Rekurziók

(Fibonacci-számok és Catalan-számok)

Kombinatorika

5. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. március 7.

Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot. („Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.”)

Példák ilyen feltételekre:

$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{99}^2$.
$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13$.
$a_7 = 100$.
$a_n =$ „az n-edik tizedesjegye $\sin a_{n-1}$-nek” (ha $n \geq 1$).

Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés" ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot. („Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.")

Példák ilyen feltételekre:

$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{99}^2$.
$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13$.
$a_7 = 100$.
$a_n =$ „az n-edik tizedesjegye $\sin a_{n-1}$-nek" (ha $n \geq 1$).

(Egy ilyen feltételrendszert rekurziónak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket".

Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés'' ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot. („Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.'')

(Egy ilyen feltételrendszert rekurziónak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket''.

Például legyen a feltételrendszer a következő:
$a_0 = 1;$
$a_n = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$, ha $n \geq 1$.

Világos, hogy ezt egyetlen sorozat elégíti ki: $1, 1, 2, 6, 42, 1806, \ldots$

Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$-re adott egy

$$a_n = \mathsf{KIF}_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés'' ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot. („Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.'')

(Egy ilyen feltételrendszert rekurziónak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket''.

Az így kapott $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot a fenti rekurzióval definiált sorozatnak szokás nevezni.

Definíció. Az

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$$

rekurzióval definiált $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük, az F_n számot pedig az n-edik Fibonacci-számnak.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Definíció. Az

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$$

rekurzióval definiált $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük, az F_n számot pedig az n-edik Fibonacci-számnak.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Megjegyzés. Az

$$\begin{cases} \widetilde{F}_0 = 0 \\ \widetilde{F}_1 = 1 \\ \widetilde{F}_n = \widetilde{F}_{n-1} + \widetilde{F}_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$$

definíció is gyakori: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ De e két definíció között csupán indexelésbeli különbség van (a két sorozat egymás eltoltja): $F_n = \widetilde{F}_{n+1}$.

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$C_0 = 1$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0C_0 = 1$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0C_0 = 1$
$C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0 C_0 = 1$
$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$
$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$C_0 = 1$
$C_1 = C_0 C_0 = 1$
$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$
$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$
$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 \\
C_1 &= C_0C_0 = 1 \\
C_2 &= C_0C_1 + C_1C_0 = 2 \\
C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 5 \\
C_4 &= C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 14 \\
C_5 &= C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 42 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definíció. A

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit Catalan-számoknak nevezzük.

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

Megjegyzés. Az érdemi rekurzív feltétel

$$C_n = \sum_{i+j=n-1} C_i C_j$$

alakban is írható.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

1. példa: Ha s_n jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az 'n' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű" változatát kell megoldani: hogy az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

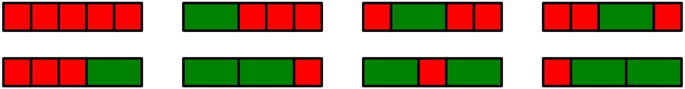
Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű" (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

1. példa: Ha s_n jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az 'n' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű" változatát kell megoldani: hogy az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

Megjegyzés. Több paraméter esetén az ilyen visszavezetések többparaméteres rekurziókhoz vezetnek (nem nehéz kitalálni, h. ez mit jelent, csak azt kell tisztázni, hogy mit értünk korábbi elemeken): Lásd pl. rekurzió az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatókra.

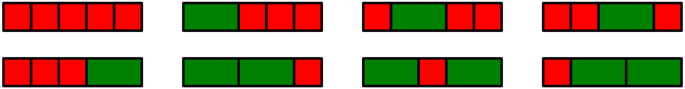
2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:

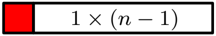


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

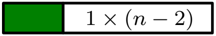
Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1-es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-1)$-es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2-es dominót teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-2)$-es téglalapot kell leparkettázni:

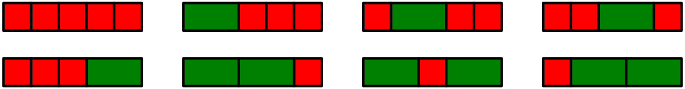


vagy

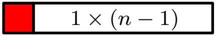


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

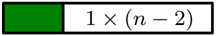
Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1-es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-1)$-es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2-es dominót teszünk, akkor utána még egy $1\times(n-2)$-es téglalapot kell leparkettázni:



vagy



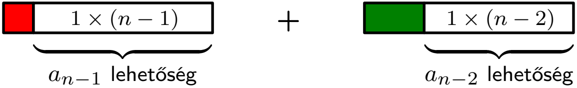
Tehát ha tudjuk, hogy az $1\times(n-1)$-es és $1\times(n-2)$-es téglalapokat hányféleképpen lehet leparkettázni, akkor egyszerű megválaszolni a kérdést az $1\times n$-es téglalapra is.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{(ha } n \geq 2\text{)},$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:



2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:

$$\underbrace{\boxed{1\times(n-1)}}_{a_{n-1}\text{ lehetőség}} \quad + \quad \underbrace{\boxed{1\times(n-2)}}_{a_{n-2}\text{ lehetőség}}$$

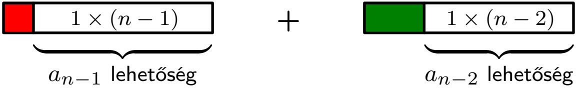
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is).

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1{\times}n$-es téglalapot $1{\times}1$-es négyzetekkel és $1{\times}2$-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{(ha } n \geq 2\text{)},$$

mert a_{n-1} az $1{\times}n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek $1{\times}1$-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek $1{\times}2$-es parkettával kezdődnek:



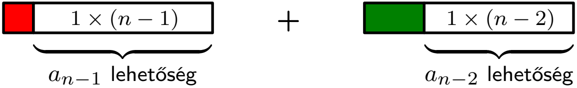
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is). a_0 jelentése nem teljesen világos. De ahhoz, hogy a_2 értékét helyesen adja meg a fenti gondolatmenet ($a_2 = 2$), az a_0-t 1-nek KELL tekinteni.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1\times n$-es téglalapot 1×1-es négyzetekkel és 1×2-es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{(ha } n \geq 2\text{)},$$

mert a_{n-1} az $1\times n$-es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1-es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2-es parkettával kezdődnek:



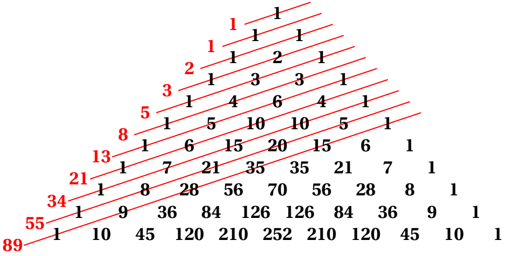
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és a kezdőfeltételeknek is). Tehát F_n-féleképpen lehet leparkettázni az $1\times n$-es téglalapot, ahol F_n az n-edik Fibonacci-szám. $\square$

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

Egy szép alkalmazás.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}=F_n.$$



Kép forrása: Wikipedia

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1\times n$-es téglalap 1×1-es és 1×2-es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

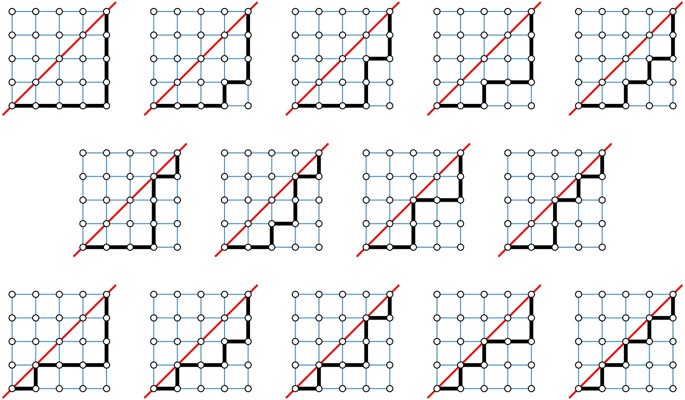
Egy szép alkalmazás.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $1\times n$-es téglalap (tételbeli) parkettázásait számolja meg. A bal oldal az 1×2-es parketták száma szerint osztályoz: $\binom{n-k}{k}$ azon parkettázások száma, amelyekben k darab 1×2-es parketta van (és $n-2k$ darab 1×1-es). $\square$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Például $n = 4$ esetén 14 ilyen út van:



3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0, 0)$ pontból az (n, n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. A válasz a C_n Calatan-szám lesz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha választ $\widetilde{C}_n$ jelöli, akkor a $(\widetilde{C}_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti a Catalan-számok rekurzióját:

$$\widetilde{C}_0 = 1; \qquad \widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_k \widetilde{C}_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. A válasz a C_n Calatan-szám lesz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha választ $\widetilde{C}_n$ jelöli, akkor a $(\widetilde{C}_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti a Catalan-számok rekurzióját:

$$\widetilde{C}_0 = 1; \qquad \widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_k \widetilde{C}_{n-1-k}, \ \text{ha } n \geq 1.$$

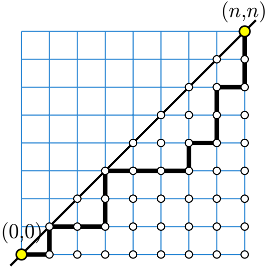
A $\widetilde{C}_0 = 1$ nyilvánvaló, mert $n = 0$ esetén a kezdőpont megegyezik a végcéllal, így egyetlen „eljutási lehetőség” van: ha nem lépünk egyet sem. ✓

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. A válasz a C_n Calatan-szám lesz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha választ $\widetilde{C}_n$ jelöli, akkor a $(\widetilde{C}_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti a Catalan-számok rekurzióját:

$$\widetilde{C}_0 = 1; \qquad \widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_k \widetilde{C}_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$.

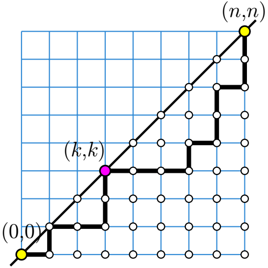


3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. A válasz a C_n Calatan-szám lesz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha választ $\widetilde{C}_n$ jelöli, akkor a $(\widetilde{C}_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti a Catalan-számok rekurzióját:

$$\widetilde{C}_0 = 1; \qquad \widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_k \widetilde{C}_{n-1-k}, \text{ ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$.



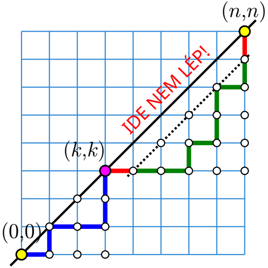
$\widetilde{C}_k \widetilde{C}_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek utoljára az átlóra a végpont előtt $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$:

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egységhosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y=x$ egyenes fölé?

Megoldás. A válasz a C_n Calatan-szám lesz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha választ $\widetilde{C}_n$ jelöli, akkor a $(\widetilde{C}_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti a Catalan-számok rekurzióját:

$$\widetilde{C}_0=1; \qquad \widetilde{C}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{C}_k\widetilde{C}_{n-1-k}, \text{ ha } n\geq 1.$$

Legyen $n\geq 1$.



$\widetilde{C}_k\widetilde{C}_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek utoljára az átlóra a végpont előtt $(k=0,1,\ldots,n-1)$:

A $(0,0)\rightsquigarrow(k,k)$ szakaszra $\widetilde{C}_k$ lehetőség van;

az ábrán pirossal jelölt két lépés fix;

a $(k+1,k)\rightsquigarrow(n,n-1)$ szakaszra $\widetilde{C}_{n-1-k}$ leh. van.

$\square$

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

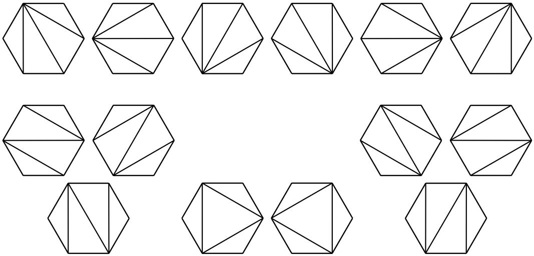
Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\to$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

$n = 4$
$C_4 = 14$



Kép: Wikipedia

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

2. Egy $(n+1)$-tényezős szorzatot C_n-féleképpen lehet zárójelezni.

Például $n = 3$ esetén az $abcd$ szorzatnak $C_3 = 5$ zárójelezése van:

$$((ab)c)d, \;\; (a(bc))d, \;\; (ab)(cd), \;\; a((bc)d), \;\; a(b(cd)).$$

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

2. Egy $(n+1)$-tényezős szorzatot C_n-féleképpen lehet zárójelezni.

3.* Az $\{1, \dots, n\}$ halmaznak C_n darab olyan sorbaállítása van, amelyben nincs 3 hosszú monoton növekvő részsorozat.

Például $n = 4$ esetén $C_4 = 14$ ilyen sorbaállítás van:

$$1432, 2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241,$$
$$3412, 3421, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.$$

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy konvex $(n+2)$-szöget C_n-féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

2. Egy $(n+1)$-tényezős szorzatot C_n-féleképpen lehet zárójelezni.

3.* Az $\{1, \ldots, n\}$ halmaznak C_n darab olyan sorbaállítása van, amelyben nincs 3 hosszú monoton növekvő részsorozat.

Tétel. (A Catalan-számok zárt alakja.)

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Definíció. d-edrendű lineáris rekurzión egy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \qquad (*)$$

alakú rekurziót értünk, ahol $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ rögzített számok, és $c_d \neq 0$.

Definíció. d-edrendű lineáris rekurzión egy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \qquad (*)$$

alakú rekurziót értünk, ahol $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ rögzített számok, és $c_d \neq 0$.

Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy tetszőleges $r_0, \ldots, r_{d-1} \in \mathbb{C}$ számokra („kezdőértékekre''), az $a_0 = r_0$, $a_1 = r_1$, ... , $a_{d-1} = r_{d-1}$ kezdőfeltételekkel együtt pontosan egy megoldása van $(*)$-nak, vagyis a

$$\begin{cases} a_0 = r_0 \\ a_1 = r_1 \\ \quad\vdots \\ a_{d-1} = r_{d-1} \\ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \end{cases}$$

rekurziónak.

Definíció. d-edrendű lineáris rekurzión egy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \qquad (*)$$

alakú rekurziót értünk, ahol $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ rögzített számok, és $c_d \neq 0$.

1. példa (egy harmadrendű lineáris rekurzió).

$$\begin{cases} a_0 = 17 \\ a_1 = 14 \\ a_2 = 110 \\ a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}, \quad \text{ha } n \geq 3. \end{cases}$$

Definíció. d-edrendű lineáris rekurzión egy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \qquad (*)$$

alakú rekurziót értünk, ahol $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ rögzített számok, és $c_d \neq 0$.

2. példa. Fibonacci-sorozat. (Másodrendű lineáris rekurzióval van definiálva.)

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \text{ha } n \geq 2. \end{cases}$$

Definíció. d-edrendű lineáris rekurzión egy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d}, \quad \text{ha } n \geq d \qquad (*)$$

alakú rekurziót értünk, ahol $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ rögzített számok, és $c_d \neq 0$.

2. példa. Fibonacci-sorozat. (Másodrendű lineáris rekurzióval van definiálva.)

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \text{ha } n \geq 2. \end{cases}$$

A Fibonacci-számok zárt alakja.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

2. példa. Fibonacci-sorozat. (Másodrendű lineáris rekurzióval van definiálva.)

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \text{ha } n \geq 2. \end{cases}$$

A Fibonacci-számok zárt alakja.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Megjegyzés.

$$\widetilde{F}_n = F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

Köszönöm a figyelmet!