Párosítások

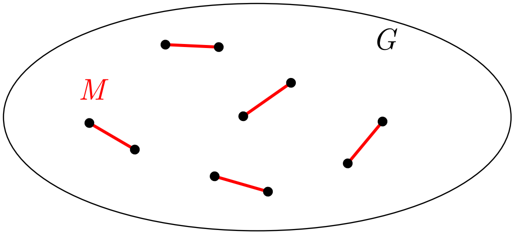
Kombinatorika

11. előadás

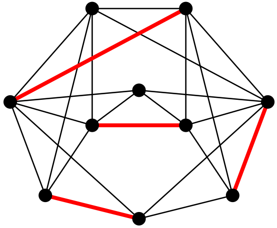
SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. április 25.

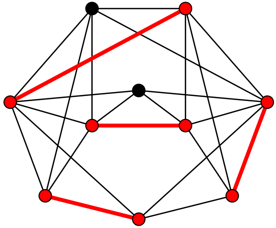
A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt párosításnak nevezünk, ha semelyik két különböző M-beli élnek nincs közös végpontja, és M-ben nincs hurokél.



A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt párosításnak nevezünk, ha semelyik két különböző M-beli élnek nincs közös végpontja, és M-ben nincs hurokél.

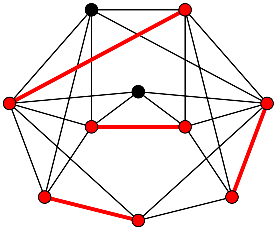


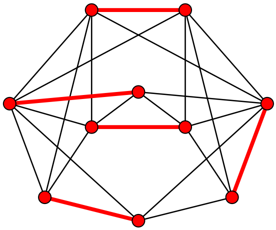
A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt párosításnak nevezünk, ha semelyik két különböző M-beli élnek nincs közös végpontja, és M-ben nincs hurokél.



Egy M párosítás esetén M-beli élek végpontjait az M által párosított pontoknak nevezzük. (Számuk $2|M|$.)

A G gráfban egy $M \subseteq E(G)$ élhalmazt párosításnak nevezünk, ha semelyik két különböző M-beli élnek nincs közös végpontja, és M-ben nincs hurokél.





Egy M párosítás esetén M-beli élek végpontjait az M által párosított pontoknak nevezzük. (Számuk $2|M|$.)

A G gráf egy párosítása teljes, ha G összes pontját párosítja. (A bal oldali ábrán látható párosítás nem teljes, a jobb oldali ábrán látható párosítás teljes.)

Egy gráfban csak akkor LEHET teljes párosítás, ha a gráf csúcsszáma páros.

Def. $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\}$,

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G-beli párosítás élszáma.

Def. $$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\},$$

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G-beli párosítás élszáma.

Megjegyzés.
$$\nu(G) \leq \frac{|V(G)|}{2},$$
hiszen minden M párosításra a párosított pontok száma $2|M| \leq |V(G)|$. Továbbá $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha G-ben van teljes párosítás.

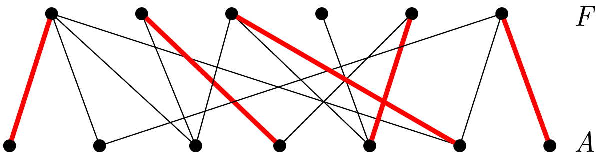
Def. $$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ egy párosítás } G\text{-ben}\},$$

ahol $|M|$ a párosítás élszámát jelöli. Vagyis $\nu(G)$ a legnagyobb méretű G-beli párosítás élszáma.

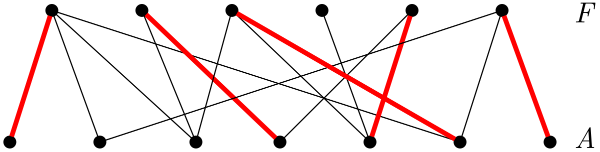
Megjegyzés.
$$\nu(G) \leq \frac{|V(G)|}{2},$$
hiszen minden M párosításra a párosított pontok száma $2|M| \leq |V(G)|$. Továbbá $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha G-ben van teljes párosítás.

Megjegyzés. A $\nu(G)$ paraméter hatékonyan (polinomidőben) számolható számítógéppel. Erről bővebben MSc-n tanulunk majd. A páros gráfokra Kőnig Dénes és Egerváry Jenő magyar matematikusok dolgozták ki az algoritmust, melynek tiszteletére „magyar módszernek'' nevezik az eljárást.

Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



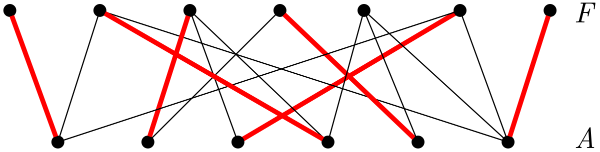
Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A-ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

Mivel az A és F színosztályok szerepe felcserélhető, itt és továbbiakban A helyére mindenhol lehet F-et is írni.

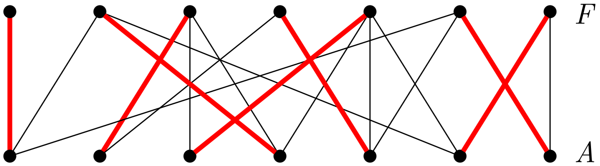
Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A-ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

A $\nu(G) = |A|$ azzal ekvivalens, hogy van olyan párosítás a G páros gráfban, amely A minden pontját párosítja. (Az ilyen párosításokat A-t lefedő párosításoknak nevezzük.)

Páros gráfokban egy párosítás minden éle egy alsó és egy felső pontot párosít:



Ebből az következik, hogy minden párosításban legfeljebb annyi él lehet, mint ahány pont van A-ban. Vagyis páros gráf esetén $\nu(G) \leq |A|$.

A $\nu(G) = |A|$ azzal ekvivalens, hogy van olyan párosítás a G páros gráfban, amely A minden pontját párosítja. (Az ilyen párosításokat A-t lefedő párosításoknak nevezzük.)

Végül nézzünk egy teljes párosítást egy páros gráfban (ld. fenti ábra). Mivel minden párosítás ugyanannyi pontot párosít A-ban és F-ben, ezért csak akkor létezHET teljes párosítás, ha $|A| = |F|$.

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

• Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ szomszédsága az X-beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

• Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ szomszédsága az X-beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

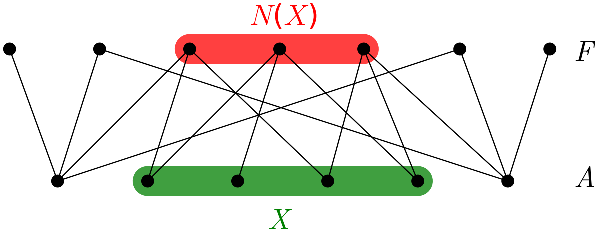
• Az $X \subseteq A$ ponthalmaz Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.

Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ szomszédsága az X-beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.

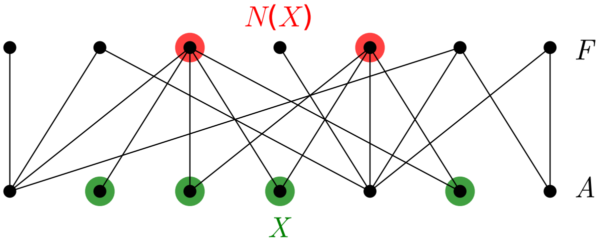


Definíció. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

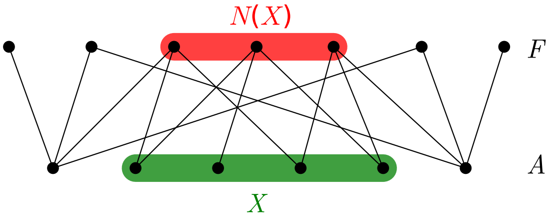
- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz $N(X)$ szomszédsága az X-beli pontok szomszédainak összessége (uniója), vagyis

$$N(X) := \{v \in F : v\text{-ből vezet él valamelyik } X\text{-beli csúcsba}\}.$$

- Az $X \subseteq A$ ponthalmaz Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.

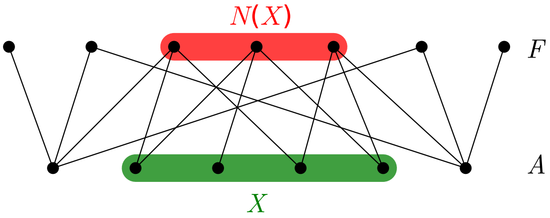


Emlékeztető. Az $X \subseteq A$ ponthalmaz Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.



Állítás. Ha a G páros gráfban van Kőnig-akadály, akkor G-ben nincs A-t lefedő párosítás (és így teljes párosítás se). Ugyanis tetszőleges M párosítás párosítatlanul hagy A-ban legalább $|X| - |N(X)| > 0$ pontot.

Emlékeztető. Az $X \subseteq A$ ponthalmaz Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.



Állítás. Ha a G páros gráfban van Kőnig-akadály, akkor G-ben nincs A-t lefedő párosítás (és így teljes párosítás se). Ugyanis tetszőleges M párosítás párosítatlanul hagy A-ban legalább $|X| - |N(X)| > 0$ pontot.

Biz. Elég az utolsó állítást bizonyítani. A szomszédság definíciója miatt az összes X-ből induló élnek $N(X)$-ben van a másik végpontja. Tehát egy X-beli pontot csak valamelyik $N(X)$-beli ponttal lehet párosítani. És mivel egy párosítás élei nem futhatnak össze F-ben sem, emiatt legfeljebb $|N(X)|$ darab X-beli pont lehet párosítva, legalább $|X| - |N(X)|$ párosítatlanul marad. $\square$

A következő mély tétel szerint a Kőnig-akadály megléte az egyetlen dolog, ami meghiúsíthatja, hogy A minden pontját párosíthassuk:

Tétel. Legyen G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

a) (Kőnig–Hall-tétel.) G-ben akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha G-ben nincs Kőnig-akadály, azaz ha minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.

b) (Kőnig–Frobenius-tétel.) G-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$ és G-ben nincs Kőnig-akadály.

Megjegyzés. A második állítás az első állítás következménye. Azt már végiggondoltuk, hogy teljes párosítás csak akkor lehet egy páros gráfban, ha a két színosztály mérete megegyezik. Ebben az esetben pedig a teljes párosítások éppen az A-t lefedő párosítások.

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A-ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A-ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-adadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A} \{|X| - |N(X)|\}. \qquad (*)$$

Itt a maximalizálásba belevettük a nem Kőnig-akadály X-eket is, de ezekre $|X| - |N(X)| \leq 0$, így a maximum Kőnig-akadály esetén vétetik fel, ha van Kőnig-akadály a gráfban.

1. Még többet mondhatunk. Láttuk, hogy ha van egy $X \subseteq A$ Kőnig-akadály a G páros gráfban, akkor $|X| - |N(X)|$ pont biztosan párosítatlanul marad A-ban egy optimális, $\nu(G)$ méretű párosítás esetén is, vagyis

$$|A| - \nu(G) \geq |X| - |N(X)| \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(G) \leq |A| - (|X| - |N(X)|).$$

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-adadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A}\{|X| - |N(X)|\}. \tag{$*$}$$

3. Valójában egyenlőség áll $(*)$-ban, amit nem bizonyítunk:

Kőnig-formula. Ha G egy páros gráf A, F színosztályokkal, akkor

$$\nu(G) = |A| - \max_{X \subseteq A}\{|X| - |N(X)|\}.$$

Ez a formula magában foglalja a „nincs Kőnig-akadály” esetet is, ekkor mindkét oldal $|A|$ lesz (a jobb oldalon a maximum 0 lesz, mely $X = \emptyset$-nál vétetik fel).

2. Akkor kapom a legerősebb becslést, ha egy olyan X Kőnig-adadályt veszek, melyre az $|X| - |N(X)|$ különbség a legnagyobb:

$$\nu(G) \leq |A| - \max_{X \subseteq A}\{|X| - |N(X)|\}. \qquad (*)$$

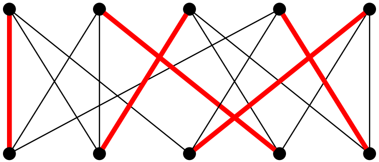
3. Valójában egyenlőség áll $(*)$-ban, amit nem bizonyítunk:

Kőnig-formula. Ha G egy páros gráf A, F színosztályokkal, akkor

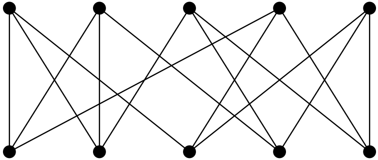
$$\nu(G) = |A| - \max_{X \subseteq A}\{|X| - |N(X)|\}.$$

Ennek lényege számunkra az, hogy ha egy M párosítás maximális méretű a G páros gráfban, akkor amennyiben M nem fedi le A-t, G-ben található M maximalitását bizonyító Kőnig-akadály, vagyis olyan X Kőnig-akadály, amelyre $|X| - |N(X)|$ éppen az M által párosítatlanul hagyott A-beli pontok száma. (Ez egyáltalán nem magától értetődő.)

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.



Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.

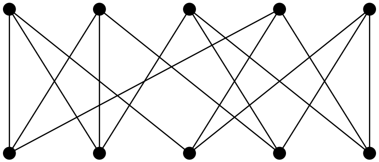


Bizonyítás. Legyen G egy d-reguláris páros gráf A, F osztályokkal, ahol $d \geq 1$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy G-ben van teljes párosítás, a Kőnig–Frobenius-tétel szerint a következő két dolgot kell ellenőrizni:

1. A két színosztály mérete egyenlő.

2. Minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.



Bizonyítás. Legyen G egy d-reguláris páros gráf A, F osztályokkal, ahol $d \geq 1$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy G-ben van teljes párosítás, a Kőnig–Frobenius-tétel szerint a következő két dolgot kell ellenőrizni:

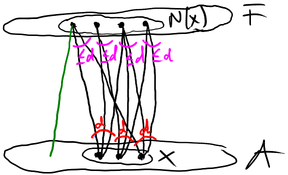
1. A két színosztály mérete egyenlő.

Ez abból következik, hogy páros gráfban az A-beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az F-beli csúcsok fokszámainak összegével, tehát esetünkben

$$|A| \cdot d = |F| \cdot d,$$

amiből a d-vel való osztás után $(d \neq 0)$ kapjuk, hogy $|A| = |F|$. ✓

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.

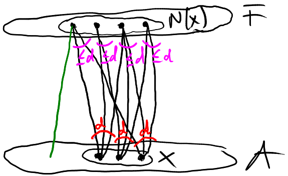


2. Minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Jelölje $e(X, N(X))$ az X és $N(X)$ között haladó G-beli élek számát. Ekkor

$$|X| \cdot d = e(X, N(X)) \leq |N(X)| \cdot d.$$

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.



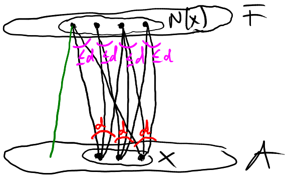
2. Minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Jelölje $e(X, N(X))$ az X és $N(X)$ között haladó G-beli élek számát. Ekkor

$$|X| \cdot d = e(X, N(X)) \leq |N(X)| \cdot d.$$

A bal oldali egyenlőség magyarázata: X minden pontjából pontosan d él vezet $N(X)$-be, ugyanis a d-regularitás miatt egy X-beli pontból d él indul ki G-ben, és a szomszédság definíciója miatt ezek mind $N(X)$-ben végződnek. Ez összesen $|X| \cdot d$ él X és $N(X)$ között.

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.



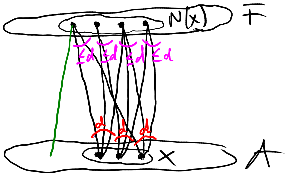
2. Minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Jelölje $e(X, N(X))$ az X és $N(X)$ között haladó G-beli élek számát. Ekkor

$$|X| \cdot d = e(X, N(X)) \leq |N(X)| \cdot d.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség magyarázata: $N(X)$ minden pontjából legfeljebb d él vezet X-be, ugyanis a d-regularitás miatt egy $N(X)$-beli pontból összesen d él indul ki G-ben, melyek közül valahány vezet X-be (az ábrán zölddel jelölt él lehetséges). Ez összesen legfeljebb $|N(X)| \cdot d$ él X és $N(X)$ között.

Állítás. Minden d-reguláris páros gráfban van teljes párosítás $d \geq 1$ esetén.



2. Minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Jelölje $e(X, N(X))$ az X és $N(X)$ között haladó G-beli élek számát. Ekkor

$$|X| \cdot d = e(X, N(X)) \leq |N(X)| \cdot d.$$

A két oldalt összevetve, d-vel való osztás után $(d > 0)$ kapjuk, hogy

$$|N(X)| \geq |X|. \checkmark$$

Mivel ez a gondolatmenet tetszőleges $X \subseteq A$ halmazra működik, a bizonyítás teljes. $\square$

Nem-páros gráfokban optimális párosítás kereséssel majd MSc-n foglalkozunk részletesebben. Most csak az alaptételt ismertetjük:

Tutte-tétel. Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha minden $X \subset V(G)$ ponthalmazra

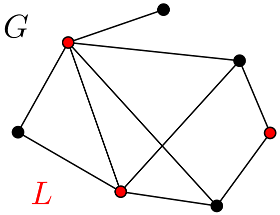
$$c_1(G - X) \leq |X|,$$

ahol $c_1(G - X)$ a G-ből az X-beli pontok elhagyása után kapott $G - X$ gráf páratlan pontszámú komponenseinek számát jelöli.

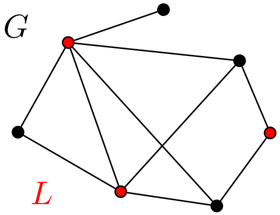
Megjegyzés. Az $X = \emptyset$ halmazra is ellenőrizni kell a tétel feltételét.

Az egyszerűbb irány. Az érdeklődő hallgatók elolvashatják a kurzus honlapján, hogy a tételben szereplő feltétel miért szükséges teljes párosítás létezéséhez.

Definíció. Egy $L \subseteq V(G)$ ponthalmaz lefogó ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább az egyik végpontja L-ben van.

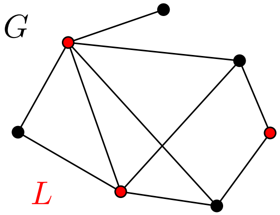


Definíció. Egy $L \subseteq V(G)$ ponthalmaz lefogó ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább az egyik végpontja L-ben van.



Illusztráció. Tegyük fel, hogy a G gráf egy múzeum térképét írja le, ahol az élek a folyosók, a csúcsok pedig a folyosók találkozási pontjai (csomópontok). A biztonsági szolgálat vezetőjeként feladatunk az, hogy őröket helyezzünk bizonyos csomópontokba úgy, hogy minden folyosót szemmel tartson legalább egy őr. (Mindegyik csomópontból a belőle induló folyosókat látja az őr.) Ekkor a feladatunk valójában egy lefogó ponthalmaz keresése G-ben.

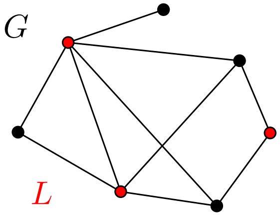
Definíció. Egy $L \subseteq V(G)$ ponthalmaz lefogó ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább az egyik végpontja L-ben van.



A természetesen felvetődő optimalizálási feladat (a múzeumőrzésnél is) a lefogó ponthalmaz méretének minimalizálása, amely egy új gráfparaméterhez vezet:

$$\tau(G) := \min\{|L| : L \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Definíció. Egy $L \subseteq V(G)$ ponthalmaz lefogó ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább az egyik végpontja L-ben van.



$$\tau(G) := \min\{|L| : L \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy

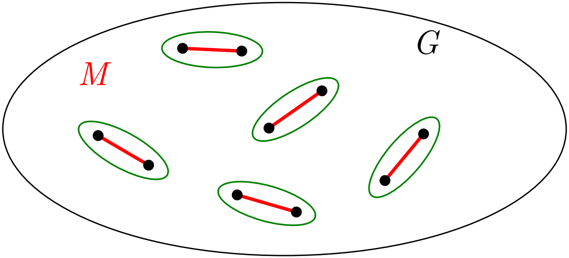
$$L \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben} \iff V(G) \setminus L \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben},$$

amiből $\tau(G) = |V(G)| - \alpha(G)$ adódik. Tehát a τ paraméter meghatározása az α paraméter meghatározásával egyenértékű; és így a sejtés szerint a $\tau(G)$ paraméter sem számolható ki hatékonyan.

Állítás. $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Állítás. $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\nu(G)$ méretű M párosítást G-ben. Tetszőleges L lefogó ponthalmaznak tartalmaznia kell M minden élének legalább az egyik végpontját. Mivel M-ben nincs összefutás, ez legalább $|M|$ darab különböző pontot jelent L-ben (az ábrán zölddel jelölt kételemű halmazok mindegyikében van pontja L-nek), amiből $|L| \geq |M| = \nu(G)$. És mivel ez minden L lefogó ponthalmazra igaz, az állítást bebizonyítottuk. $\square$



Állítás. $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\nu(G)$ méretű M párosítást G-ben. Tetszőleges L lefogó ponthalmaznak tartalmaznia kell M minden élének legalább az egyik végpontját. Mivel M-ben nincs összefutás, ez legalább $|M|$ darab különböző pontot jelent L-ben (az ábrán zölddel jelölt kételemű halmazok mindegyikében van pontja L-nek), amiből $|L| \geq |M| = \nu(G)$. És mivel ez minden L lefogó ponthalmazra igaz, az állítást bebizonyítottuk. $\square$

Megjegyzés. $\nu(G) < \tau(G)$ lehetséges:

Például $\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ és $\tau(K_n) = n - 1$. (Ellenőrizzük!)

Állítás. $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\nu(G)$ méretű M párosítást G-ben. Tetszőleges L lefogó ponthalmaznak tartalmaznia kell M minden élének legalább az egyik végpontját. Mivel M-ben nincs összefutás, ez legalább $|M|$ darab különböző pontot jelent L-ben (az ábrán zölddel jelölt kételemű halmazok mindegyikében van pontja L-nek), amiből $|L| \geq |M| = \nu(G)$. És mivel ez minden L lefogó ponthalmazra igaz, az állítást bebizonyítottuk. $\square$

Megjegyzés. $\nu(G) < \tau(G)$ lehetséges:

Például $\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ és $\tau(K_n) = n - 1$. (Ellenőrizzük!)

Páros gráfok esetén azonban mindig egyenlőség van:

Kőnig tétele. Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.