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

6. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?

7. Hány olyan egész szám van 0-tól 999.999-ig, amely tartalmaz 3-as számjegyet?

8. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? [3.1]

9. n különböző csokit két (nemüres) csoportra osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?

10. Legyen U egy n elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $X \subseteq Y \subseteq U$. [TK. 3.1.3.]

11. Egy n elemű halmaz összes részhalmaza közül találomra kiválasztunk egyet, majd az összes részhalmaz közül megint kiválasztunk egyet (uniform módon, egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott részhalmaz közül egyik tartalmazza a másikat. [3.11]

12. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?

13. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben az elemek összege páratlan?

14.$^+$ A $\{2, 4, 6, \ldots, 16\}$ halmaz összes részhalmazára kiszámoljuk az elemek összegének utolsó számjegyét. Igazoljuk, hogy minden lehetséges végződés páros sokszor fordul elő!

15. Az alábbiak közül mely természetes számokból van több 1.000.000-ig:
(i) amelyek csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(ii) amelyek csak 3, 8 és 9 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
(iii) amelyek csak 3, 8 és 0 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer)?

16.

$$\sum_{R\subseteq[n]} |R| = ?$$

17. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.)

18.$^{+}$ Ha M egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük $S(M)$-mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy M elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például

$$S(\{1,2,5,6,9\}) = 9-6+5-2+1 = 7, \qquad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az $S(M)$ összegek összege, ha M befutja az $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ halmaz összes nemüres részhalmazát? [3.36]

19. Ki lehet-e úgy tölteni egy $n\times n$-es táblázatot az 1, 2 és 3 számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?

20. Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$. [1.25]

21. Igaz-e, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz?

22. Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 3 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy a klubok száma megegyezik az osztály tanulóinak számával.

23.$^{+}$ Egy matematikaversenyen 200 résztvevő vett részt, ahol 6 feladatot kellett megoldaniuk. Minden feladatra legalább 120 helyes megoldás érkezett. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan versenyző, hogy mindegyik problémát megoldotta legalább az egyikük. [IMC]

24. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tau(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor \approx \ln n,$$

ahol $\tau(j)$ a j szám osztóinak számát jelöli.

25.$^{+}$ Kombinatorikus érveléssel (kettős leszámlálással) hozzuk zárt alakra az alábbi összeget:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n.$$