Páros gráfok, kromatikus szám

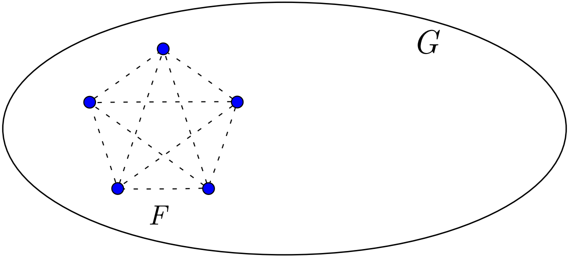
Kombinatorika

10. előadás

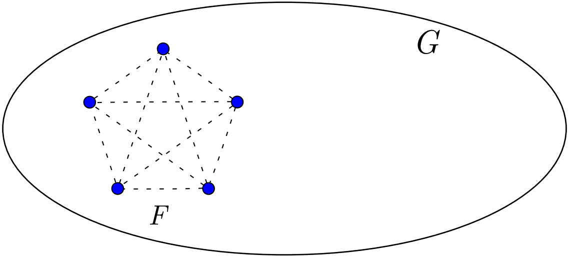
SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. április 18.

Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz független ponthalmaz, ha F semelyik két pontja között nem halad él G-ben (és hurokél sem illeszkedik F-beli pontra).



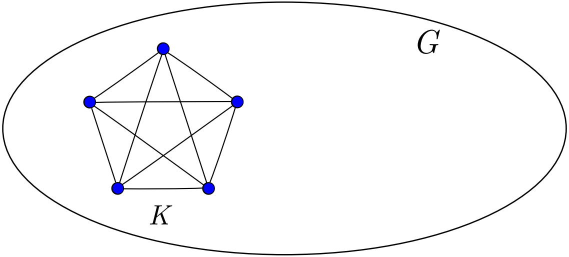
Definíció. A G gráfban az $F \subseteq V(G)$ ponthalmaz független ponthalmaz, ha F semelyik két pontja között nem halad él G-ben (és hurokél sem illeszkedik F-beli pontra).



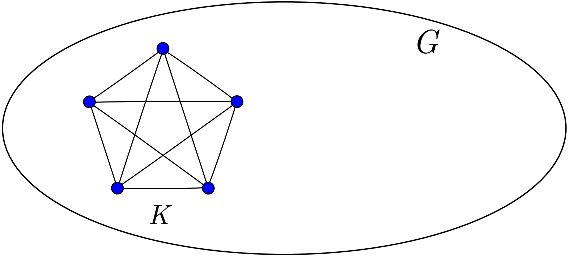
Definíció. A G gráfban található legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$-vel jelöljük:

$$\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz klikk, ha K bármely két pontja között halad él G-ben.



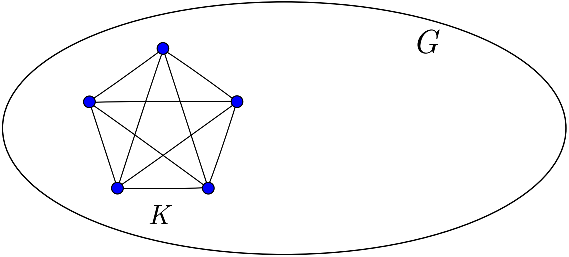
Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz klikk, ha K bármely két pontja között halad él G-ben.



Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$-vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. A G gráfban a $K \subseteq V(G)$ ponthalmaz klikk, ha K bármely két pontja között halad él G-ben.

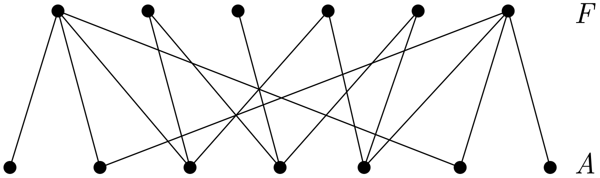


Definíció. A G gráfban található legnagyobb klikk pontszámát $\omega(G)$-vel jelöljük:

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

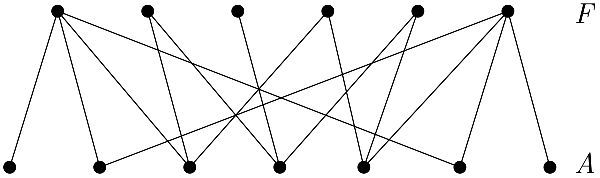
Megjegyzés. Sem az $\alpha(G)$, sem az $\omega(G)$ paraméter kiszámítására nem ismert „gyors” algoritmus (és a sejtés szerint nincs is).

Páros gráfok.



Egy gráf páros, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Páros gráfok.

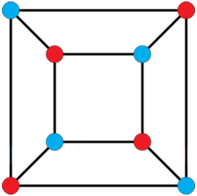


Egy gráf páros, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz minden él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

Észrevétel. Ha G egy tetszőleges páros gráf A és F osztályokkal, akkor az A-beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az F-beli csúcsok fokszámainak összegével. És mindkét fokszámösszeg a gráf éleinek számával egyenlő.

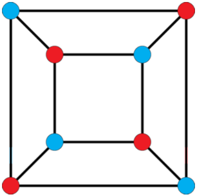
Emlékeztető. Egy gráf páros, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)



Emlékeztető. Egy gráf páros, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad.

Példa. A 3-dimenziós kockagráf páros gráf. A csúcsok egy jó osztályozása látható az ábrán: A piros csúcsok alkotják az egyik osztályt, a kékek a másikat. (Azt kell ellenőrizni, hogy minden él két végpontja különböző színű.)



T. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

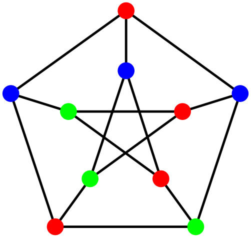
Bizonyítás. Lásd gyakorlat. (Nem fért bele.) $\square$

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \to \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$-beli színnel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \to \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$-beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf jó színezésén a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.



A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \to \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta”. (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$-beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf jó színezésén a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

A G gráf (csúcs)színezésén egy $V(G) \to \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy véges halmaz, a „paletta". (Informálisan, minden csúcsot kiszínezünk egy $\mathcal{P}$-beli színnel.)

Most általánosítjuk az előző dián látott színezés-tulajdonságot több színre:

Definíció. A G gráf jó színezésén a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyben G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Megj. Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk a továbbiakban! (Hurokél léte esetén nincs jó színezése a gráfnak, a párhuzamos élek pedig jó színezés szempontjából helyettesíthetők egyszeres élekkel.)

Megj. Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre. Fontos optimalizálási probléma a felhasznált színek számának minimalizálása.

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$-vel jelölt kromatikus száma az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G.

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$-vel jelölt kromatikus száma az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G.

Tehát „$\chi(G) = k$" KÉT dolgot jelent: G-nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G!

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$-vel jelölt kromatikus száma az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G.

Tehát „$\chi(G) = k$" KÉT dolgot jelent: G-nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G!

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k-színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k-színezhető $\iff$ $\chi(G) \leq k$.

Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$-vel jelölt kromatikus száma az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával jól színezhető G.

Tehát „$\chi(G) = k$" KÉT dolgot jelent: G-nek létezik jó színezése k színnel, ÉS kevesebb színnel nem színezhető jól G!

Konvenció. A k színnel jól színezhető gráfokat röviden k-színezhető gráfoknak nevezzünk. Másszóval: A G gráf k-színezhető $\iff \chi(G) \leq k$.

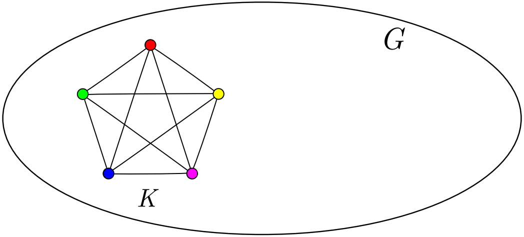
Megjegyzés. A páros gráfok pontosan a 2-színezhető gráfok. (Ez egy ekvivalens definíció.)

Megjegyzés. A kromatikus szám meghatározására nem ismert „hatékony" algoritmus, és a sejtés szerint nincs is. (Sőt, már annak eldöntésére sem, egy gráf 3-színezhető-e.)

Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

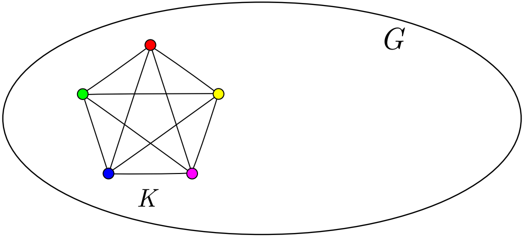
Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G-ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. $\square$



Állítás. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy legnagyobb, azaz $\omega(G)$ pontú K klikket G-ben. Világos, hogy G jó színezésekor K pontjait mind különböző színűre kell színezni. Tehát legalább $|K| = \omega(G)$ szín szükséges G jó színezéséhez. □

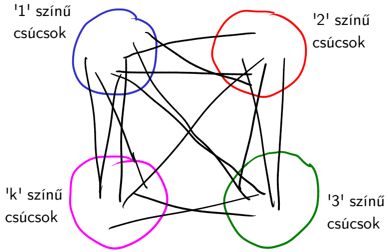


Megjegyzés. $\chi(G) > \omega(G)$ előfordulhat. Sőt, bármilyen nagy $l \geq 2$ számhoz létezik olyan G gráf, amelynek a kromatikus száma l, de G-ben nincs háromszög, azaz $\omega(G) = 2$. (Ilyen G konstruálása elolvasható a honlapon.)

Állítás. $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő partícionálása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)



Állítás. $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G jó színezése nem más, mint független ponthalmazokra történő partícionálása a csúcshalmaznak, hiszen az egyszínű csúcsok között nem halad(hat)nak élek. (Vö. páros gráfok osztályozásos és színezéses definícióinak ekvivalenciája.)

Színezzük G-t optimálisan, azaz $\chi(G)$ színnel. Ezzel G csúcshalmazát $\chi(G)$ darab független ponthalmazra osztályoztuk, és mindegyik osztály legfeljebb $\alpha(G)$ méretű (hiszen $\alpha(G)$ a legnagyobb „független ponthalmaz"-méret).

Az osztályméretekre vonatkozó felső becsléseket összeadva kapjuk, hogy

$$|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G),$$

ami rendezés után épp a bizonyítandó. $\square$

Mohó algoritmus. A mohó algoritmus és az alábbi bizonyítás részletei a honlapon és a CooSpace-re feltöltött YouTube-videón láthatók.

Mohó algoritmus. A mohó algoritmus és az alábbi bizonyítás részletei a honlapon és a CooSpace-re feltöltött YouTube-videón láthatók.

Jelölés. A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$-vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$

Mohó algoritmus. A mohó algoritmus és az alábbi bizonyítás részletei a honlapon és a CooSpace-re feltöltött YouTube-videón láthatók.

Jelölés. A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$-vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bizonyítás (vázlat). Színezzük jól mohó módon a csúcsokat. Könnyű látni, hogy ekkor legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színt használtunk. $\square$

Mohó algoritmus. A mohó algoritmus és az alábbi bizonyítás részletei a honlapon és a CooSpace-re feltöltött YouTube-videón láthatók.

Jelölés. A G gráfban előforduló legnagyobb (csúcs)fokszámot $\Delta(G)$-vel jelöljük.

Tétel. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bizonyítás (vázlat). Színezzük jól mohó módon a csúcsokat. Könnyű látni, hogy ekkor legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színt használtunk. $\square$

Brooks-tétel. Ha G egy olyan összefüggő gráf, amely nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Nem bizonyítjuk.