

Binomiális együtthatók, multihalmazok

Kombinatorika

2. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2025. február 18.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Megjegyzés. Középiskolában egy n elemű halmaz k elemű részhalmazát az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációjának is nevezik. (Brrr.)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1 2 3 4 5

●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n -nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n -nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Jelölés. Ha H egy véges halmaz, k pedig egy természetes szám, akkor $\binom{H}{k}$ jelöli a H halmaz k -elemű részhalmazainak **halmazát**, azaz

$$\binom{H}{k} := \{R \subseteq H : |R| = k\}.$$

Például $\binom{[n]}{k}$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -elemű részhalmazainak halmaza.

Tehát $\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$.

A Pascal-háromszög:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & & \vdots & & & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & \vdots & & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & & & \vdots & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Bizonyítás. Világos, hogy egy n elemű halmaznak 1 db 0 elemű részhalmaza van (az üres halmaz), és 1 db n elemű részhalmaza van (saját maga).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} + \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
 & & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} + \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
 & & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Lásd következő dia.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \textcolor{red}{\binom{5}{0}} & \textcolor{green}{\binom{5}{1}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{2}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{3}} & \textcolor{green}{\binom{5}{4}} & \textcolor{red}{\binom{5}{5}} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 \textcolor{red}{1} & \textcolor{green}{5} & \textcolor{blue}{10} & \textcolor{blue}{10} & \textcolor{green}{5} & \textcolor{red}{1} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \textcolor{red}{\binom{5}{0}} & \textcolor{green}{\binom{5}{1}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{2}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{3}} & \textcolor{green}{\binom{5}{4}} & \textcolor{red}{\binom{5}{5}} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & 1 & & 1 & \\
 & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & 3 & & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & & 4 & 1 \\
 \textcolor{red}{1} & \textcolor{green}{5} & \textcolor{blue}{10} & & \textcolor{blue}{10} & \textcolor{green}{5} & \textcolor{red}{1} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

Bizonyítás. Egy n elemű halmaz $n - k$ elemű részhalmazai éppen a k elemű részhalmazok komplementerei. Precízebben fogalmazva, az $A \mapsto \overline{A}$ leképezés egy $\binom{[n]}{k} \rightarrow \binom{[n]}{n-k}$ bijekció, ahol $\overline{A} := [n] \setminus A$. (Miért?)

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\Sigma} 2^5$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\Sigma} 2^5$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Bizonyítás. Mindkét oldal $[n]$ részhalmazait számolja meg (ld. előző előadás).



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k -elemű részhalmazait számolja meg.

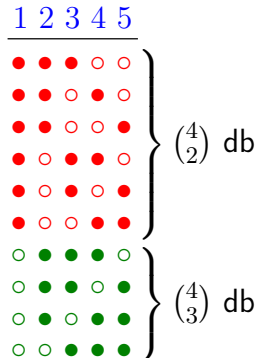
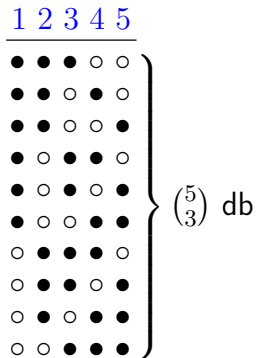
Bal oldal: Ez az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható definíciója. ✓

Jobb oldal: Az $\binom{n-1}{k}$ tag az $[n]$ halmaz azon k -elemű részhalmazait számolja meg, amelyek nem tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok éppen az $n-1$ elemű $\{2, 3, \dots, n\}$ halmaz k -elemű részhalmazai.)

Az $\binom{n-1}{k-1}$ tag az $[n]$ halmaz azon k -elemű részhalmazait számolja meg, amelyek tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok $\{1\} \dot{\cup} R$ alakúak, ahol R a $\{2, 3, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges $(k-1)$ -elemű részhalmaza lehet.) ✓ □

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k -elemű részhalmazait számolja meg.



Tétel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Tétel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Megjegyzés. Elég az első egyenlőséget bizonyítani, mert a második egyenlőségénél csupán a törtet bővítettük $(n-k)!$ -sal.

Tétel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

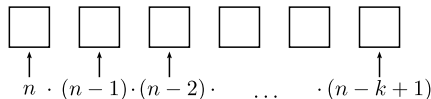
Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n -féle lehet. Bármilyen is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$ -féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k -adik) elemet $(n-k+1)$ -féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓



Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n -féle lehet. Bármilyen is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$ -féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k -adik) elemet $(n-k+1)$ -féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓



Ez a (középiskolában is gyakran használt) indoklás nem túl precíz. Gondolkojunk el azon, hogy hogyan kellene ezt precízen leírni, k szerinti indukcióval.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bal oldal: Most aszerint osztályozva számoljuk össze a sorozatokat, hogy mely betűk szerepelnek bennük.

Először kiválasztjuk a sorozatban szereplő k (különböző) betűt: Erre $\binom{n}{k}$ lehetőség van, mert $[n]$ egy k -elemű részhalmazát kell kijelölni.

Bárhogy is választottuk meg a sorozatba kerülő betűket, ezeket $k!$ -féle sorrendben lehet leírni (ld. középiskola / későbbi előadás, vagy ismételjük meg a jobb oldalnál alkalmazott gondolatot).

Ebből adódik a bal oldali válasz. ✓



A bizonyítás illusztrációja $n = 5$, $k = 3$ esetén:

részhalmazok

sorozatok

 $\{1, 2, 3\} \rightsquigarrow$ 123 132 213 231 312 321 $\{1, 2, 4\} \rightsquigarrow$ 124 142 214 241 412 421 $\{1, 2, 5\} \rightsquigarrow$ 125 152 215 251 512 521 $\{1, 3, 4\} \rightsquigarrow$ 134 143 314 341 413 431 $\{1, 3, 5\} \rightsquigarrow$ 135 153 315 351 513 531 $\{1, 4, 5\} \rightsquigarrow$ 145 154 415 451 514 541 $\{2, 3, 4\} \rightsquigarrow$ 234 243 324 342 423 432 $\{2, 3, 5\} \rightsquigarrow$ 235 253 325 352 523 532 $\{2, 4, 5\} \rightsquigarrow$ 245 254 425 452 524 542 $\{3, 4, 5\} \rightsquigarrow$ 345 354 435 453 534 543

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 = 1 \\ 1 < 2 > 1 \\ 1 < 3 = 3 > 1 \\ 1 < 4 < 6 > 4 > 1 \\ 1 < 5 < 10 = 10 > 5 > 1 \\ \vdots \end{array}$$

Megjegyzés. Páros n esetén a fenti egyenlőtlenség-láncban kétszer is szerepel az $\binom{n}{n/2}$ binomiális együttható (a két „középső” elem lesz az), hiszen ekkor $\lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil = n/2$.

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$$

Így

$$\binom{n}{k} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \binom{n}{k+1} \iff \binom{n}{k} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} \iff 1 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{n-k}{k+1} \iff k \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{n-1}{2},$$

ami a bizonyítandót adja. □

Állítás:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$$

Így

$$\binom{n}{k} \begin{matrix} < \\ \geq \\ > \end{matrix} \binom{n}{k+1} \iff \binom{n}{k} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} \iff 1 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{n-k}{k+1} \iff k \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{n-1}{2},$$

ami a bizonyítandót adja. □

Feladat. Adjunk a fenti állításra egy másik bizonyítást a Pascal-háromszög segítségével is (n szerinti indukcióval).

Feladat. $\binom{2n}{2k+1} \equiv 0$, $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$.

Feladat. $\binom{2n}{2k+1} \equiv 0$, $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$.

Következmény. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \leq k \leq n$ esetén (részletes bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n -et és k -t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

Ekkor

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3} \dots \binom{n_s}{k_s} \pmod{2}.$$

Feladat. $\binom{2n}{2k+1} \equiv 0$, $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$.

Következmény. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \leq k \leq n$ esetén (részletes bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n -et és k -t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

Ekkor

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3} \dots \binom{n_s}{k_s} \pmod{2}.$$

Megj. Mivel $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$ és $\binom{0}{1} = 0$, ez azt jelenti, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páros, ha van olyan $i \in [s]$ pozíció, amelyre $n_i = 0$ és $k_i = 1$:

$$\begin{array}{rcl} n_1 n_2 n_3 \dots n_s & = & \dots 0 \dots \\ k_1 k_2 k_3 \dots k_s & & \dots 1 \dots \end{array}$$

Feladat. $\binom{2n}{2k+1} \equiv 0$, $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}$, $\binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$.

Következmény. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható paritását a következőképpen határozhatjuk meg $0 \leq k \leq n$ esetén (részletes bizonyítás a honlapon):

Írjuk fel n -et és k -t is kettes számrendszerben, és egészítsük ki k kettes számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n kettes számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

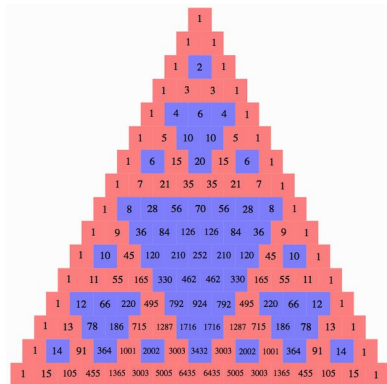
Ekkor

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3} \dots \binom{n_s}{k_s} \pmod{2}.$$

Példa. $\binom{105}{44}$ páros, mert

$$\binom{105}{44} = \binom{\overline{1101001}}{\overline{0101100}} \equiv \binom{1}{0} \binom{1}{1} \binom{0}{0} \binom{1}{1} \binom{0}{1} \binom{0}{0} \binom{1}{0} \equiv 0 \pmod{2}.$$

A paritások szemléltetése a Pascal-háromszögben:



Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y)(x + y)(x + y) \dots (x + y) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots yx + \dots + yyy \dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y . (Ez 2^n darab tag.)

Binomiális tétel.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y)(x + y)(x + y) \dots (x + y) \\ &= xxx \dots xx + xxx \dots xy + xxx \dots yx + \dots + yyy \dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y . (Ez 2^n darab tag.)

Minden ilyen $yx x \dots y x y$ tag „hatvány alakban” felírva $x^{n-k} y^k$ alakú lesz, ahol k az y -ok száma ($k \in \{0, \dots, n\}$). Egy rögzített k -ra tehát annyi tagból fog $x^{n-k} y^k$ adódni, ahány olyan n -tényezős szorzat („szó”) van, amelynek pontosan k db tényezője („betűje”) y , és $n - k$ db tényezője („betűje”) x . Ez a szám pedig $\binom{n}{k}$, mert ennyiféleképpen tudjuk kijelölni az y -ok helyét az n helyből. Ezért az összevonható tagok összevonása után a tétel jobb oldala adódik. $\square$

Feladat*. A Bolyai Lottón az $1, 2, \dots, 2025$ számok közül húznak ki 50-et. Mi a valószínűbb: hogy a kihúzott számok összege páros, vagy az, hogy páratlan?

Feladat*. A Bolyai Lottón az $1, 2, \dots, 2025$ számok közül húznak ki 50-et. Mi a valószínűbb: hogy a kihúzott számok összege páros, vagy az, hogy páratlan?

Megoldás. Jelölje $\binom{2025}{50}_{\text{ps}}$ ill. $\binom{2025}{50}_{\text{ptlan}}$ a $[2025]$ halmaz azon 50-elemű részhalmazainak számát, amelyekben az elemek összege rendre páros ill. páratlan.

Tekintsük a

$$p(x) = \prod_{i=1}^{2025} (1 + (-1)^i x) = (1 - x)(1 + x)(1 - x)(1 + x) \dots (1 - x)$$

polinomot. Ebben az x^{50} együtthatója éppen $\binom{2025}{50}_{\text{ps}} - \binom{2025}{50}_{\text{ptlan}}$. (Miért?)

Feladat*. A Bolyai Lottón az $1, 2, \dots, 2025$ számok közül húznak ki 50-et. Mi a valószínűbb: hogy a kihúzott számok összege páros, vagy az, hogy páratlan?

Megoldás. Jelölje $\binom{2025}{50}_{\text{ps}}$ ill. $\binom{2025}{50}_{\text{ptlan}}$ a $[2025]$ halmaz azon 50-elemű részhalmazainak számát, amelyekben az elemek összege rendre páros ill. páratlan.

Tekintsük a

$$p(x) = \prod_{i=1}^{2025} (1 + (-1)^i x) = (1-x)(1+x)(1-x)(1+x) \dots (1-x)$$

polinomot. Ebben az x^{50} együtthatója éppen $\binom{2025}{50}_{\text{ps}} - \binom{2025}{50}_{\text{ptlan}}$. (Miért?)

De ezt az együtthatót ki tudjuk számolni, mivel

$$p(x) = (1-x^2)^{1012} (1-x) = \left(\sum_{k=0}^{1012} \binom{1012}{k} (-1)^k x^{2k} \right) (1-x),$$

amiből az x^{50} együtthatója $-\binom{1012}{25} < 0$, tehát **a páratlan összeg a valószínűbb.**

Feladat. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon 5 alma, 2 körte, 3 banán és 6 narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

Feladat. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon 5 alma, 2 körte, 3 banán és 6 narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

Megoldás. A gyümölcskosár lehetséges tartalma:

alma, körte, banán, narancs.

Feladat. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon 5 alma, 2 körte, 3 banán és 6 narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

Megoldás. A gyümölcskosár lehetséges tartalma:

$\boxed{0-5}$ alma, $\boxed{0-2}$ körte, $\boxed{0-3}$ banán, $\boxed{0-6}$ narancs.

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

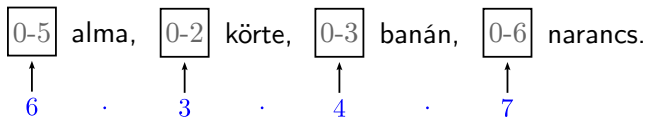
6 3 4 7

Ez összesen $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$ lehetőség.



Feladat. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon 5 alma, 2 körte, 3 banán és 6 narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

Megoldás. A gyümölcskosár lehetséges tartalma:



Ez összesen $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$ lehetőség.



Megjegyzés. Az otthon lévő gyümölcsök multihalmazának részmultihalmazait kellett összeszámolni a feladatban. Ezeket a matematikai fogalmakat tárgyaljuk a következőkben.

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális def. A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Megjegyzés. Technikai okokból a 0 multiplicitást is megengedjük, így a H halmaz nem egyértelmű. Például a fenti M multihalmaz alaphalmazába belevehetjük Budapestet is, azzal, hogy az M -beli multiplicitása 0.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Pecíz def. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Most következik még néhány definíció, de ezeket nem memorizálni kell, hanem látni, hogy csupán a szemléletes multihalmaz képünk fogalmait ültetjük át a precíz környezetbe.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti **multihalmazon** egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Definíciók/elnevezések. Legyen $M: H \rightarrow \mathbb{N}$ egy H feletti multihalmaz.

- Egy $h \in H$ elemre az $M(h)$ függvényérték a h elem M -beli **multiplicitása**.
- Akkor mondjuk, hogy a $h \in H$ elem **elemé M -nek**, ha $M(h) > 0$.
- Az M multihalmaz $|M|$ -mel jelölt **elemszáma** az alaphalmaz-elemek M -beli multiplicitásainak összege:

$$|M| := \sum_{h \in H} M(h).$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ multihalmaz egy részmultihalmaz az $N = \{1, 1, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ multihalmaz.

$$M: \quad 1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

$$N: \quad 1 \mapsto 2, \quad \text{Szeged} \mapsto 0, \quad \sqrt{3} \mapsto 1, \quad \text{Mars} \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Ez az n elemű halmaz részhalmái számának általánosítása. (Miért?)

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „ N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.”)

Tétel. A $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Bizonyítás. Egy N részmultihalmazban a h_i elem $N(h_i)$ multiplicitása 0-tól $M(h_i)$ -ig bármi lehet, ami $M(h_i) + 1$ lehetőség, mindegyik $i \in [n]$ -re. További megkötés nincs, így a szorzási alapelv adja a bizonyítandót. $\square$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H -ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ahol az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	Mars	Vuk
↓	↓	↓	↓	↓
3	2	3	1	2

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	Mars	Vuk
↓	↓	↓	↓	↓
3	2	3	2	1

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	Mars	Vuk
↓	↓	↓	↓	↓
0	5	0	2	4

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz felett tekintsünk néhány **11** elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

1	Szeged	$\sqrt{3}$	Mars	Vuk
↓	↓	↓	↓	↓
?	?	?	?	?

A lényeg az, hogy annyi 11 elemű multihalmaz van a megadott 5 elemű alaphalmaz felett, ahányféleképpen fel tudunk írni egy 5 természetes számból álló sorozatot úgy, hogy a számok összege 11 legyen.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

1	Szeged	$\sqrt{3}$	Mars	Vuk
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

Általánosan, a következő lemmát kell igazolnunk a fenti tétel bizonyításához:

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

egyenletnek $\left(\binom{n}{k} \right) = \binom{n+k-1}{k}$ darab megoldása van a természetes számok(ból álló szám- n -esek) halmazán.

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

Például ($n = 5, k = 11$ esetén),

$$(3, 2, 3, 1, 2) \mapsto \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet, \bullet, \bullet \bullet$$

$$(3, 2, 3, 2, 1) \mapsto \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet, \bullet \bullet, \bullet$$

$$(0, 5, 0, 2, 4) \mapsto , \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet , , \bullet \bullet, \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$\vdots$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám- n -eseket, amelyekre az elemek összege k , ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k \right\} \right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám- n -eseket, amelyekre az elemek összege k , ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Az ilyen jelsorozatok száma pedig $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen ennyiféleképpen lehet $n-1$ vesszőt és k pöttyöt leírni valamilyen sorrendben: Ennyiféleképpen tudjuk kijelölni a k pötty helyét az $n+k-1$ karakterből álló jelsorozatban. $\square$